Б. П. 吉米多维奇

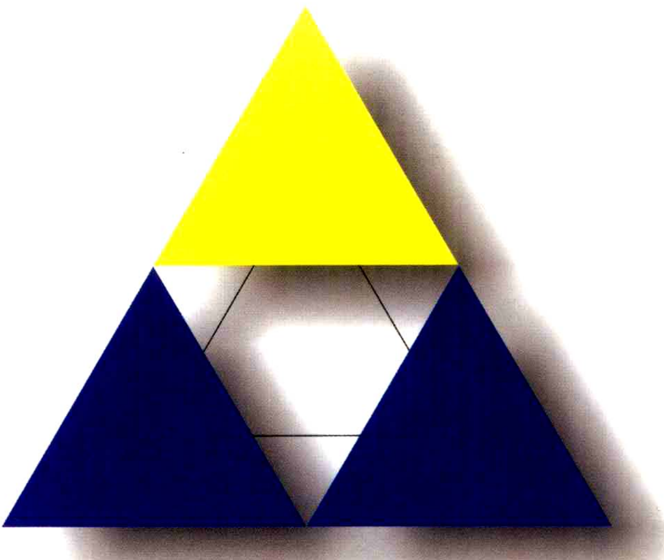
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析
习题集题解

（一）

费定晖　周学圣　编演

郭大钧　邵品琮　主审



山东科学技术出版社

www.lkj.com.cn

Б. П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

(一)

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解 (1)/费定晖编. —2版. —济南:山东科学技术出版社,1999.9(2003.1重印)
ISBN 7-5331-0099-9

Ⅰ.Б… Ⅱ.费… Ⅲ.数学分析—高等学校—解题 Ⅳ.017—44

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第43960号

Б.П.吉米多维奇
数学分析习题集题解
(一)

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

*

山东科学技术出版社出版
(济南市玉函路16号 邮编250002)
山东科学技术出版社发行
(济南市玉函路16号 电话2064651)
山东省高唐装璜印刷厂印制

*

787mm×1092mm 32开本 15.125印张 331千字
2003年1月第2版第15次印刷
印数:251601—256600

ISBN 7-5331-0099-9
O·5 定价:13.30元

出版说明

吉米多维奇(Б. П. Д ЕМИД ОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本，自50年代初在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来，对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限，单变量函数的微分学，不定积分，定积分，级数，多变量函数的微分学，带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等，概括了数学分析的全部主题。当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此，我们特约作者，将全书4462题的所有解答汇辑成书，共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书，同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知，原习题集，题多难度大，其中不少习题如果认真习作的话，既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念，又可以有效地提高我们的运算能力，特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要轻易查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出

版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有楼世拓、姚琦、陈兆宽同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

目　　录

第一章　分析引论

§ 1. 实　数

1° 数学归纳法　为了证明某定理对任意的自然数 n 为真，只须证明下面两点就够了：(1) 这定理对 $n = 1$ 为真，(2) 设这定理对任何的一个自然数 n 为真，则它对其次的一自然数 $n + 1$ 也为真.

2° 分割　假设分有理数为 A 和 B 两类，使其满足于下列条件：(1) 两类均非空集，(2) 每一个有理数必属于一类，且仅属于一类，(3) 属于 A 类(下类)的任一数小于属于 B 类(上类)的任何数，这样的一个分类法称为分割.(a) 若或是下类 A 有最大的数，或是上类 B 有最小的数，则分割 A/B 确定一个有理数.(б) 若 A 类无最大数，而 B 类亦无最小数，则分割 A/B 确定一个无理数.有理数和无理数统称为实数*.

3° 绝对值　假若 x 为实数，则用下列条件所确定的非负数 $|x|$，称为 x 的绝对值：

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{若 } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y，有以下的不等式成立：

$$|x| - |y| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

4° 上确界和下确界　设 $X = \{x\}$ 为实数的有界集合.若：

---

* 以后若没有相反的附带说明，数这个字我们将理解为实数.

(1) 每一个 $x \in X$* 满足不等式

$$x \geqslant m;$$

(2) 对于任何的 $\varepsilon > 0$,存在有 $x' \in X$,使

$$x' < m + \varepsilon,$$

则数 $m = \inf\{x\}$ 称为集合 X 的下确界.

同样,若:

(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式

$$x \leqslant M,$$

(2) 对于任何的 $\varepsilon > 0$,存在有 $x'' \in X$,使

$$x'' > M - \varepsilon,$$

则数 $M = \sup\{x\}$ 称为集合 X 的上确界.

若集合 X 下方无界,则通常说

$$\inf\{x\} = -\infty;$$

若集合 X 上方无界,则认为

$$\sup\{x\} = +\infty.$$

5° 绝对误差和相对误差　设 $a(a \neq 0)$ 是被测的量的准确数值,而 x 是这个量的近似值,则

$$\Delta = |x - a|$$

称为绝对误差,而

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测的量的相对误差.

假若 x 的绝对误差不超过它的第 n 个有效数字的单位的一半,则说 x 有 n 位准确的数字.

利用数学归纳法求证下列等式对任何自然数 n 皆成立:

1. $$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

---

* 符号 $x \in X$ 表示 x 属于集合 X.

证　当 $n = 1$ 时，等式成立.

设对于 $n = k$（自然数）时，等式成立，即

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

则对于 $n = k + 1$ 时，有

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2},$$

即对于 $n = k + 1$ 时等式也成立.

于是，由数学归纳法知，对于任何自然数 n，有

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2.　$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

证　当 $n = 1$ 时，等式成立.

设 $n = k$ 时，等式成立，即

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

则对于 $n = k + 1$ 时，有

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6},$$

即对于 $n = k + 1$，时等式也成立.

于是，对于任何自然数 n，有

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2.$

证 当 $n=1$ 时，等式成立.

设 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1^3+2^3+\cdots+k^3=(1+2+\cdots+k)^2,$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}
&1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3\\
&=(1+2+\cdots+k)^2+(k+1)^3\\
&=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3\\
&=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}\\
&=\left\{\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right\}^2\\
&=[1+2+\cdots+(k+1)]^2,
\end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时，等式也成立.

于是，对于任何自然数 n，有

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2.$$

4. $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1.$

证 当 $n=1$ 时，等式成立.

设 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1,$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}
&1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k\\
&=(2^k-1)+2^k=2^{k+1}-1,
\end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时，等式也成立.

于是，对于任何自然数 n，有

$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1.$$

5. 设 $a^{[n]} = a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 及 $a^{[0]} = 1$,求证

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]},$$

其中 C_n^m 是由 n 个元素中选取 m 个的组合数,由此推出牛顿的二项式公式.

证 当 $n=1$ 时,由于

$$[a+b]^{[1]} = a+b$$

及

$$\sum_{m=0}^{1} C_1^m a^{[1-m]} b^{[m]} = a+b,$$

所以等式成立.

设 $n=k$ 时,等式成立,即

$$(a+b)^{[k]} = \sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]}, \tag{1}$$

则对于 $n=k+1$ 时,有

$$(a+b)^{[k+1]} = (a+b)^{[k]} \cdot (a+b-kh). \tag{2}$$

将(1)式代入(2)式得

$$\begin{aligned}
(a+b)^{[k+1]} &= (a+b-kh) \cdot \sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]} \\
&= (a+b-kh)\{C_k^0 a^{[k]} b^{[0]} + C_k^1 a^{[k-1]} b^{[1]} \\
&\quad + \cdots + C_k^k a^{[0]} b^{[k]}\} \\
&= \{(a-kh)+b\} C_k^0 a^{[k]} b^{[0]} \\
&\quad + \{[a-(k-1)h]+(b-h)\} C_k^1 a^{[k-1]} b^{[1]} \\
&\quad + \cdots + \{a+(b-kh)\} C_k^k a^{[0]} b^{[k]} \\
&= C_k^0 a^{[k+1]} b^{[0]} + C_k^0 a^{[k]} b^{[1]} + C_k^1 a^{[k]} b^{[1]} \\
&\quad + C_k^1 a^{[k-1]} b^{[2]} + \cdots + C_k^k a^{[1]} b^{[k]} \\
&\quad + C_k^k a^{[0]} b^{[k+1]}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C_{k+1}^0 a^{(k+1)} b^{(0)} + (C_k^0 + C_k^1) a^{(k)} b^{(1)} \\
&\quad + \cdots + (C_k^{k-1} + C_k^k) a^{(1)} b^{(k)} + C_{k+1}^{k+1} a^{(0)} b^{(k+1)} \\
&= C_{k+1}^0 a^{(k+1)} b^{(0)} + (C_{k+1}^1 a^{(k)} b^{(1)} \\
&\quad + \cdots + (C_{k+1}^k a^{(1)} b^{(k)} + C_{k+1}^{k+1} a^{(0)} b^{(k+1)} \\
&= \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{(k+1-m)} b^{(m)},
\end{aligned}
$$

故由 $(a+b)^{(k)} = \sum\limits_{m=0}^{k} C_k^m a^{(k-m)} b^{(m)}$ 可推得下式成立：

$$(a+b)^{(k+1)} = \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{(k+1-m)} b^{(m)},$$

即对于 $n = k+1$ 时，等式也成立.

于是，对于任何自然数 n，有

$$(a+b)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{(n-m)} b^{(m)}. \tag{3}$$

在式子

$$a^{(n)} = a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$$

中，令 $h = 0$，即得

$$a^{(n)} = a^n. \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式，得牛顿二项式公式

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m.$$

6. 证明贝努里不等式

$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

式中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数.

证 当 $n = 1$ 时，此式取等号.

设 $n = k$ 时，不等式成立，即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

则对于 $n=k+1$ 时，由于 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 大于 -1，所以 $1+x_i>0$. 因而有

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})\\ &\quad\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})\\ &\quad=(1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})\\ &\qquad+(x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}).\end{aligned}$$

由于 $x_ix_j\geqslant 0$，所以

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1})\\ &\qquad\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1},\end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时，不等式也成立，

于是，对于任何自然数 n，有

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\\ &\quad\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.\end{aligned}$$

7. 证明若 $x>-1$，则不等式

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx\quad(n>1)$$

为真，且仅当 $x=0$ 时，等号成立.

证 只要在 6 题的贝努里不等式中，设

$$x_i=x\quad(i=1,2\cdots,n),$$

即得证

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx,$$

从 6 题的证明过程中看出，仅当 $x=0$ 时，上式才取等号.

8. 证明不等式

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad 当 n > 1.$$

证 当 $n=2$，因为 $\left(\frac{2+1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2 = 2!$，故不等式成立.

设 $n=k$ 时，不等式成立，则

$$k! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k,$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$(k+1)! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k (k+1) = 2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

由于

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > 2 (k=1,2,\cdots),$$

从而有

$$(k+1)! < \left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1},$$

即对于 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

于是，对于任何自然数 n，有

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

9. 证明不等式

$$2!\cdot 4!\cdots(2n)! > [(n+1)!]^n \quad 当 n > 1.$$

证 当 $n=2$ 时，因为 $2!\cdot 4! = 48$. 及 $[(2+1)!]^2 = 36$，所以，$2!\cdot 4! > [(2+1)!]^2$，故不等式成立.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$2!\cdot 4!\cdots(2k)! > [(k+1)!]^k,$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$2!\cdot 4!\cdots(2k+2)! > [(k+1)!]k(2k+2)!$$

$$= [(k+1)!]^{k+1}(k+2)(k+3)\cdots(2k+2)$$
$$> [(k+1)!]^{k+1}(k+2)^{k+1} = [(k+2)!]^{k+1},$$

即对于 $n = k+1$ 时，不等式也成立. 于是，据归纳法原理，本题证毕.

10. 证明不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证 当 $n=1$ 时，因为 $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$，不等式显然成立.

设 $n = k$ 时，不等式成立，即

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

对于 $n = k+1$ 而言，由于

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}$$
$$= \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2},$$

故只要证

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即证 $(2k+1)(2k+3) < (2k+2)^2$，

而上述不等式由于

$$4k^2 + 8k + 3 < 4k^2 + 8k + 4,$$

因而是成立的. 于是，最后得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即对于 $n = k+1$ 时，不等式也成立. 由归纳法证毕.

11. 设 c 为正整数，而不为整数的平方，且 A/B 为确定实数 $\sqrt{c}$ 的分割，其中 B 类包含所有合于 $b^2>c$ 的正有理数 b，而 A 类包含所有其余的有理数. 求证在 A 类中无最大数，而在 B 类中也无最小数.

证 设 $a\in A$. 若 $a\leqslant 0$，则显然存在 $a'>a(a'>0)$ 且 $a'\in A$. 故可设 $a>0$，于是 $a^2\leqslant c$. 但不可能有 $a^2=c$. 因若 $a^2=c$，设 $a=\frac{p}{q}$，p 与 q 为互质的正整数，则 $\frac{p^2}{q^2}=c$. 由于 c 是正整数，而 p^2 与 q^2 也是互质的，故必 $q=1$，从而 $c=p^2$，此与假定矛盾，故必 $a^2<c$. 下面我们证明，存在正整数 n，使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<c,$$

于是 $a+\frac{1}{n}$ 也属于 A.

上述不等式相当于：

$$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<c,\quad \frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<c-a^2,$$

若 n 满足不等式

$$\frac{2a+1}{n}<c-a^2,$$

则上面的第二个不等式也自然能满足了.

为此，只要取

$$n>\frac{2a+1}{c-a^2},$$

而这是恒为可能的. 因此，不论 a 为 A 类内的怎样的数，在 A 类内总能找到大于它的数，故 A 类中无最大数.

同法可证 B 类中也无最小数.

实质上，此处分割 A/B 确定了一个无理数 $\sqrt{c}$.

12. 确定数 $\sqrt[3]{2}$ 的分割 A/B 用下面的方法来作成：A 类包含所有的有理数 a，而 $a^3<2$；B 类包含所有其余的有理数. 证明在 A 类中无最大数，而在 B 类中也无最小数.

证 设 $a \in A$. 即 $a^3<2$. 下证必可取正整数 n，使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^3<2.$$

事实上，上式相当于 $\frac{3a^2}{n}+\frac{3a}{n^2}+\frac{1}{n^3}<2-a^3$. 若 $a\leqslant 0$，取 $n=1$ 即可. 若 $a>0$，注意到 $n\geqslant 1$，即知若取 n 充分大，使 $n>\frac{3a^2+3a+1}{2-a^3}$，则上列各式均成立. 从而 $a+\frac{1}{n}\in A$. 故 A 中无最大数.

下设 $b\in B$，则 $b^3\geqslant 2$. 下证不可能有 $b^3=2$. 事实上，若 $b^3=2$，设 $b=\frac{p}{q}$，p 与 q 为互质的正整数，则 $\frac{p^3}{q^3}=2$，$p^3=2q^3$，从而 p^3 为偶数，因此 p 必为偶数：$p=2r$，r 为正整数. 由于 q 与 p 是互质的，故 q 必为奇数，从而 q^3 也为奇数. 但 $q^3=4r^3$，故 q^3 又必是偶数，因此矛盾. 由此可知必有 $b^3>2$. 仿前面之证，可取正整数 n，使 $\left(b-\frac{1}{n}\right)^3>2$，从而 $b-\frac{1}{n}\in B$. 由此可知 B 类中无最小数. 实质上，此处分割 A/B 确定了一个无理数 $\sqrt[3]{2}$.

13. 作出适当的分割，然后证明等式：

(a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$；

(б) $\sqrt{2}\ \sqrt{3}=\sqrt{6}$.

证 (a) 作确定 $\sqrt{2}$ 的分割 A/B：一切有理数 $a\leqslant 0$ 以及满足 $a^2<2$ 的正有理数 a 都归于 A 类，一切满足 $b^2>2$ 的