Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems

常微分方程与动力系统

（奥地利）盖拉德·泰休 著
金成桴 译

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

常微分方程与动力系统

（奥地利）盖拉德·泰休 著
金成桴 译

机 械 工 业 出 版 社

本书介绍常微分方程和动力系统．先从几个简单的明显可求解的方程开始，接着证明初值问题的基本结果：解的存在唯一性，可延拓性，以及关于初始条件的依赖性．进一步，考虑线性方程，费洛凯（Floquet）定理和自治线性流．

然后，在复域中讨论线性方程的费罗贝尼乌斯（Frobenius）方法，以及对包括振动理论的施图姆-刘维尔（Sturm-Liouville）型边值问题的研究．

接下来引入动力系统的概念，并对连续系统和离散系统讨论稳定性，包括稳定流形和哈特曼-格罗伯曼（Hartman-Grobman）定理等．

随后证明庞加莱-本迪克松（Poincaré-Bendixson）定理，并研究几个来自经典力学，生态学以及电路工程中的平面系统的例子．此外，还讨论了吸引子，哈密顿（Hamilton）系统，KAM 定理和周期解．

最后，介绍混沌．开始以迭代区间映射为基础，并以同宿轨道的斯梅尔-伯克霍夫（Smale-Birkhoff）定理和梅利尼科夫（Melnikov）方法结束．

本书的许多重要内容在一般的微分方程教科书中是不介绍的．它可作为数学、物理、力学的大学生，研究生和教师们的常微分方程和动力系统教科书或参考书．也可供相关人员参考使用．

图书在版编目（CIP）数据

常微分方程与动力系统/（奥地利）盖拉德·泰休（Teschl，G.）著；金成桴译．—北京：机械工业出版社，2011.4
ISBN 978-7-111-33305-0

Ⅰ.①常… Ⅱ.①盖…②金… Ⅲ.①常微分方程②动力系统（数学）Ⅳ.①O175.1②O19

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 017355 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰
版式设计：霍永明　责任校对：张莉娟
封面设计：路恩中　责任印制：杨　曦
北京京丰印刷厂印刷
2011 年 5 月第 1 版 · 第 1 次印刷
169mm×239mm · 16.25 印张 · 329 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-33305-0
定价：29.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：(010) 88361066	门户网：http://www.cmpbook.com
销售一部：(010) 68326294	教材网：http://www.cmpedu.com
销售二部：(010) 88379649	
读者购书热线：(010) 88379203	封面无防伪标均为盗版

序

本书起源于我在维也纳大学2000年夏和2000/01年冬所讲授的“常微分方程，动力系统和混沌”课程的讲义．自那以后，针对几年的教学反馈，对它进行了几次重写和修改．

本书强调用动力系统观点对常微分方程领域给出“封闭”式介绍．但是，它也包括某些古典的课题，诸如复平面中的微分方程和施图姆-刘维尔（Strum-Liouville）边值问题．

本书对读者仅要求懂微积分，复变函数与线性代数的某些基本知识，这些应该包含在通常的教科书中．另外，我也尝试说明如何利用计算机系统，如 Mathematica，以帮助研究微分方程．当然任何类似的软件都可以应用．

你可以从 Mathematica 说明书中找到我们这本书中的命令以及一些附加材料．

致谢

我要感谢我的学生，Ada Akerman，Kerstin Ammann，Jörg Arnberger，Paolo Capka，Anna Geyer，Ahmed Ghneim，Hannes Grimm-Strele，Klaus Kröncke，Alice Lakits，Johanna Michor，Andreas Németh，Simon Rößler，Robert Stadler，Florian Wisser，以及我的同事 Edward Dunne，Klemens Fellner，Daniel Lenz 和 Jim Sochacki，他们指出一些打印稿中的错误和并提出了改进的建议．

最后，没有书可完全避免错误．所以，你如果发现错误，或者有什么意见和建议（不管多么小）请让我知道．

G. Teschl

奥地利，维也纳

译 者 序

本书作者 G. Teschl 是维也纳大学数学系教授. 他个人兴趣广泛（应用泛函分析，非线性动力学，应用代数几何，线性与非线性偏微分方程等）. 这本《*常微分方程与动力系统*》是他针对高年级本科生和研究生用动力系统观点写的常微分方程教材. 其起点并不高但介绍的内容面较宽又有一定深度，是与一般常微分方程不同的教科书. 大家知道，常微分方程的发展历史大致经历了三个阶段：早期的古典理论，包括微分方程的初等积分法，初值问题与边值问题，线性方程等；中期的稳定性与定性理论，包括李雅谱诺夫（Lyapunov）稳定性理论以及庞家莱（Poincaré）与本迪克松（Bendixson）的极限环论和定性理论；现代的动力系统与混沌理论. 当然三个时期的发展也互相有穿插，尤其后两个阶段. 本书以严格的数学理论，独特的处理方式在这本大学教科书中介绍了上面三个时期的主要内容. 许多在一般常微分方程教科书中没有介绍或者介绍不够详细的内容在本书都可以看到. 例如在古典理论中的二阶线性方程求级数解的费罗贝尼乌斯（Frobenius）方法和复域中的微分方程，边值问题中的施图姆-刘维尔（Sturm-Liouville）理论，动力系统中的庞加莱—本迪克松（Poincaré-Bendixson）理论，稳定和不稳定流形的存在性定理以及哈特曼-格罗伯曼（Hartman-Grobman）定理，梅利尼科夫（Melnikov）方法等以及它们的证明. 纵观全书读者可以看到在这本篇幅有限的教科书中还包含了如平面和空间的微分方程定性理论以及离散系统和连续系统中的混沌理论的重要部分.

本书另一个重要特点是对常微分方程在许多学科中的应用介绍得比较广泛，除了通常在力学和电路工程等方面的典型应用以外，还介绍了常微分方程在生态学、哈密顿（Hamilton）系统、量子力学、相对论力学等学科中的简单应用. 对在经典力学中的应用也比一般教科书中丰富许多. 另外，本书也简单介绍了微分方程求解的计算机模拟.

由于作者力求用数学基础理论证明定理，读者不难发现书中用了不少后续数学知识，例如集合论，实复分析和一般拓扑. 这无疑给初学者带来了一定的困难，好在其中大部分都有介绍，有的虽然在前面没有介绍但在后面有说明. 有些没有说明的估计读者还没有接触过的概念我以译者注的形式作了介绍. 书中的问题有些是正文中相对比较简单的内容，有些则可能要求有一定的抽象思维能力. 书中有些内容

的叙述带有一定的启发性，有助于培养读者的独立思考能力. 本书可作为大学数学、物理等高年级学生的教科书和教师的教学参考书，部分内容也可作为研究生教材.

尽管本书还没有正式出版，鉴于它有上面的明显特色，为促进数学专业方向的基础教育工作，并承蒙获得作者许可先出版本书的中文版.

最后，感谢本书出版过程中提供帮助的人们，也感谢我妻子何燕俐对我工作的理解支持和关心.

金成桴

目　录

第3部分　混　沌

第1部分　古 典 理 论

第1章　引　　言

1.1　牛顿（Newton）方程

我们从物理学中一个例子开始．在经典力学中，质点是由空间中的点刻画的，它的位置由函数

$$x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \tag{1-1}$$

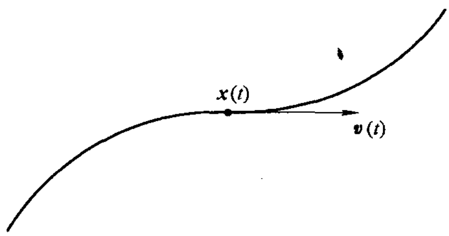

图　1-1

确定．这个函数对时间的导数便是质点的速度

$$v = \dot{x}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \tag{1-2}$$

速度的导数是加速度

$$a = \dot{v}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3. \tag{1-3}$$

在这个模型中，质点通常在外力

$$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \tag{1-4}$$

下运动，力 $F(x)$ 作用在质点 x 上．牛顿（Newton）第二定律说，在空间每一点 x，作用在质点上的力必须等于加速度乘质点的质量 m（正常数），就是说

$$\mathrm{m}\ddot{x}(t) = F(x(t)), \text{对所有的 } t \in \mathbb{R}^n. \tag{1-5}$$

函数 $x(t)$ 和它的导数之间这样的关系称为**微分方程系统**．方程（1-5）是二阶的，因为最高阶导数是二阶的．更确切地说，我们有一系列微分方程，因为对每个坐标方向都有一个方程．

在此情形下，x 称为因变量，t 称为自变量．我们也可以将 v 加入到因变量，以

增加因变量数目而考虑$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\in\mathbb{R}^6$. 其好处是，现在我们得到的是一阶系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\boldsymbol{v}(t),\\ \dot{\boldsymbol{v}}(t)&=\frac{1}{m}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t)).\end{aligned}\tag{1-6}$$

这个形式通常更方便于理论研究.

对给定的力$\boldsymbol{F}$，我们要寻求解，它是满足方程（1-5）的函数$\boldsymbol{x}(t)$（对应系统(1-6)）. 更特殊地，考虑一块石块掉到地球上的运动，地球表面附近作用在石块上的重力近似于常数且等于

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=-mg\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\tag{1-7}$$

其中g是正常数，x_3方向假设是地球表面的法线方向. 因此，我们的微分方程系统成为

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_1&=0,\\ m\ddot{x}_2&=0,\\ m\ddot{x}_3&=-mg.\end{aligned}\tag{1-8}$$

第一个方程对t可积分两次，得$x_1(t)=C_1+C_2t$，其中C_1，C_2为积分常数. 计算在$t=0$的x_1和$\dot{x}_1$的值，分别得$C_1=x_1(0)$，$C_2=v_1(0)$. 对其他两个方程作类似处理，最后，我们得到

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{v}(0)t-\frac{g}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}t^2.\tag{1-9}$$

因此，我们的质点的整个“命运”（过去和将来）由指定的初始位置$\boldsymbol{x}(0)$和初始速度$\boldsymbol{v}(0)$唯一确定.

从这个例子你也许会得到一个印象，就是，微分方程的解总可以通过直接积分求得. 但是一般这做不到. 理由是之所以我们可直接积分，是因为这里的力与$\boldsymbol{x}$无关. 如果我们将我们的模型精确化，考虑实际的万有引力

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=-\gamma mM\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3},\quad\gamma,M>0,\tag{1-10}$$

于是，我们的微分方程变成

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_1&=-\frac{\gamma mMx_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}},\\ m\ddot{x}_2&=-\frac{\gamma mMx_2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}},\\ m\ddot{x}_3&=-\frac{\gamma mMx_3}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}\tag{1-11}$$

这就不再是可明显求解了．此外，我们现在甚至还不清楚这个方程的解是否存在！（在9.5节我们再回到这个问题）.

问题1.1　考虑石块从高 h 处落下，以 r 表示石块到地面的距离．初始条件为 $r(0)=h$，$\dot{r}(0)=0$. 运动方程为

$$\ddot{r}=-\frac{\gamma M}{(R+r)^2}\quad（精确模型）,$$

相应地，

$$\ddot{r}=-g\quad（近似模型）,$$

其中 $g=\gamma M/R^2$，R 和 M 分别是地球半径和质量．

（1）将这两个方程化为一阶系统．

（2）计算近似系统对应于给定初始条件的解．计算石块落到地面的时间（$r=0$）.

（3）假设精确方程对应于给定的初始条件也有唯一解．这时石块落到地面的时间与近似模型比较你能够说些什么?（提示：你不用计算精确方程的解！只要考虑力的最大值和最小值）.

（4）利用高中物理知识，计算当 $h=10\text{m}$ 时的这些数值．

问题1.2　再考虑上一个问题的精确模型，并将它写为

$$\ddot{r}=-\frac{\gamma M\varepsilon^2}{(1+\varepsilon r)^2},\qquad \varepsilon=\frac{1}{R}.$$

可以证明满足上面初始条件的解 $r(t)=r(t,\varepsilon)$ 是 C^∞（关于 t 和 ε）的．求证

$$r(t)=h-g\left(1-2\frac{h}{R}\right)\frac{t^2}{2}+O\left(\frac{1}{R^4}\right),\quad g=\frac{\gamma M}{R^2}.$$

（提示：将 $r(t,\varepsilon)=r_0(t)+r_1(t)\varepsilon+r_2(t)\varepsilon^2+r_3(t)\varepsilon^3+O(\varepsilon^4)$ 代入到微分方程且合并 ε 的各次项．然后解对应于 $r_0(t)$，$r_1(t)$，…的微分方程，并注意到初始条件 $r(0,\varepsilon)=h$，$\dot{r}(0,\varepsilon)=0$）.

1.2　微分方程的分类

设 $U\subseteq\mathbb{R}^m$，$V\subseteq\mathbb{R}^n$ 和 $k\in\mathbb{N}_0$，以及 $C^k(U,V)$ 表示具有直到 k 阶连续导数的函数 $U\to V$ 的集合．此外，我们记 $C(U,V)=C^0(U,V)$ 和 $C^k(U)=C^k(U,\mathbb{R})$.

一个古典常微分方程（ODE）是未知函数 $x\in C^k(J)$，$J\subseteq\mathbb{R}$ 的关系式

$$F(t,x,x^{(1)},\cdots,x^{(k)})=0.\tag{1-12}$$

其中 $F\in C(U)$，U 是 $\mathbb{R}^{k+2}$ 的开子集，

$$x^{(k)}(t)=\frac{\mathrm{d}^k x(t)}{\mathrm{d}t^k},\quad k\in\mathbb{N}_0,\tag{1-13}$$

是 x 的“通常”导数．我们经常称 t 为**自变量**，x 为**因变量**．出现在 F 中最高阶导

数的阶数称为微分方程的阶. ODE (1-12) 的**解**是满足

$$F(t,\phi(t),\phi^{(1)}(t),\cdots,\phi^{(k)}(t))=0,\quad \text{对所有 } t\in I \tag{1-14}$$

的函数 $\phi\in C^k(I)$，其中 $I\subseteq J$ 是区间. 这意味着，对所有 $t\in I$，有 $(t,\phi(t),\phi^{(1)}(t),\cdots,\phi^{(k)}(t))\in U$.

遗憾的是，关于上面形式 (1-12) 的一般微分方程我们知道的并不多. 因此，假设可以从 F 中解出最高阶导数，而得到下面形式的微分方程

$$x^{(k)}=f(t,x,x^{(1)},\cdots,x^{(k-1)}). \tag{1-15}$$

如果在某个点 $(t,y)\in U$ 关于最高阶导数的偏导数 $\frac{\partial F}{\partial y_k}(t,y)\neq 0$，由隐函数存在定理我们至少可以局部地在这个点的邻域内这样做. 这是我们从现在起将考虑的微分方程类型.

从上一节我们已经看到，仅考虑实数值函数情形还不够，还要允许有情形 $\boldsymbol{x}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$. 这导致考虑**常微分方程系统**

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= f_1(t,x,x^{(1)},\cdots,x^{(k-1)}),\\ &\vdots\\ x_n^{(k)} &= f_n(t,x,x^{(1)},\cdots,x^{(k-1)}). \end{aligned} \tag{1-16}$$

一个系统称为**线性系统**，如果它有形式

$$x_i^{(k)}=g_i(t)+\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}f_{i,j,l}(t)x_l^{(j)}. \tag{1-17}$$

若 $g_i(t)=0$，就称它为**齐次系统**.

此外，任何一个系统总可以通过改变新因变量集合 $\boldsymbol{y}=(x,x^{(1)},\cdots,x^{(k-1)})$ 而化为**一阶系统**

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2,\\ &\vdots\\ \dot{y}_{k-1} &= y_k,\\ \dot{y}_k &= f(t,y). \end{aligned} \tag{1-18}$$

我们甚至可以将 t 加入到因变量 $z=(t,y)$ 中去，使得系统右端与 t 无关:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= 1,\\ \dot{z}_2 &= z_3,\\ &\vdots\\ \dot{z}_k &= z_{k+1},\\ \dot{z}_{k+1} &= f(z). \end{aligned} \tag{1-19}$$

这样的系统，即 f 不依赖于 t 的系统称为**自治系统**. 特别地，我们将经常只需考虑一阶自治系统.

当然，我们也可考虑情形 $t\in\mathbb{R}^m$，即意味着要处理偏导数情形. 这样我们就进

入偏微分方程（PDE）领域．这个情形更为复杂，它不是本书的内容．

最后我们指出，对因变量我们可以允许有复数值．用实因变量或复因变量其结果没有什么区别．不过，我们叙述的大部分结果仅针对实数情形而将一些复因变量情况下明显的改变留给读者．另一方面，自变量是复数情形就有明显的变化，我们将在第4章讨论这个问题．

问题 1.3　对下面的方程进行分类．它们是否为线性，自治？阶数是什么？

(1) $y'(x)+y(x)=0$,

(2) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}u(t)=\sin(u(t))$,

(3) $y(t)^2+2y(t)=0$,

(4) $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)=0$,

(5) $\dot{x}=-y,\dot{y}=x$.

问题 1.4　下面的微分方程哪个是线性方程？

(1) $y'(x)=\sin(x)y+\cos(y)$,

(2) $y'(x)=\sin(y)x+\cos(x)$,

(3) $y'(x)=\sin(x)y+\cos(x)$.

问题 1.5　寻找二阶线性微分方程的最一般形式．

问题 1.6　将下面的微分方程化为一阶系统．

(1) $\ddot{x}+t\sin(\dot{x})=x$,

(2) $\ddot{x}=-y,\ddot{y}=x$.

最后这个方程是线性方程．对应的一阶系统也是线性的吗？这种情况是不是永远成立？

问题 1.7　将下面的微分方程化为一阶自治系统．

(1) $\ddot{x}+t\sin(\dot{x})=x$,

(2) $\ddot{x}=-\cos(t)x$.

最后一个方程是线性方程．对应的自治系统也是线性的吗？

问题 1.8　设 $x^{(k)}=f(x,x^{(1)},\cdots,x^{(k-1)})$ 是自治方程（或者系统）．求证如果 $\phi(t)$ 是解，则 $\phi(t-t_0)$ 也是解．

1.3　一阶自治方程

考虑一阶自治方程的最简单（非平凡）情形，并试求在时间 $t=0$ 通过某点 x_0 的解：

$$\dot{x}=f(x),\quad x(0)=x_0,\quad f\in C(\mathbb{R}).\tag{1-20}$$

当然，我们也可以求在时间 t_0 从 x_0 开始的解．但是一旦我们有满足 $\phi(0)=x_0$ 的解

$\phi(t)$，则满足 $\psi(t_0)=x_0$ 的解 $\psi(t)$ 可由简单的平移 $\psi(t)=\phi(t-t_0)$ 得到（事实上，对任何自治方程这个性质也成立，比较问题1.8）.

这个方程可用小技巧求解．如果 $f(x_0)\neq 0$，两端除 $f(x)$ 并对 t 积分得

$$\int_0^t \frac{\dot{x}(s)\,\mathrm{d}s}{f(x(s))} = t. \tag{1-21}$$

记 $F(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}y}{f(y)}$，我们看到方程（1-20）的每一个解 $x(t)$ 必须满足 $F(x(t))=t$. 由于 $F(x)$ 在 x_0 附近严格单调，故可求逆，从而得到初值问题的唯一解

$$\phi(t) = F^{-1}(t), \quad \phi(0) = F^{-1}(0) = x_0, \tag{1-22}$$

其中 $F^{-1}(t)$ 是 $F(t)$ 的逆映射．

现在我们来考虑解 ϕ 的最大存在性区间．如果 $f(x_0)>0$（$f(x_0)<0$ 情形类似），由连续性 f 在围绕 x_0 的某个区间（x_1，x_2）内保持为正．定义

$$T_+ = \lim_{x\to x_2^-} F(x) \in (0,\infty], \quad \text{相应地} \quad T_- = \lim_{x\to x_1^+} F(x) \in [-\infty, 0), \tag{1-23}$$

于是 $\phi\in C^1(T_-,T_+)$ 且

$$\lim_{t\to T_+^-}\phi(t) = x_2, \quad \text{相应地} \quad \lim_{t\to T_-^+}\phi(t) = x_1. \tag{1-24}$$

特别地，ϕ 对一切 $t>0$ 存在（相应的 $t<0$），当且仅当

$$T_+ = \int_{x_0}^{x_2}\frac{\mathrm{d}y}{f(y)} = +\infty, \tag{1-25}$$

即 $1/f(x)$ 在 x_2 附近不可积．类似地，当且仅当 $1/f(x)$ 在 x_1 附近不可积时 ϕ 对一切 $t<0$ 存在．

如果 $T_+<\infty$，存在两个可能性：$x_2=\infty$ 或者 $x_2<\infty$．在第一个情形，解 ϕ 发散到 $+\infty$，这时没有办法可将解连续延拓到 T_+ 以外．在第二个情形，解 ϕ 在有限时间 T_+ 到达点 x_2，这时我们可延拓如下：如果 $f(x_2)>0$，则 x_2 不是最大，我们可以增加它以提供所要求的延拓．否则，如果 $f(x_2)=0$，可令 $\phi(t)=x_2$ 对 $t\geqslant T_+$ 延拓 ϕ. 但是，如在下面例子看到的，在后一情形这可能不是唯一的延拓．显然，对 $t<0$ 可应用类似的论述．

现在我们来看几个例子．

例 如果 $f(x)=x$，$x_0>0$，则有 $(x_1,x_2)=(0,\infty)$ 以及

$$F(x) = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right). \tag{1-26}$$

因此，$T_\pm=\pm\infty$ 以及

$$\phi(t) = x_0\mathrm{e}^t. \tag{1-27}$$

从而，解对所有的 $t\in\mathbb{R}$ “大范围” 有定义．注意，事实上这是对所有 $x_0\in\mathbb{R}$ 的解．

例 设$f(x)=x^2,x_0>0$. 我们有$(x_1,x_2)=(0,\infty)$，且

$$F(x)=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}. \tag{1-28}$$

因此$T_+=1/x_0$，$T_-=-\infty$且

$$\phi(t)=\frac{x_0}{1-x_0t}. \tag{1-29}$$

特别地，解不再对所有的$t\in\mathbb{R}$都有定义. 此外，由于$\lim\limits_{t\to1/x_0^-}\phi(t)=\infty$，我们绝不可能将这个解延拓到$t\geqslant T_+$.

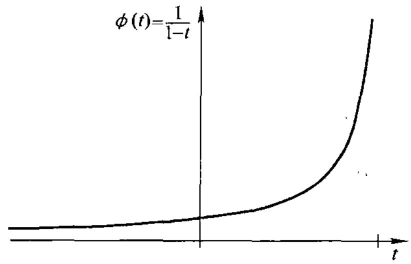

图 1-2

现在看$f(x)$的零点有什么特点? 显然，如果$f(x_0)=0$，则存在满足初始条件$x(0)=x_0$的平凡解

$$\phi(t)=x_0. \tag{1-30}$$

但是不是就这一个解呢? 如果我们有

$$\left|\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}y}{f(y)}\right|<\infty, \tag{1-31}$$

则存在另外满足$\varphi(0)=x_0$的解

$$\varphi(t)=F^{-1}(t),\quad F(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}y}{f(y)}, \tag{1-32}$$

它是不同于$\phi(t)$的!

例 考虑$f(x)=\sqrt{|x|}$，则$(x_1,x_2)=(0,\infty)$，

$$F(x)=2(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}). \tag{1-33}$$

以及

$$\varphi(t)=\left(\sqrt{x_0}+\frac{t}{2}\right)^2,\quad -2\sqrt{x_0}<t<\infty. \tag{1-34}$$

所以，对$x_0=0$存在几个解，它们可由加入平凡解$\phi(t)=0$以及上面的解得到:

$$\tilde{\phi}(t)=\begin{cases}-\dfrac{(t-t_0)^2}{4}, & t\leqslant t_0,\\ 0, & t_0\leqslant t\leqslant t_1,\\ \dfrac{(t-t_1)^2}{4}, & t_1\geqslant t.\end{cases} \tag{1-35}$$

对$t_0=0$和$t_1=1$的解$\tilde{\phi}$的图像如下:

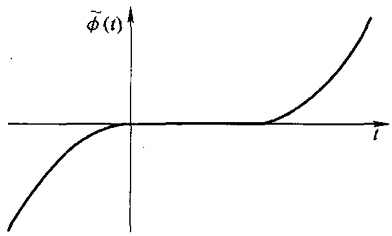

图　1-3

作为上面例子的结论，我们有：

- 即使对性质很好的 f，解可能仅局部存在．
- 解可以不唯一．不过要注意，$f(x)=\sqrt{|x|}$ 在点 $x_0=0$ 不可微是问题的原因．

注意用相同的方法可求解所谓变量分离方程

$$\dot{x}=f(x)g(t). \tag{1-36}$$

（见问题 1.11）．

问题 1.9　求解下面微分方程：

(1) $\dot{x}=x^3$,

(2) $\dot{x}=x(1-x)$,

(3) $\dot{x}=x(1-x)-c$.

问题 1.10　如果 $f\in C^1(\mathbb{R})$，证明（1-20）的解唯一．

问题 1.11　（变量分离方程）．求证如果 $f(x_0)\neq 0$，则方程（f，$g\in C^1$）

$$\dot{x}=f(x)g(t),\quad x(t_0)=x_0$$

局部地有唯一解．给出隐式解．

问题 1.12　求解下列微分方程

(1) $\dot{x}=\sin(t)x$,

(2) $\dot{x}=g(t)\tan(x)$,

(3) $\dot{x}=\sin(t)e^x$.

画出解．什么初始条件（如果有）的解有界？

问题 1.13　研究微分方程

$$\dot{x}=\begin{cases}-t\sqrt{|x|}, & x\geqslant 0,\\ t\sqrt{|x|}, & x\leqslant 0\end{cases}$$

解的唯一性．证明对任何初始条件 $x(t_0)=x_0$ 存在局部唯一解．证明每个解可延拓为大范围解．但是，证明大范围解不唯一！（提示：注意，如果 $x(t)$ 是解则 $x(-t)$ 也是解，因此只需考虑 $x_0\geqslant 0$ 和 $t\geqslant 0$ 的解就够了．此外，$t_0=0$ 的解覆盖整个 (t,x) 平面，因此只需考虑 $t_0=0$.）

问题 1.14（线性齐次方程）　求证方程 $\dot{x}=a(t)x$ 的解为

$$\phi(t) = x_0\exp\left(\int_{t_0}^{t}a(s)\,\mathrm{d}s\right),$$

其中 $a\in C(\mathbb{R})$.

问题 1.15　电容器的充电过程由微分方程

$$R\dot{Q}+\frac{1}{C}Q(t)=V_0$$

描述，其中 $Q(t)$ 是电容器的电荷，C 是它的电容，V_0 是电池电压，R 是导线的电阻.

假设在 $t=0$ 电容没有充电，计算 $Q(t)$. 当 $t\to\infty$ 时你得到什么充电结果?

问题 1.16（细菌的增长）　某个细菌种群按照规律

$$\dot{N}(t)=\kappa N(t),\quad N(0)=N_0$$

增长，其中 $N(t)$ 是细菌在时刻 t 时的数量，$\kappa>0$ 是增长率，N_0 是初始数量. 如果对有限空间最多存在 $N_{\max}$ 细菌，则细菌增长必须按照

$$\dot{N}(t)=\kappa\left(1-\frac{N(t)}{N_{\max}}\right)N(t),\quad N(0)=N_0$$

进行修改.

假设 $0<N_0<N_{\max}$，求解这两个方程并讨论这些解. 当 $t\to\infty$ 时 $N(t)$ 有什么样的性态?

问题 1.17（最佳收获）　取与上面相同的问题. 但现在假设你以某个收获率 $H>0$ 获取细菌. 于是这个情况由

$$\dot{N}(t)=\kappa\left(1-\frac{N(t)}{N_{\max}}\right)N(t)-H,\quad N(0)=N_0$$

模拟.

用

$$x(\tau)=\frac{N(t)}{N_{\max}},\quad \tau=\kappa t$$

尺度化，证明上面方程变为 $\dot{x}(\tau)=(1-x(\tau))x(\tau)-h$, $h=\dfrac{H}{\kappa N_{\max}}$.

直观上，函数 $f(x,h)=(1-x)x-h$ 在区域 $(x,h)\in U=(0,1)\times(0,\infty)$ 内既有正值也有负值. 对给定的 $(x_0,h)\in U$，当 $t\to\infty$ 时解分别有什么样的性态? 它们与上面的区域是如何联系的? 你估计的最大获取量是什么?

问题 1.18（伞兵跳伞）　考虑有空气阻力的自由落体，它由

$$\ddot{x}=-\eta\dot{x}-g,\quad \eta>0$$

模拟. 求解这个方程（提示：引入速度 $v=\dot{x}$ 作为新因变量）. 是否存在并能够达到极限速度? 如果是，求此极限速度. 考虑伞兵跳伞情形. 假设降落伞在某个时刻 $t_0>0$ 打开. 通过假设对 $0<t<t_0$，有 $\eta=\eta_1$，对 $t>t_0$ 有 $\eta=\eta_2>\eta_1$，模拟这个情况