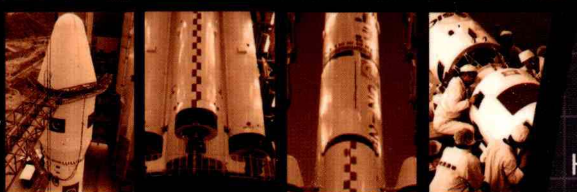
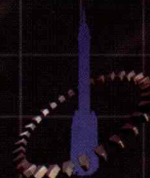
航天力学中的优化理论研究［之一］

关于多级火箭结构参数的优化理论及其他问题的研究





竺苗龙 著

HANGTIAN LIXUEZHONGDE YOUHUALILUN YANJIU

中国宇航出版社

内容简介

本书为关于航天力学中的优化理论研究的学术专著，主要论述了多级火箭结构参数的优化问题，还包含了作者关于多级火箭的速度极限、相对论力学中多级火箭的特征速度表达式等方面的理论研究成果。

全书共7章，分别为：设计中的多级火箭的最佳质量比；多级火箭的结构参数优化问题及一些有关理论问题；考虑运动优化后多级火箭的最大速度方案等问题；从相对论力学看前面的有关问题；关于前面几章；带有助推火箭的多级火箭一些有关问题的探讨；关于多级火箭最佳质量比和关于多级火箭最大速度值的一般变化规律等的说明、例和注记。书中所论述的内容全部来自作者以及作者及其合作者多年的科研成果。

本书可供从事运载火箭总体与结构研究和设计的理论工作者及工程技术人员阅读，也可作为高等院校和研究机构相关专业的研究生教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

关于多级火箭结构参数的优化理论及其他问题的研究/竺苗龙著．—北京：中国宇航出版社，2004.9
(航天力学中的优化理论研究；1)
ISBN 7-80144-871-5

Ⅰ．关...　Ⅱ．竺...　Ⅲ．多级火箭—结构参数—最佳化理论　Ⅳ．V475.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第094695号

责任编辑 仇伟立　**装帧设计** 姜　旭
责任校对 王　妍　**责任印制** 任连福

出版发行 中国宇航出版社
地　址 北京市阜成路8号　**邮　编** 100830
(010)68768548
网　址 www.caphbook.com/www.caphbook.com.cn
经　销 新华书店
发行部 (010)68371900　(010)88530478(传真)
(010)68768541　(010)68767294(传真)
零售店 读者服务部　北京宇航文苑
北京市阜成路8号　北京市海淀区海淀大街31号
(010)68371105　(010)62579190
承　印 北京智力达印刷有限公司

版　次 2004年9月第1版
2004年9月第1次印刷
开　本 1/16
规　格 787×1092
印　张 16.75
字　数 415千字
书　号 ISBN 7-80144-871-5
定　价 66.00元

前　言

《关于多级火箭结构参数的优化理论及其他问题的研究》(《航天力学中的优化理论研究》[之一])和《关于航天器最佳发射轨道的理论及其他问题的研究》(《航天力学中的优化理论研究》[之二])的写作,现在终于完成了,我内心很激动。

我想起了我的小学老师、中学老师、大学老师以及一些同行中的长辈对我的教育,想起了各级组织和领导对我的培养,想起了我的同事和朋友对我的帮助,想起了我的合作者广宇、吕茂烈等先生过去和我一起的努力。当然我也想起了我的父母和我的家庭对我的关心以及我的孩子们这几年在本书的有关结果中所做的工作。例如《关于多级火箭结构参数的优化理论及其他问题的研究》中的第 6 章整整一章和其他若干节的内容就是他们和我合作研究的。

本书的全部成果是我与我的合作者自己研究所得,其具体内容曾反映在我们的一系列论文中,因此书中不可避免地会重复提到一些内容。如果去掉这些少量的重复内容,又怕给读者了解全节的内容带来一些不必要的麻烦。考虑再三,还是没有动它。

另外,在《关于多级火箭结构参数的优化理论及其他问题的研究》中,除了关于多级火箭结构参数的优化理论外还包含了其他一些研究成果,例如多级火箭的速度极限、相对论力学中的多级火箭的特征速度表达式等。

同样,在《关于航天器最佳发射轨道的理论及其他问题的研究》中,除了关于航天器最佳发射轨道的理论之外,还有关于返回研究中的成果以及关于轨道改变研究中的成果等。

但是这两本书的主要内容是关于多级火箭结构参数的优化理论和关于航天器最佳发射轨道的理论。它们凝结着我几乎一辈子的汗水和心血。

十几年前,我做梦也在想着把上述这两方面的工作系统化并提高到理论的高度。1994 年科学出版社出版了我的《航天力学中的一些理论问题》(英文版),2000 年科学出版社又出版了中文版《航天力学中的一些理论问题(2)》。这两本书的内

容实际上就是关于多级火箭结构参数的优化理论和关于航天器最佳发射轨道理论的雏形。

此后,我一直在不间断地完善这两个我称之为“小理论”的论述,同时请国防科技大学的老友们对我的理论做抽样仿真,以便弄明白这两个“小理论”在工程应用中是否有意义?有多大的意义?仿真表明:结果挺好(详见本书的两个实例)。就这样经过多年的努力,我把这两个“小理论”终于搞成现在这个样子而呈献给读者。

尽管奋斗多年,终究能力有限。所以书中不足甚至错误的地方恳请前辈和同行们多多指正,以便我们今后把理论研究和应用工作搞得更好,为国家、为民族作出新的贡献!

坐苗龙

2002年5月21日

目 录

第1章　设计中的多级火箭的最佳质量比

1.1　多级火箭的各主要部分的维特里吉特等标志及威廉斯等人的最佳质量比计算

关于多级火箭的各主要部件的质量以及这些质量相互间的比值，国外有各种标志，如参考文献[4]、[2]、[3]。

本节将介绍维特里吉特(M. Vertregt)的标志及用此标志进行一些有关的计算。

图1-1为计算用的多级火箭示意图，注有其主要组成部分的符号。

根据此示意图，多级火箭可以分为级和子火箭。

火箭的级是由火箭工作期间所消耗的推进剂以及盛载这些推进剂的容器、发动机、附件和各舱的壳体和承力结构等组成。

子火箭则是多级火箭的有效载荷和一些级这样的组合，当其中的一级工作时，则其他各级与多级火箭的有效载荷一起作为该级子火箭的“有效载荷”。

维特里吉特建议将子火箭的序号由顶至底顺次排列，如图1-1所示。

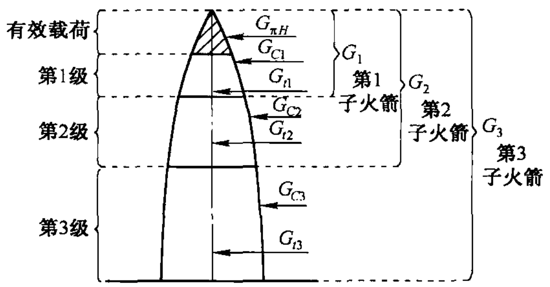


图1-1　多级火箭示意图(1)

这时对子火箭1来说，工作级为第1级，它的“有效载荷”就是多级火箭的有效载荷；子火箭2的工作级为第2级，其有效载荷就是子火箭1，即第一级与多级火箭有效载荷之和；子火箭3的工作级为第3级，其有效载荷就是子火箭2，其余依此类推，有效载荷不包含在级的概念中。

火箭的其他各部分具体标志如下：

第一，$G_{\pi H}$表示多级火箭的有效载荷的重量①。根据这一重量设计和制造整个火箭，它是最重要的重量。有效载荷由安置在火箭中的人员或设备、承载它们的受力结构和飞行中保护它们的壳体等所组成。

而对有些火箭来说，“有效载荷”就是它所运载的另一子火箭的重量，即子火箭 1 好像是子火箭 2 的“有效载荷”，子火箭 2 是子火箭 3 的“有效载荷”，依次类推。

第二，G_T 表示每级所消耗的推进剂的重量。其中包括辅助物的重量，例如涡轮泵组工作用的过氧化氢和在飞行中该级工作时所消耗的其他化学品。

第三，G_C，表示每级的净重。它由推进剂容器、发动机、涡轮泵组、活门和导管、承力结构、壳体、操纵机构等的总重量构成；也就是该级具有的、并将与级一起脱离开在飞行中火箭其余部分的全部重量。

第四，G_n 表示由 N 级组成的火箭的初始总重量。

根据上述火箭组成部分的标志，G_{T2}表示第 2 级所消耗的全部推进剂的重量；G_{C3}表示第 3 级的净重；G_3 表示第 3 子火箭的初始总重量等。

根据这些定义，显然可得

$$G_1 = G_{\pi H} + G_{C1} + G_{T1} \tag{1.1-1}$$

$$G_n = G_{n-1} + G_{Cn} + G_{Tn} \tag{1.1-2}$$

除了以上 4 个最重要的多级火箭的主要部分重量定义外，下面再定义 3 个重量比值。

第五，子火箭的“相对”重量即子火箭的初始总重量和它的“有效载荷”之比，于是

$$p_1 = \frac{G_1}{G_{\pi H}} \tag{1.1-3}$$

$$p_n = \frac{G_n}{G_{n-1}} \tag{1.1-4}$$

多级火箭的总“相对”重量 P，即 N 级火箭初始总重量和第 1 级有效载荷之比

$$P = \frac{G_n}{G_{\pi H}} \tag{1.1-5}$$

由于

$$\frac{G_1}{G_{\pi H}} \cdot \frac{G_2}{G_1} \cdot \frac{G_3}{G_2} \cdots \frac{G_n}{G_{n-1}} = \frac{G_n}{G_{\pi H}} = P$$

故有

$$P = p_1 p_2 \cdots p_n = \prod_{i=1}^{n} p_i \tag{1.1-6}$$

① 本书中仍沿用“重量”一词。——作者

量 P 是多级火箭最重要的比值之一。

第六，S 表示级的结构特性，即表示包括推进剂在内的该级的初始总重量与净重之比的一个量。

$$S_1 = \frac{G_{C1} + G_{T1}}{G_{C1}} \tag{1.1-7}$$

$$S_n = \frac{G_{Cn} + G_{Tn}}{G_{Cn}} \tag{1.1-8}$$

第七，r_i 表示重量比(或质量比)。这是子火箭初始重量(质量)与推进剂消耗完后的同一子火箭的重量(质量)之比。

这样

$$r_1 = \frac{G_1}{G_1 - G_{T1}} \tag{1.1-9}$$

$$r_n = \frac{G_n}{G_n - G_{Tn}} \tag{1.1-10}$$

质量比 r_i 确定了在没有引力场和介质阻力下相应于如下方程式的理想速度：

$$\Delta V_i = W_i \ln r_i \tag{1.1-11}$$

其中 W_i 为第 i 级火箭的有效喷气速度。

显见，N 级火箭其载荷可获得的速度为

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} W_i \ln r_i \tag{1.1-12}$$

如果各级的有效喷气速度相同，即 $W_i = W$，则有

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = W \ln(r_1 r_2 \cdots r_n) \tag{1.1-13}$$

用符号 R 来作为多级火箭的折合质量比，即用 R 表示

$$R = r_1 r_2 \cdots r_n \tag{1.1-14}$$

此时有

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = W \ln R \tag{1.1-15}$$

由此可得

$$R = \mathrm{e}^{\frac{\Sigma \Delta V_i}{W}} \tag{1.1-16}$$

请注意上式 R 在 $W_i = W$ 时才为正确。

这样定义的 S_i 和 r_i 显然都是恒大于 1 的。

其次，从式(1.1-9)可得

$$\frac{r_1-1}{r_1}=\frac{G_{T1}}{G_1}$$

从式(1.1-7)可得

$$\frac{S_1-1}{S_1}=\frac{G_{T1}}{G_{C1}+G_{T1}}$$

从式(1.1-3)可得

$$\frac{p_1-1}{p_1}=\frac{G_1-G_{\pi H}}{G_1}$$

把

$$G_1-G_{\pi H}=G_{C1}+G_{T1}$$

代入上式则得

$$\frac{p_1-1}{p_1}=\frac{G_{C1}+G_{T1}}{G_1}$$

故知

$$\frac{p_1-1}{p_1}\cdot\frac{S_1-1}{S_1}=\frac{G_{C1}+G_{T1}}{G_1}\cdot\frac{G_{T1}}{G_{C1}+C_{T1}}=\frac{G_{T1}}{G_1}=\frac{r_1-1}{r_1}$$

即有

$$\frac{S_1-1}{S_1}\cdot\frac{p_1-1}{p_1}=\frac{r_1-1}{r_1}$$

就一般情况而论,由于

$$\frac{r_n-1}{r_n}=\frac{G_{Tn}}{G_n}$$

$$\frac{S_n-1}{S_n}=\frac{G_{Tn}}{G_{Cn}+G_{Tn}}$$

$$\frac{p_n-1}{p_n}=\frac{G_n-G_{n-1}}{G_n}=\frac{G_{Cn}+G_{Tn}}{G_n}$$

所以

$$\frac{S_n-1}{S_n}\cdot\frac{p_n-1}{p_n}=\frac{G_{Tn}}{G_{Cn}+G_{Tn}}\cdot\frac{G_{Cn}+G_{Tn}}{G_n}=\frac{G_{Tn}}{G_n}=\frac{r_n-1}{r_n}$$

故知,对任意的 n 都有

$$\frac{r_n-1}{r_n}=\frac{S_n-1}{S_n}\cdot\frac{p_n-1}{p_n} \tag{1.1-17}$$

由此可得

$$S_n=r_n\,\frac{p_n-1}{p_n-r_n} \tag{1.1-18}$$

$$p_n = r_n \frac{S_n - 1}{S_n - r_n} \tag{1.1-19}$$

$$r_n = \frac{p_n S_n}{p_n + S_n - 1} \tag{1.1-20}$$

对于 N 级火箭而言,由于

$$p_1 = r_1 \frac{S_1 - 1}{S_1 - r_1}, p_2 = r_2 \frac{S_2 - 1}{S_2 - r_2}, \cdots, p_n = r_n \frac{S_n - 1}{S_n - r_n}$$

所以有

$$P = p_1 p_2 \cdots p_n = r_1 r_2 \cdots r_n \frac{S_1 - 1}{S_1 - r_1} \cdot \frac{S_2 - 1}{S_2 - r_2} \cdots \frac{S_n - 1}{S_n - r_n}$$

故知

$$P = R \frac{S_1 - 1}{S_1 - r_1} \cdot \frac{S_2 - 1}{S_2 - r_2} \cdots \frac{S_n - 1}{S_n - r_n} \tag{1.1-21}$$

把 $G_n = G_{\pi H} P$ 代入式(1.1-21),得

$$G_n = G_{\pi H} R \frac{S_1 - 1}{S_1 - r_1} \cdot \frac{S_2 - 1}{S_2 - r_2} \cdots \frac{S_n - 1}{S_n - r_n} \tag{1.1-22}$$

从式(1.1-10),得

$$G_{Tn} = G_n \frac{r_n - 1}{r_n}$$

把式(1.1-22)中的 G_n 代入上式,得

$$G_{Tn} = G_{\pi H} R \frac{r_n - 1}{r_n} \cdot \frac{S_1 - 1}{S_1 - r_1} \cdot \frac{S_2 - 1}{S_2 - r_2} \cdots \frac{S_n - 1}{S_n - r_n} \tag{1.1-23}$$

类似地可得

$$G_{Cn} = G_{\pi H} R \frac{r_n - 1}{r_n} \cdot \frac{S_1 - 1}{S_1 - r_1} \cdot \frac{S_2 - 1}{S_2 - r_2} \cdots \frac{S_n - 1}{S_n - r_n} \cdot \frac{1}{S_n - 1} \tag{1.1-24}$$

如果所有级和子火箭的“结构特性”S_i 和质量比 r_i 均相同,即 $S_i = S, r_i = r$,则可写出下列各式

$$P = p^n (\text{其中 } p = p_1 = p_2 = \cdots = p_n) \tag{1.1-25}$$

$$R = r^n \tag{1.1-26}$$

$$P = R \left(\frac{S - 1}{S - R^{\frac{1}{n}}} \right)^n \tag{1.1-27}$$

$$R = P \left(\frac{S}{P^{\frac{1}{n}} + S - 1} \right)^n \tag{1.1-28}$$

借助上述等式不难得出其他比值。

例如以$\sum G_C$表示火箭所有N级的总净重，以$\sum G_T$表示所有各级所携带的推进剂重量的总和，可得

$$\sum G_C+\sum G_T=G_n-G_{\pi H}=(P-1)G_{\pi H}$$

因此

$$\frac{\sum G_C+\sum G_T}{G_n}=\frac{G_{\pi H}(P-1)}{G_{\pi H}P}=\frac{P-1}{P}$$

由于所有各级结构特性值相同，故自式(1.1-8)可得

$$S_i=S=\frac{G_{Ci}+G_{Ti}}{G_{Ci}}=\frac{\sum G_C+\sum G_T}{\sum G_C}$$

由此可见

$$\frac{\sum G_C}{G_n}=\frac{\sum G_C}{\sum G_C+\sum G_T}\frac{\sum G_C+\sum G_T}{G_n}=\frac{1}{S}\cdot\frac{P-1}{P} \tag{1.1-29}$$

从而可得

$$\frac{\sum G_T}{G_n}=\frac{S-1}{S}\cdot\frac{P-1}{P} \tag{1.1-30}$$

注意对式(1.1-25)～(1.1-30)而言，均有$S_i=S$，$r_i=r$。

利用上面的标志及有关的计算公式，维特里吉特在假定结构特性S_i与质量比r_i无关的情况下，寻求因子$r_1,r_2,\cdots,r_n$这样的一种分配方法，它在满足条件

$$F=\sum\Delta V_i-(W_1\ln r_1+W_2\ln r_2+\cdots+W_n\ln r_n)=0 \tag{1.1-31}$$

下使

$$P=R\frac{S_1-1}{S_1-r_1}\cdot\frac{S_2-1}{S_2-r_2}\cdots\frac{S_n-1}{S_n-r_n}=f$$

为最小。其中

$$R=r_1r_2\cdots r_n$$

为了解决这个问题，显然可用拉格朗日乘子法，记

$$\Phi(r_1,r_2,\cdots,r_n)=f(r_1,r_2,\cdots,r_n)+\lambda F(r_1,r_2,\cdots,r_n)$$

从

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r_1}=0$$

可得

$$r_1r_2\cdots r_n\frac{S_1-1}{S_1-r_1}\cdot\frac{S_2-1}{S_2-r_2}\cdots\frac{S_n-1}{S_n-r_n}\cdot\frac{S_1}{S_1-r_1}-\lambda W_1=0$$

因为

$$r_1r_2\cdots r_n\frac{S_1-1}{S_1-r_1}\cdots\frac{S_n-1}{S_n-r_n}=P$$

故有

$$P\frac{S_1}{S_1-r_1}-\lambda W_1=0 \tag{1.1-32}$$

同理从

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r_2}=0 \text{ 可得 } P\frac{S_2}{S_2-r_2}-\lambda W_2=0 \tag{1.1-33}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r_n}=0 \text{ 可得 } P\frac{S_n}{S_n-r_n}-\lambda W_n=0 \tag{1.1-34}$$

从方程(1.1-32)～(1.1-34)，可得

$$\begin{cases} r_2=S_2-\dfrac{S_2}{S_1}\dfrac{W_1}{W_2}(S_1-r_1) \\ \qquad\vdots \\ r_n=S_n-\dfrac{S_n}{S_1}\dfrac{W_1}{W_n}(S_1-r_1) \end{cases} \tag{1.1-35}$$

将式(1.1-35)代入式(1.1-31)，可求出 r_1 来，然后代入式(1.1-35)就解决了问题。

如果所有级的 $W_i=W$，问题就可大大简化。

此时

$$\begin{cases} r_2=\dfrac{S_2}{S_1}r_1 \\ \quad\vdots \\ r_n=\dfrac{S_n}{S_1}r_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\sum\Delta V_i &= W\left[\ln r_1+\ln\frac{S_2}{S_1}r_1+\cdots+\ln\frac{S_n}{S_1}r_1\right] \\ &= W\left[n\ln\frac{r_1}{S_1}+\ln S_1+\ln S_2+\cdots+\ln S_n\right] \\ &= W\left[n\ln\frac{r_1}{S_1}+\ln S_1S_2\cdots S_n\right]\end{aligned}$$

引入下列符号

$$S_1S_2\cdots S_n=\overline{S}$$

故有

$$\sum\Delta V_i = W\left[n\ln\frac{r_1}{S_1}+\ln\overline{S}\right]$$

可是

$$\sum \Delta V_i = W \ln R$$

所以
$$n \ln \frac{r_1}{S_1} + \ln \overline{S} = \ln R$$

故知

$$r_1 = S_1 \left(\frac{R}{\overline{S}} \right)^{\frac{1}{n}} \tag{1.1-36}$$

$$\vdots$$

$$r_n = S_n \left(\frac{R}{\overline{S}} \right)^{\frac{1}{n}} \tag{1.1-37}$$

这样问题的解就简洁地表示出来了。

但是，r_i 与 S_i 无关的假设，维特里吉特本人也认为是不合理的。威廉斯(M.L.Williams)在下述的

$$G_{Ci} = [\nu_{Ci}^{(1)} + \nu_{Ci}^{(2)}] G_{Ti} + \nu_{Ci}^{(3)} G_i \tag{1.1-38}$$

假设条件下[其中 $\nu_{Ci}^{(j)}(j=1,2,3)$ 为 3 个正常数并且显见 $\nu_{Ci}^{(3)} < 1$]，对上述问题重新进行了探讨。

由于
$$p_i = \left[1 - \frac{G_{Ci}}{G_i} - \frac{G_{Ti}}{G_i} \right]^{-1} \tag{1.1-39}$$

把式(1.1-38)代入式(1.1-39)可得

$$p_i = \left[(1 - \nu_{Ci}^{(3)}) - (1 + \nu_{Ci}^{(1)} + \nu_{Ci}^{(2)}) \frac{G_{Ti}}{G_i} \right]^{-1}$$

引入下列符号：

$$A_i = 1 - \nu_{Ci}^{(3)} \tag{1.1-40}$$

$$B_i = 1 + \nu_{Ci}^{(1)} + \nu_{Ci}^{(2)} \tag{1.1-41}$$

$$\mu_i = \frac{G_{Ti}}{G_i} \tag{1.1-42}$$

可知

$$p_i = [A_i - B_i \mu_i]^{-1} \tag{1.1-43}$$

同时由于

$$r_i = (1 - \mu_i)^{-1} \tag{1.1-44}$$

所以，求前述的极小值问题，这时已变为求下列 Φ 极小值的问题

$$\Phi(\mu_1, \cdots, \mu_n) = P(\mu_1, \cdots, \mu_n) + \lambda \left[V + \sum_{i=1}^{n} W_i \ln(1 - \mu_i) \right] \tag{1.1-45}$$

且满足下述的约束条件：

$$V + \sum_{i=1}^{n} W_i \ln(1 - \mu_i) = 0 \tag{1.1-46}$$

其中

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$$

很容易证明,在这时解的形式为

$$r_i = \frac{1}{1-\mu_i} = \left(\frac{A_i}{B_i} - 1\right)^{-1}\left\{\frac{W_1}{W_i}\left[r_1\left(\frac{A_1}{B_1} - 1\right) + 1\right] - 1\right\} \quad (i = 2, \cdots, n) \tag{1.1-47}$$

则 μ_1 或 r_1 之值则可用联立解等式(1.1-46)和(1.1-47)而确定。

如果各级的有效喷气速度相同,即 $W_i = W$,则从(1.1-47)可得

$$\frac{1}{1-\mu_i} = r_i = \frac{1 - \dfrac{A_1}{B_1}}{1 - \dfrac{A_i}{B_i}} r_1 \quad (i = 2, 3, \cdots, n) \tag{1.1-48}$$

又

$$V = \sum \Delta V_i = W \ln r_1 r_2 \cdots r_n = W \ln\left\{\left[r_1\left(1 - \frac{A_1}{B_1}\right)\right]^n \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{A_i}{B_i}\right)^{-1}\right\} \tag{1.1-49}$$

引入符号

$$\bar{\theta} = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{A_i}{B_i}\right)^{-1} \tag{1.1-50}$$

后可得

$$r_1 = \left[\frac{e^{\frac{V}{W}}}{\bar{\theta}}\right]^{\frac{1}{n}}\left[1 - \frac{A_1}{B_1}\right]^{-1} \tag{1.1-51}$$

另外又由于

$$V = W \ln R$$

所以

$$R = \bar{\theta} r_1^n \left[1 - \frac{A_1}{B_1}\right]^n$$

故有

$$\begin{cases} r_1 = \left[1 - \dfrac{A_1}{B_1}\right]^{-1}\left(\dfrac{R}{\bar{\theta}}\right)^{\frac{1}{n}} \\ \vdots \\ r_n = \left[1 - \dfrac{A_n}{B_n}\right]^{-1}\left(\dfrac{R}{\bar{\theta}}\right)^{\frac{1}{n}} \end{cases}$$

不难看出当

$$A_n = 1$$

$$B_n = \frac{S_n}{S_n - 1}$$

时，我们就得出维特里吉特所研究的结果

$$\begin{cases} r_1 = S_1\left(\dfrac{R}{\overline{S}}\right)^{\frac{1}{n}} \\ \quad\vdots \\ r_n = S_n\left(\dfrac{R}{\overline{S}}\right)^{\frac{1}{n}} \end{cases}$$

其中

$$\overline{S} = \prod_{i=1}^{n} S_i$$

威廉斯本人指出，他在上述的研究中所得的结果，只能作为初步计算用。事实上，这些系数 $\nu_{Ci}^{(j)}$ 是粗略的，他的假设

$$G_{Ci} = [\nu_{Ci}^{(1)} + \nu_{Ci}^{(2)}]G_{Ti} + \nu_{Ci}^{(3)}G_i$$

也是粗略的，所以本节的结果是粗略的，但设计的初步计算必须要有。速度值 V 的进一步提高可参见下章。而关于本节的进一步讨论则见下面两节。

1.2 关于多级火箭的最佳质量比(Ⅰ)

关于多级火箭的最佳质量比，威廉斯指出：

$$F = \frac{1}{A_1 - B_1\mu_1}\cdot\frac{1}{A_2 - B_2\mu_2}\cdots\frac{1}{A_n - B_n\mu_n} + \lambda[V + W_1\ln(1-\mu_1) + \cdots + W_n\ln(1-\mu_n)]$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \mu_1} = \dfrac{B_1 P}{A_1 - B_1\mu_1} - \dfrac{\lambda W_1}{1-\mu_1} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \mu_2} = \dfrac{B_2 P}{A_2 - B_2\mu_2} - \dfrac{\lambda W_2}{1-\mu_2} = 0 \\ \quad\vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial \mu_n} = \dfrac{B_n P}{A_n - B_n\mu_n} - \dfrac{\lambda W_n}{1-\mu_n} = 0 \end{cases}$$

其中

$$P=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{A_i-B_i\mu_i}$$

由第 1 式和第 i 式联立($i=2,3,\cdots,n$)可得

$$\frac{B_1(A_i-B_i\mu_i)}{B_i(A_1-B_1\mu_1)}=\frac{W_1(1-\mu_i)}{W_i(1-\mu_1)}$$

记

$$M=\frac{W_iB_1}{W_1B_i}\cdot\frac{1-\mu_1}{A_1-B_1\mu_1}$$

则可得

$$\mu_i=\frac{MA_i-1}{MB_i-1}$$

所以

$$\begin{cases}\bar{r}_i=\dfrac{1}{1-\mu_i}=\dfrac{B_iW_iB_1-W_1B_i[(A_1-B_1)\bar{r}_1+B_1]}{W_iB_1(B_i-A_i)}\\(i=2,3,\cdots,n)\\\bar{r}_1\text{ 由 }V=\sum\limits_{i=1}^{n}W_i\ln\bar{r}_i\text{ 定出}\end{cases}\tag{1.2-1}$$

特殊情况 $W_i=W$ 时($i=1,2,\cdots,n$)驻点的表达式如下:

$$\bar{r}_i=\frac{B_i}{B_i-A_i}\sqrt[n]{e^{\frac{V}{W}}\left(1-\frac{A_1}{B_1}\right)\cdots\left(1-\frac{A_n}{B_n}\right)}\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{1.2-1′}$$

(1.2-1)式中选择了 $\bar{r}_1$ 作为参数来表示其他的 $\bar{r}_i(i\neq1)$,当然也可选择 $\bar{r}_j$(j 是 $1,2,\cdots,n$ 中一个不等于 1 的数)作为参数来表示其他的 $\bar{r}_i$($i\neq j$,即 $i=1,2,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n$),而 $\bar{r}_j$ 本身当然也可由 $V=\sum\limits_{i=1}^{n}W_i\ln\bar{r}_i$ 来确定。

1.2.1　驻点可能落在理论允许区域内(外)情况的讨论

从定义

$$r_i=\frac{G_i}{G_i-G_{Ti}}$$

知道:$r_i\geqslant1(i=1,2,\cdots,n)$

从定义

$$P=\prod_{i=1}^{n}p_i=\frac{1}{A_1-B_1+\dfrac{B_1}{r_1}}\cdot\frac{1}{A_2-B_2+\dfrac{B_2}{r_2}}\cdots\frac{1}{A_n-B_n+\dfrac{B_n}{r_n}};(\text{且 }1<p_i<\infty)$$