高等院校“十一五”规划教材

丛书总主编　李海峰　霍振宏

高等数学

（下 册）

主　编　赵晓晶　付国华

副主编　臧雨亭　李艳军　赵玉亮　湛华平

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

高等院校“十一五”规划教材

高等数学（下册）

主　编　赵晓晶　付国华

副主编　臧雨亭　李艳军　赵玉亮　湛华平

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是根据编者多年的教学实践，按照新形势下教材改革的精神，并结合教育部颁布的工科院校高等数学课程的教学基本要求编写而成的。本书共 11 章，主要内容有：函数、极限与连续，一元函数微积分，向量代数与空间解析几何，多元函数微积分，微分方程，无穷级数。每章后面附有数学家简介和一定数量的习题，书后有习题答案。

本书编写力求深入浅出，条理清晰，重点突出，通俗易懂，理论联系实际。

本书可作为各类高等院校工科和理科各专业的教材，也可供工程技术人员及企业或经济管理人员参考之用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 赵晓晶，付国华主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2010.4
高等院校“十一五”规划教材
ISBN 978-7-5084-7368-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①赵… ②付… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第073218号

策划编辑：杨谷/向辉　责任编辑：杨元泓　加工编辑：周益丹　封面设计：李佳

书　　名	高等院校“十一五”规划教材 **高等数学（下册）**
作　　者	主　编　赵晓晶　付国华 副主编　臧雨亭　李艳军　赵玉亮　湛华平
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京市天竺颖华印刷厂
规　　格	170mm×227mm　16 开本　总 33.25 印张　总 671 千字
版　　次	2010 年 7 月第 1 版　2010 年 9 月第 2 次印刷
印　　数	1101—3100 册
总 定 价	**52.00 元（上册、下册）**

前　言

高等数学是变量数学，是以极限论为基础，以微积分为核心，研究变量之间的数量关系与空间形式的科学。今天，它已成为自然科学、社会科学、工农业生产、工程设计、金融、经济和高新技术等领域研究中必不可少的工具。

本书充分考虑高等工科院校的专业、学制及其培养目标等因素，依据教育部颁布的工科院校高等数学的教学基本要求，本着以应用为目的，以培养能力为主，以必需够用为度，以讲清概念、强化应用为重点的原则，结合作者多年教学实践编写而成。本书力求突出以下特点：

（1）适当降低理论深度，突出微积分中实用的分析和运算方法，在照顾到必要的系统性的前提下，以讲清基本概念和基本运算为主，不追求过深的数学理论。

（2）注意启发引导，从实际问题引出抽象概念，使学生了解概念的实际背景以及研究这一概念的重要意义。然后对概念的实质进行揭示，从而加深对概念的理解，达到逐步培养学生从实际问题归纳和抽象数学问题即数学建模的能力。

（3）以数学知识为载体，加强数学思想和方法的渗透，用数学思想和方法统帅具体知识和问题的解决，以此培养和发展学生的创新能力。

（4）注重数学思维过程的展现，加强思维能力的培养，其主要意义在于培养学生良好的思维习惯，形成良好的思维策略，提高创造力。

（5）加强数学建模和数学实验内容以及后续课程的联系，以期达到培养学生运用数学的能力。

（6）文字通俗易懂，深入浅出，重点突出，便于自学，在例题和习题的配备上，注意到难易适中，份量适当。

本书由安阳工学院赵晓晶、付国华任主编，制定编写大纲和方案，把握本书特点，负责全书的修改和定稿。本书主要编写人员分工如下：第 1 章和第 10 章由付国华编写；第 2 章和第 6 章由张妩娜编写；第 3 章由任欢和石留杰编写；第 4 章由郭高荣编写；第 5 章和第 11 章由赵晓晶编写；第 7 章由湛华平编写；第 8 章由赵玉亮编写；第 9 章由李艳军、臧雨亭编写；附录及习题答案由臧雨亭和石留杰编写。王宜静、崔宏宇、戴晓明、陈宝凤、苏婷、刘肖云、郑旭东、董胜伟、池自英、卢凤梅、杨桦在整理资料等方面给予作者很大的帮助，在此表示感谢。

本书的编写得到了安阳工学院数理系领导的大力支持，在此深表感谢。限于编写者水平，书中缺点、错误在所难免，诚请专家和广大读者指正，提出改进意见。

编　者

2010 年 3 月

目　　录

前言
第 1 章　函数、极限与连续 1
1.1　函数 1
习题 1-1 10
1.2　数列的极限 11
习题 1-2 17
1.3　函数的极限 17
习题 1-3 23
1.4　无穷小与无穷大 24
习题 1-4 27
1.5　极限运算法则 28
习题 1-5 32
1.6　极限存在准则　两个重要极限 33
习题 1-6 37
1.7　无穷小的比较 38
习题 1-7 40
1.8　函数的连续性与间断点 41
习题 1-8 44
1.9　连续函数的运算与初等函数的连续性 45
习题 1-9 48
1.10　闭区间上连续函数的性质 49
习题 1-10 52
总习题一 53
数学家简介【1】刘徽 54
第 2 章　导数与微分 56
2.1　导数的概念 56
习题 2-1 64
2.2　函数的求导法则 65
习题 2-2 73
2.3　高阶导数 75
习题 2-3 78
2.4　隐函数的导数　由参数方程所确定的函数的导数 79
习题 2-4 84

2.5 函数的微分......85
习题 2-5......91
总习题二......92
数学家简介【2】牛顿......94
第 3 章 微分中值定理与导数的应用......96
3.1 微分中值定理......96
习题 3-1......103
3.2 洛必达法则......104
习题 3-2......110
3.3 泰勒公式......110
习题 3-3......117
3.4 函数的单调性与极值最值......117
习题 3-4......127
3.5 曲线的凹凸性与函数图形的描绘......129
习题 3-5......137
3.6 曲率......138
习题 3-6......144
总习题三......145
数学家简介【3】正统数学家——柯西......147
第 4 章 不定积分......149
4.1 原函数与不定积分概念......149
习题 4-1......155
4.2 换元积分法......156
习题 4-2......163
4.3 分部积分法......164
习题 4-3......167
4.4 几中特殊类型函数的积分......168
习题 4-4......175
4.5 积分表的使用......176
习题 4-5......178
总习题四......178
数学家简介【4】欧洲最伟大的数学家——拉格朗日......179
第 5 章 定积分及其应用......182
5.1 定积分的概念与性质......182
习题 5-1......189
5.2 微积分基本定理......190
习题 5-2......193

5.3 定积分的换元积分法和分部积分法 194
习题 5-3 198
5.4 反常积分（广义积分） 199
习题 5-4 203
5.5 定积分的元素法及其应用 204
习题 5-5 213
总习题五 214
数学家简介【5】法国的启蒙运动代表——达朗贝尔 216
第 6 章 向量代数与空间解析几何 218
6.1 空间直角坐标系 218
习题 6-1 220
6.2 向量代数 220
习题 6-2 233
6.3 曲面及其方程 234
习题 6-3 238
6.4 平面及其方程 239
习题 6-4 243
6.5 空间曲线及其方程 243
习题 6-5 245
6.6 空间直线及其方程 246
习题 6-6 252
6.7 二次曲面 253
习题 6-7 254
总习题六 255
数学家简介【6】多才多艺的莱布尼茨 256
习题答案 259
附录 积分表 280
第 7 章 多元函数的微分法及其应用 289
7.1 多元函数的基本概念 二元函数的极限和连续 289
习题 7-1 295
7.2 偏导数 296
习题 7-2 301
7.3 全微分 302
习题 7-3 307
7.4 多元复合函数的求导法则 308
习题 7-4 313
7.5 隐函数的求导公式 314

习题 7-5 319
7.6 多元函数微分学的几何应用 319
习题 7-6 324
7.7 方向导数与梯度 324
习题 7-7 329
7.8 多元函数的极值及其求法 330
习题 7-8 336
总习题七 337
数学家简介【7】业余数学家之王——费马 338
第 8 章 重积分及其应用 342
8.1 二重积分的概念与性质 342
习题 8-1 345
8.2 二重积分的计算方法 345
习题 8-2 356
8.3 二重积分的应用 357
习题 8-3 361
8.4 三重积分 361
习题 8-4 368
总习题八 369
数学家简介【8】多产的数学家——欧拉 371
第 9 章 曲线积分和曲面积分 373
9.1 对弧长的曲线积分 373
习题 9-1 378
9.2 对坐标的曲线积分 379
习题 9-2 385
9.3 格林公式及其应用 385
习题 9-3 395
9.4 曲面积分 395
习题 9-4 402
9.5 高斯公式 通量和散度 403
习题 9-5 410
9.6 斯托克斯公式 环流量与旋度 411
习题 9-6 418
总习题九 419
数学家简介【9】最富创造性的数学家——黎曼 420
第 10 章 常微分方程 426
10.1 基本概念 426

习题 10-1 427
10.2 一阶微分方程 428
习题 10-2 431
10.3 二阶线性微分方程 432
习题 10-3 442
10.4 微分方程应用举例 442
习题 10-4 450
总习题十 451
数学家简介【10】天才少年——伽罗瓦 452
第 11 章 无穷级数 458
11.1 数项级数的概念和性质 458
习题 11-1 461
11.2 正项级数收敛判别法 462
习题 11-2 466
11.3 任意项级数 467
习题 11-3 470
11.4 幂级数 470
习题 11-4 479
11.5 函数展成幂级数 479
习题 11-5 486
11.6 幂级数展开式的应用 487
习题 11-6 489
11.7 傅立叶级数 489
习题 11-7 496
总习题十一 496
数学家简介【11】数学王子——高斯 497
习题答案 500
参考文献 513

第 7 章　多元函数的微分法及其应用

7.1　多元函数的基本概念　二元函数的极限和连续

一、多元函数的概念

在前面各章中我们所见到的都是只有一个自变量的函数，称为一元函数．但在实际中还会遇到大量的多个自变量的问题．现在把一元函数的概念推广到多个变量的情形，特别是两个变量的情形．为此，先介绍点集的概念．

一个实数 x 对应于数轴中一个点；一个二元有序组 (x,y) 对应于平面上一个点；一个三元有序数组 (x,y,z) 对应于空间内一个点．一般地，我们把一个 n 元有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 也称为一个点，n 元数组的集合 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为点集．

所有的 n 元有序数组的集合称为 n 维空间，用 R_n 来表示．当 $n=1$ 时，R_1 是一维空间，即数轴上所有点的集合；当 $n=2$ 时，R_2 是二维空间，即平面上所有点的集合；当 $n=3$ 时，R_3 是三维空间，即空间所有点的集合．

例如点集

$$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}\subset R_2$$

表示以原点为圆心，半径为 1 的圆的内部所有点的集合（不包括圆周 $x^2+y^2=1$ 上的点）．

点集

$$B=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}\subset R_2$$

表示平面上第一象限内所有的点的集合（不包括 x 轴和 y 轴上的点）．

点集

$$C=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2<R^2\}\subseteq R_3$$

表示以原点为圆心，以 R 为半径的球内（不包含球面）所有点的集合．

定义 1　设有点 $P_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $P_2(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，则称

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

为空间 R_n 内两点 P_1 与 P_2 之间的距离．

下面先把一元函数的概念推广到二元函数的情形．

定义 2　设 D 是 R_2 的一个非空子集，称映射 $f: D\to R$ 为定义在 D 上的二元函数，通常记为

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D.$$

其中点集 D 称为该函数的定义域，x，y 称为自变量，z 称为因变量.

上述定义中，与自变量 x，y 的一对值 (x,y) 相对应的因变量 z 的值，也称为 f 在点 (x,y) 处的函数值，记作 $f(x,y)$，即 $z=f(x,y)$.

值域：$f(D)=\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$.

函数的其他符号：$z=z(x,y)$，$z=g(x,y)$ 等.

类似地可定义三元函数 $u=f(x,y,z)$，$(x,y,z)\in D$ 以及三元以上的函数.

关于函数定义域的约定：在一般讨论用算式表达的多元函数 $u=f(X)$ 时，就以使这个算式有意义的变元 X 的值所组成的点集为这个多元函数的自然定义域．因而，对这类函数，它的定义域不再特别标出.

二元函数的图形：点集 $\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形，二元函数的图形是一张曲面，如图 7-1 所示．例如 $z=ax+by+c$ 是一张平面，而函数 $z=x^2+y^2$ 的图形是旋转抛物面.

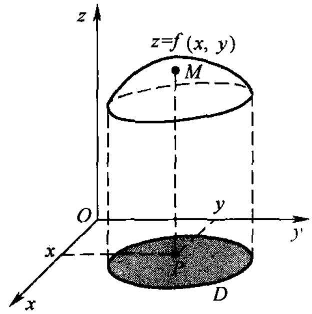

图 7-1

例 1　已知 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$，求 $f(tx,ty)$.

解
$$f(tx,ty)=t^2(x^2+y^2)-t^2xy\tan\frac{x}{y}$$
$$=t^2f(x,y).$$

例 2　求二元函数 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域.

解　要使表达式有意义，则
$$\begin{cases}\left|3-x^2-y^2\right|\leqslant 1\\ x-y^2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\\ x>y^2\end{cases}.$$

因此其定义域为 $D=\{(x,y)\mid 2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,\ x>y^2\}$.

二、区域

在讨论一元函数时，邻域和区间是经常遇见的重要概念．类似地，对多元函数的讨论，有必要建立相应的邻域与区域的概念，为了简单与直观起见，我们只给出平面点的邻域与区域的概念.

定义 3　设 $P_0(x_0,y_0)$是 xOy 平面上的一个点，δ 是某一正数．与点 $P_0(x_0,y_0)$距离小于 δ 的点 $P(x,y)$的全体，称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$，即
$$U(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta\}$$

或 $$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

邻域的几何意义：$U(P_0,\delta)$表示 xOy 平面上以点 P_0 为中心，δ 为半径的圆的内部的点 $P(x,y)$的全体.

点 P_0 的去心 δ 邻域，记作$\mathring{U}(P_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\mid 0<|P_0P|<\delta\}.$$

与一元函数类似，如果不需要强调邻域的半径δ，则用 $U(P_0)$表示点 P_0 的某个邻域，点 P_0 的去心邻域记作$\mathring{U}(P_0)$.

下面利用邻域来描述点与点集之间的关系.

定义 4 设点集 $E\subset R_2$：

（1）如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的内点；

（2）如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\cap E=\varnothing$，则称 P 为 E 的外点；

（3）如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，则称 P 点为 E 的边界点.

（4）E 的边界点的全体，称为 E 的边界，记作∂E.

（5）如果对于任意给定的 $\delta>0$，点 P 的去心邻域$\mathring{U}(P,\delta)$ 内总有 E 中的点，则称 P 是 E 的聚点.

E 的内点必属于 E；E 的外点必定不属于 E；但反之不一定成立，即并非属于 E 的点都为内点，不属于 E 的点都为外点；E 的边界点可能属于 E，也可能不属于 E．由聚点的定义可知，点集 E 的聚点 P 本身，可以属于 E，也可能不属于 E.

例如 $E=\{(x,y)\mid 0<x<1,y=0\}$，则 E 中任何一点都不是内点，而尽管点(0,0)与(1,0)都不属于 E，但由于找不到一个(0,0)（或(1,0)）的邻域，使得此邻域与 E 的交集为空集，因而它们都不是 E 的外点.

例如，设平面点集 $E=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 2\}$．满足 $1<x^2+y^2<2$ 的一切点(x,y)都是 E 的内点；满足 $x^2+y^2=1$ 的一切点(x,y)都是 E 的边界点，它们都不属于 E；满足 $x^2+y^2=2$ 的一切点(x,y)也是 E 的边界点，它们都属于 E；点集 E 以及它的界边∂E 上的一切点都是 E 的聚点.

定义 5 设点集 $E\subset R_2$：

（1）如果点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集．开集的例子：$E=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\}$.

（2）如果点集的余集 E^c 为开集，则称 E 为闭集．闭集的例子：$E=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$.

（3）如果点集 E 内任何两点，都可用折线连接起来，且该折线上的点都属于 E，则称 E 为连通集.

（4）连通的开集称为区域或开区域．例如 $E=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\}$.

（5）开区域连同它的边界一起所构成的点集称为闭区域．例如 $E=\{(x,y)\mid 1\leqslant$

$x^2+y^2\leqslant 2\}$.

（6）对于平面点集 E，如果存在某一正数 r，使得 $E\subset U(O,r)$，其中 O 是坐标原点，则称 E 为有界集．集合$\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$是有界闭区域．

（7）一个集合如果不是有界集，就称这集合为无界集．集合$\{(x,y)|\ x+y>1\}$是无界开区域；集合$\{(x,y)|\ x+y\geqslant 1\}$是无界闭区域．

三、二元函数的极限

与一元函数的描述性极限概念类似，先给出描述性定义：

如果在 $P(x,y)$ 趋向 $P_0(x_0,y_0)$ 的过程中，对应的函数值 $f(x,y)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 是函数 $f(x,y)$ 当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时的极限．

定义 6　设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点．如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当 $P(x,y)\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$ 时，都有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，那么就称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记做

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \quad 或 \quad \lim_{P\to P_0} f(P)=A .$$

例 3　设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$，求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

证明：因为

$$|f(x,y)-0|=|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0| =|x^2+y^2|\cdot|\sin\frac{1}{x^2+y^2}| \leqslant x^2+y^2 ,$$

可见$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，则当

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta ,$$

即 $P(x,y)\in D\cap\mathring{U}(O,\delta)$ 时，总有

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon .$$

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

注意：

（1）二重极限存在，是指 P 以任何方式趋于 P_0 时，函数都无限接近于 A．而在计算二元函数的极限时，可以采取整体换元或极坐标换元，此时趋近方式可以保证是任何方式．

（2）如果当 P 以两种不同方式趋于 P_0 时，函数趋于不同的值，则函数的极限不存在．此结论可以用于判别极限不存在，通常选取的是 $y=kx$，若最后计算所得极限与 k 有关，则该函数的极限不存在．

（3）多元函数的极限运算法则与一元函数的情况类似．依然可以利用极限运算法则来求极限．

二元函数的极限概念可相应地推广到 n 元函数 $f(P)$ 上去.

例 4 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

解 令 $u=xy$，则当 $(x,y)\to(0,0)$ 相当于 $u\to 0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim_{u\to 0}\frac{2-\sqrt{u+4}}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{-1}{2+\sqrt{u+4}}=-\frac{1}{4}.$$

例 5 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点(0,0)有无极限？.

解 令 $y=kx$，则当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，相当于 $x\to 0$，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

当 $k=0$，即当点 $P(x,y)$ 沿 x 轴趋于点(0,0)时，极限为 0;

当 $k=1$，而当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于点(0,0)时极限为 $\dfrac{1}{2}$.

因此，函数 $f(x,y)$ 在(0,0)处无极限，否则与极限定义矛盾.

例 6 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\tan(xy)}{x}$.

解 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\tan(xy)}{x}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\tan(xy)}{xy}\cdot\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}y=1\times 2=2$.

四、多元函数的连续性

定义 7 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的聚点，且 $P_0\in D$. 如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

如果函数 $f(x,y)$ 在 D 的每一点都连续，就称函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，或者称 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数.

二元函数的连续性概念可相应地推广到 n 元函数 $f(P)$ 上去.

例 7 设 $f(x,y)=\sin x$，证明 $f(x,y)$ 是 R_2 上的连续函数.

证明: 设 $p_0(x_0,y_0)$，$\forall\varepsilon>0$，由于 $\sin x$ 在 x_0 处连续，故 $\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon.$$

以上述 δ 作 P_0 的 δ 邻域 $U(p_0,\delta)$，则当 $p(x,y)\in U(p_0,\delta)$ 时，显然

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon,$$

即 $f(x,y)=\sin x$ 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 连续. 由 p_0 的任意性知，$\sin x$ 作为 x,y 的二元函数

在 R_2 上连续.

类似的讨论可知，一元基本初等函数看成二元函数或二元以上的多元函数时，它们在各自的定义域内都是连续的. 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 不连续，则称 $p_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的间断点. 例如函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases},$$

$f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限不存在，所以点 $O(0,0)$ 是该函数的一个间断点. 又如，函数 $z=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$，定义域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 1\}$，圆周 $C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ 上的点都是 D 的聚点，而 $f(x,y)$ 在 C 上没有定义，当然 $f(x,y)$ 在 C 上各点都不连续，所以圆周 C 上各点都是该函数的间断点. 间断点可能是孤立点也可能是曲线上的点.

可以证明，多元连续函数的和、差、积仍为连续函数；连续函数的商在分母不为零处仍连续；多元连续函数的复合函数也是连续函数.

多元初等函数：与一元初等函数类似，多元初等函数是指可用一个式子所表示的多元函数，这个式子是由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而得到的.

例如 $\dfrac{x+\sin x}{1+y^2}$，$e^{x^2+y^2+z^2}$ 都是多元初等函数.

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的. 所谓定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

由多元连续函数的连续性，如果要求多元连续函数 $f(P)$ 在点 P_0 处的极限，而该点又在此函数的定义区域内，则

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0).$$

例 8 求 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{x+y}{xy}$.

解 函数 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{xy}$ 是初等函数，它的定义域为 $D=\{(x,y)|x\neq 0,y\neq 0\}$. $P_0(1,2)$ 为 D 的内点，因此

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)=f(1,2)=\frac{3}{2}.$$

一般地，求 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 时，如果 $f(P)$ 是初等函数，且 P_0 是 $f(P)$ 的定义域的内点，则 $f(P)$ 在点 P_0 处连续，于是 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$.

例 9 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

五、有界闭区域上多元连续函数的性质

和一元闭区间上的连续函数类似，闭区域上的二元连续函数也有类似的性质，下面不加证明的给出这些结果.

性质 1（最大值最小值定理） 在有界闭区域 D 上的二元连续函数，必定在 D 上有界，且能取得它的最大值和最小值.

性质 2（介值定理） 在有界闭区域 D 上的二元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

习题 7-1

1．设 $f\left(x-y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

2．求下列函数的定义域，并作出其草图.

（1）$z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$　　（2）$z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$

3．求下列极限.

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\dfrac{1-(xy)^2+e^x}{x^2+y^3}$　　（2）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$

（3）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}$　　（4）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2+y^2}}$

4．证明：极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 不存在.

5．设 $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$，求 $\lim\limits_{x\to0}[\lim\limits_{y\to0}f(x,y)]$ 和 $\lim\limits_{y\to0}[\lim\limits_{x\to0}f(x,y)]$．试问：极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 是否存在？为什么？

6．研究函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的连续性（在哪些点连续，哪些点不连续）.

7．若函数 $u=F(x,y,x)$ 满足恒等式 $F(tx,ty,tz)=t^kF(x,y,z)$ （$k>0$），则称 $F(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数．证明 $z=\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-xy$ 为二次齐次函数.

7.2 偏导数

一、偏导数的定义

以二元函数 $z=f(x,y)$ 为例，如果只有自变量 x 变化，而自变量 y 固定（即看作常量），不妨假设此时 $y=y_0$，这时它就是 x 的一元函数即 $z=f(x,y_0)=\varphi(x)$，函数对 x 的导数，就称为二元函数 z 对于 x 的偏导数，即有如下定义：

定义 1 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数有增量

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \text{或} f_x(x_0,y_0).$$

例如，式（1）可以表示为

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

类似地，函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记作 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$z_y\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $f_y(x_0,y_0)$.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数就是 x，y 的函数，它就称为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导数，记作