高等学校数学基础课程

数学分析选讲

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析选讲/王家正,乔宗敏主编.—合肥:
安徽大学出版社,2010.8
ISBN 978-7-81110-827-9

Ⅰ.①数… Ⅱ.①王… ②乔… Ⅲ.①数学分析—高等学校—
教学参考资料 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 164821 号

数学分析选讲 **王家正 乔宗敏 主编**

出版发行: 北京师范大学出版集团
安 徽 大 学 出 版 社
(安徽省合肥市肥西路 3 号 邮编 230039)
www.bnupg.com.cn
www.ahupress.com.cn
印　　刷: 合肥创新印务有限公司
经　　销: 全国新华书店
开　　本: 169mm×228mm
印　　张: 17.25
字　　数: 300 千字
版　　次: 2010 年 9 月第 1 版
印　　次: 2010 年 9 月第 1 次印刷
定　　价: 29.00 元
ISBN 978-7-81110-827-9

责任编辑: 赵小文　**装帧设计:** 朗　意　**责任印制:** 陈　如　韩　琳

前 言

《数学分析》是高等学校数学专业最为重要的基础课，是数学类专业硕士研究生入学考试的必考课程. 学好《数学分析》，是数学专业学习过程中的起点，对以后的进一步深造和发展有着决定性的作用.《数学分析》在所有数学本科课程中内容是最丰富的，体系是最庞大的，仅通过一个教程就想尽得其精华，往往是难以实现的. 因此，学完这门课的很多学生，特别是那些准备报考硕士研究生的，都还需要进行一次乃至数次的再学习，这不仅是为了温故而知新，更是为了在理解和应用两方面不断有质的提高. 自然，在这样的过程中，除了对原有教材进行充分挖掘外，还需要从各种合适的参考书中汲取营养.

本书编者长期从事《数学分析》的教学工作，同时为高年级学生开设《数学分析选讲》这门选修课，对学生在学习过程中所存在的问题比较了解，积累了较多的经验和素材. 在此基础上，编写了这本《数学分析选讲》，本书既可作为开设数学分析选修课的教材，也可为报考研究生的学生提供复习指导，同时也可作为教师的教学参考书.

本书系统地总结了《数学分析》的基本知识、基本理论、基本方法和解题技巧，收集了大量的具有代表性的题目(其中大部分题目是来自于近几年一些高校的研究生入学试题)，由浅入深地介绍了《数学分析》的解题思路和解题方法，在解题过程中启发读者进而打开思路并掌握技巧，使学生能够更好地融汇知识、理解概念和掌握方法，以提高学生分析问题和解决问题的能力.

本书包括：极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、级数、多元

函数微分学、含参量积分、多元函数积分学和反常积分共 8 章，各章节的内容结构分为基本知识、基本方法与技巧、例题解析和练习题四部分. 书中的练习题都附有详细的解答或提示.

本书的第 1、2 章由王家正编写，第 3、7 章由丁一鸣编写，第 4、5 章由乔宗敏编写，第 6、8 章由金永容编写，全书由王家正统稿. 本书在编写过程中，得到了合肥师范学院教务处的大力支持，得到了省级质量工程建设项目的支持，安徽大学出版社的编辑也为该书的出版付出了辛勤的劳动，在此一并致以诚挚的谢意.

限于编者的水平和能力，书中不当和错误之处在所难免，恳请读者批评、指正.

编　者

2010.8.15

目　录

第 1 章

极限与连续

§1.1　数列极限

一、基本知识

1. 数列极限的定义

定义 1　设$\{a_n\}$为数列，a为定数. 若对任给的正数ε，总存在正整数N，使得当$n>N$时有$|a_n-a|<\varepsilon$，则称数列$\{a_n\}$收敛于a，定数a称为数列$\{a_n\}$的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 若数列$\{a_n\}$没有极限，则称$\{a_n\}$不收敛(或发散).

定义 1′　任给$\varepsilon>0$，若在$U(a,\varepsilon)$之外数列$\{a_n\}$中的项至多只有有限个，则称数列$\{a_n\}$收敛于极限a.

定义 2　$\exists\varepsilon_0>0,\forall N\in\mathbf{N}^+,\exists n_0>N$，使得$|a_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0$，则称$\{a_n\}$不收敛于$a$.

2. 无穷小数列

若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则称$\{a_n\}$为无穷小数列.

3. 数列的子列

设$\{a_n\}$为数列，$\{n_k\}$为正整数集$\mathbf{N}^+$的无限子集，且$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，则数列$a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k},\cdots$称为数列$\{a_n\}$的一个子列，简记为$\{a_{n_k}\}$.

4. 收敛数列的性质

(1) 收敛数列的极限是唯一的.

(2) 收敛数列是有界数列.

(3) 收敛数列具有保号性与保不等式性.

(4) 收敛数列的四则运算法则.

二、基本方法与技巧

1. 证明数列极限存在及其求极限的方法

(1) 利用定义(ε-N 语言).

(2) 利用极限的四则运算法则.

(3) 利用迫敛性定理.

(4) 利用无穷小量的性质.

(5) 利用归结原理求数列极限.

(6) 利用单调有界定理.

(7) 利用柯西收敛准则.

(8) 几种求数列极限的有效方法:

(i) 利用级数收敛的必要条件;

(ii) 利用递推关系;

(iii) 利用定积分的和式;

(iv) 利用不动点原理;

(v) 利用 Stolz 公式.

2. 证明数列发散的方法

(1) 利用定义的否定形式.

(2) 利用柯西准则的否定形式.

(3) 利用收敛数列的有界性:若$\{a_n\}$无界,则$\{a_n\}$发散.

(4) 利用收敛数列的子列法则:

(i) 若$\{a_n\}$有一个发散子列,则$\{a_n\}$发散;

(ii) 若$\{a_n\}$有两个子列收敛于不同的极限,则$\{a_n\}$发散.

3. 常用公式

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_m n^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n+a_0}{b_k n^k+b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1 n+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_m}{b_m}, & 当\ m=k,\\ 0, & 当\ m<k,\\ \infty, & 当\ m>k.\end{cases}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}p^n=0$, 其中$|p|<1$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n=\mathrm{e}^a$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{a}{n}=a$.

三、例题解析

例 1 下列说法中可作为“数列$\{a_n\}$以 a 为极限”的定义的有：

(1) $\forall\varepsilon\in(0,1)$，存在实数 A，当 $n>A$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$；

(2) $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，$|a_n-a|<k\cdot\sqrt{\varepsilon}$，($k$ 为正常数)；

(3) 存在正整数 N，$\forall\varepsilon>0$，当 $n\geqslant N$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$；

(4) $\forall$ 正整数 N，$\exists\varepsilon>0$，当 $n\geqslant N$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$；

(5) $\forall$ 正整数 m，$\exists$ 正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，$|a_n-a|<\dfrac{1}{2^m}$；

(6) $\exists$ 正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，$|a_n-a|<\dfrac{1}{2^n}$；

(7) $\forall\varepsilon>0$，集$\{n|x_n\notin(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\}$为有限集；

(8) $\forall\varepsilon>0$，集$\{n|x_n\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\}$为无限集.

答：(1)，(2)，(5)，(7)可以.

首先，对比 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的原定义可以看出，这里的 8 种说法有的是改变了 ε 的给定方式，有的是改变了 N 的作用，有的是改变了 ε 和 N 的相互关系，故，能否正确判断本题的关键在于对极限定义中 ε 和 N 的作用的理解.

ε 是用来衡量 a_n 和 a 的接近程度的，为了刻画接近的任意性，ε 必须是可以任意小的正数，这是 ε 的本质特征.

ε 是任意小的正数，$k\varepsilon$ $(k>0)$，$\sqrt{\varepsilon}$，ε^2 等自然也都是任意小的，对任意(与 n 无关)的正整数 m，显然$\dfrac{1}{m}$，$\dfrac{1}{2^m}$等也是可以任意小的正数. 它们都可以看做是 ε 的等价形式，因此，在极限定义中它们都可以代替 ε 的职能.

ε 是任意小的正数，因此，$|a_n-a|<\varepsilon$ 与 $|a_n-a|\leqslant\varepsilon$ 对描述 a_n 与 a 的无限可接近性的作用是相同的.

对 ε 任意性的要求，实质上是要求 ε 能够任意变小. 因此，预先把 ε 限制在与 0 充分接近的正数范围内，例如令 $\varepsilon\in(0,\alpha)$，同样不会改变定义的本质.

N 的作用则是指出在 n 无限变大过程中的某一个“时刻”，使其后的所有的整数 n 都满足$|a_n-a|<\varepsilon$. 这使得 N 有如下两个主要特征：

1° N 只需存在而不在大小. 实际上，若有一个符合定义要求的 N，则比 N 大的任意正整数或实数都可以充当这一角色. N 的这种任意可大性使得 $n>N$ 或 $n\geqslant N$，$n>A$(A 为比 N 大的任意实数)，在其本质上是没有区别

的.

2° N 只管其后而不问其前,对其后的 n,要求无一例外使 $|a_n-a|<\varepsilon$,而不能用有无穷多个来代替,对其前的 n,则全然不作要求.

此外,从 ε 和 N 的关系看,ε 给出在先,具有与 N(也即与 n)无关的独立性. N 存在于后,一般视 ε 而定,具有对 ε 的依赖性. 对于同一 ε,总是有无穷多个 N,却不能要求存在一个 N,适用于所有的 ε.

上面的分析可以帮助我们作出判断,并且进而写出严格的证明. 仅以(5)为例.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则 $\forall$ 正整数 m,令 $\varepsilon=\dfrac{1}{2^m}$,$\exists N$,当 $n>N$ 时,$|a_n-a|<\varepsilon$,即(5)成立. 反之,设(5)成立,则对 $\forall\varepsilon>0$,可取正整数 m,使 $\dfrac{1}{2^m}<\varepsilon$,根据(5),$\exists N$,当 $n>N$ 时,$|a_n-a|<\dfrac{1}{2^m}$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

现在再来说明(3),(4),(6),(8)不能作为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的定义.

(3)是"a_n 以 a 为极限"的充分而非必要条件. 实际上,当数列 $\{a_n\}$ 满足(3)时,必有 $a_n=a$,$n=N,N+1,\cdots$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 反之,以 a 为极限的数列自然不必以某项开始恒为 a,例如 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$.

(4) 是 a_n 以 a 为极限的必要而非充分条件. 不难看出,(4)是数列 $\{a_n\}$ 有界的等价说法.

(6) 是"a_n 以 a 为极限"的充分而非必要条件. 例如 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 以 0 为极限,但 $|a_n-0|=\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{2^n}$,$n=1,2,\cdots$.

(8) 是"a_n 以 a 为极限"的必要而非充分条件. 实际上,(8)是 $\{a_n\}$ 以 a 为聚点的等价说法.

数列 $\left\{\dfrac{a}{2}[(-1)^n+1]\right\}$ 可作为(4),(8)的反例.

例 2(天津大学 2006 年) $\lim\limits_{i\to\infty}x_{n_i}=a$ 存在,且 p 为任意自然数,有 $\lim\limits_{i\to\infty}x_{n_i+p}=a$,问 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 是否存在? 举例说明.

解:不一定存在. 反例:

$$x_n=\begin{cases}1, & \text{当 } n \text{ 为平方数},\\ 0, & \text{当 } n \text{ 不为平方数}.\end{cases}$$

$n_k=k^2+1$,则 $\lim\limits_{i\to\infty}x_{n_i}=0$. p 为任意自然数,有 $\lim\limits_{i\to\infty}x_{n_i+p}=0$,但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存

在.

例 3(上海理工大学 2005 年) 用极限定义证明:当 $a>1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$,并讨论当 $0<a\leqslant1$ 时,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$ 是否存在,如果存在,极限是多少?

证明:① 当 $a>1$ 时,令 $a_n=\sqrt[n]{a}-1$,则 $a_n>0$,且

$$a=(1+a_n)^n\geqslant1+na_n=1+n(\sqrt[n]{a}-1),$$

得 $\sqrt[n]{a}-1\leqslant\dfrac{a-1}{n}$.

$\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\dfrac{a-1}{\varepsilon}\right]+1$,当 $n>N$ 时,有

$$0<\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon,\quad \text{即}\quad |\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

② 当 $0<a\leqslant1$ 时,令 $a^{-1}=b\geqslant1$,

$$a=\frac{1}{b}.$$

当 $a=1$ 时,即 $b=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

当 $0<a<1$,即 $b>1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{b}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}}=1$.

例 4(深圳大学 2006 年) 设数列$\{x_n\}$满足$|x_{n+1}|\leqslant k|x_n|$,$n=1,2,\cdots$,其中 $0<k<1$,求证:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

证明:由$|x_{n+1}|\leqslant k|x_n|$,得$|x_n|\leqslant k^{n-1}|x_1|$,$n=1,2,\cdots$,又 $0<k<1$,所以

$$\lim_{n\to\infty}k^{n-1}|x_1|=0,$$

即 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0$,使得当 $n>N$ 时有 $k^{n-1}|x_1|<\varepsilon$.因而$|x_n|\leqslant k^{n-1}|x_1|<\varepsilon$,即$|x_n-0|<\varepsilon$,所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

例 5(安徽大学 2003 年) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cos\dfrac{x}{2^3}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$ $(x\neq0)$.

解:$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cos\dfrac{x}{2^3}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{\sin x}{x}.$$

例 6(上海大学 2006 年)　$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$，$0<x_1<1$，证明：$\{x_n\}$收敛，并求其极限.

证明：本题考查单调有界定理. 显然有 $0<x_n<1$，$n=1,2,\cdots$. 又因为 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)\leqslant x_n$，所以$\{x_n\}$是单调递减的有界数列，故$\{x_n\}$收敛. 记$\{x_n\}$的极限为 x，令 $n\to\infty$，则有 $x=x(1-x)$，解得 $x=0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

例 7(山东科技大学 2004 年，江苏大学 2004 年，电子科技大学 2004 年，厦门大学 2005 年)　设 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$ $(a>0)$，$n=1,2,\cdots$，$x_1=a_0$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解：先证$\{x_n\}$收敛. 若 $a_0>0$，有

$$x_{n+1}\geqslant\sqrt{x_n\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a},$$

对任意的 n 成立. 故$\{x_n\}$有下界，且 $x_{n+1}-x_n=\frac{a-x_n^2}{2x_n}\leqslant 0$，即$\{x_n\}$单调递减，则$\{x_n\}$收敛.

若 $a_0<0$，显然对任意的 n，$x_n\leqslant-\sqrt{a}$，即$\{x_n\}$有上界. $x_{n+1}-x_n\geqslant 0$，即$\{x_n\}$单调递增，则$\{x_n\}$收敛.

记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，由递推关系式得 $x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)$，得 $x=\pm\sqrt{a}$. 即当 $a_0>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$；当 $a_0<0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\sqrt{a}$.

例 8(华中科技大学 2007 年)　设 $x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$，$n=1,2,\cdots$，证明：$\{x_n\}$收敛，并求其极限.

证明：$x_2=\sqrt{2x_1}=\sqrt{2\sqrt{2}}\geqslant\sqrt{2}$，$x_2\leqslant 2$，即

$$\sqrt{2}\leqslant x_2\leqslant 2.$$

假设$\sqrt{2}\leqslant x_n\leqslant 2$，则有

$$\sqrt{2}\leqslant x_{n+1}=\sqrt{2x_n}\leqslant 2,$$

所以$\{x_n\}$有界.

又因为 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{2x_n}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{2}-\sqrt{x_n})\geqslant 0$，$\{x_n\}$单调递增，故极限存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对 $x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$ （$n=1,2,\cdots$）两边取极限，可得 $a=\sqrt{2a}$，因为$\sqrt{2}\leqslant x_n\leqslant 2$，故 $a=2$，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=2.$$

例 9　求下列极限：

(1)（山东科技大学 2006 年）　求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$；

(2)（陕西师范大学 2003 年，中科院 2003 年，苏州大学 2005 年，辽宁大学 2005 年，华东师范大学 2006 年）　已知 $a>0,b>0,c>0$，求

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n};$$

(3)（青岛科技大学 2005 年，浙江师范大学 2006 年）　求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n};$$

(4)（华南理工大学 2006 年）　求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}{\sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}}$.

解：(1) 因为 $1\leqslant\dfrac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}\leqslant\sqrt[n]{n}$，又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，由夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1.$$

(2) 因为 $\max\{a,b,c\}<\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}\leqslant\sqrt[n]{3}\max\{a,b,c\}$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$，故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}=\max\{a,b,c\}.$$

(3) 方法一　归纳法. 当 $n=1$ 时，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$成立.

假设当 $n=k$ 时，$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2k-1}{2k}<\dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}$成立. 则当 $n=k+1$ 时，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}$$

$$<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

上式中因为$(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2$，即对任意正整数n，有

$$0<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

由夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}=0.$$

方法二　由于

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2n+1},$$

所以 $0<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. 由夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}=0.$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}{\sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{7\sqrt[n]{\left(\frac{3}{7}\right)^n+\left(\frac{5}{7}\right)^n+1}\,(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n})}$$
$$=\frac{1}{14}.$$

例 10(北京理工大学 2004 年)　设 $0<\alpha<1$，$x_{n+1}=\alpha x_n+(1-\alpha)x_{n-1}$，证明：$\{x_n\}$收敛，并用 α,x_0,x_1 表示其极限.

证明：$x_{n+1}-x_n=(\alpha-1)(x_n-x_{n-1})=\cdots=(\alpha-1)^n(x_1-x_0)$，所以对任意的自然数 n,p，有

$$\begin{aligned}&x_{n+p}-x_n\\&=(\alpha-1)^{n+p-1}(x_1-x_0)+(\alpha-1)^{n+p-2}(x_1-x_0)+\cdots+(\alpha-1)^n(x_1-x_0)\\&=(x_1-x_0)\frac{1-(\alpha-1)^p}{1-(\alpha-1)}(\alpha-1)^n.\end{aligned}$$

由 $0<\alpha<1$ 得，当 $n\to\infty$ 时，$x_{n+p}-x_n\to0$. 由 Cauchy 收敛准则可知$\{x_n\}$收敛.

$$\begin{aligned}x_n-x_0&=(x_n-x_{n-1}+x_{n-1}-x_{n-2}+\cdots+x_1-x_0)\\&=[(\alpha-1)^{n-1}+(\alpha-1)^{n-2}+\cdots+(\alpha-1)+1](x_1-x_0).\end{aligned}$$

将上式两边取极限，利用等比数列的求和公式，得

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-x_0)=\frac{1}{2-\alpha}(x_1-x_0),$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{(1-\alpha)x_0+x_1}{2-\alpha}$.

例 11（北京航空航天大学 2004 年）　(1) 证明：对每个正整数 n，方程 $x+x^2+\cdots+x^n=1$ 在$[0,1]$内都存在唯一解.

(2) 用 x_n 表示上述方程在$[0,1]$内的解，试证明$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明：(1) 令 $f(x)=x+x^2+\cdots+x^n-1$，当 $n=1$ 时，$f(x)=x-1$，$x=1$ 就是方程的解；当 $n>1$ 时，$f(0)=-1<0$，$f(1)=n-1>0$，所以由介值定理得，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$. 因为

$$f'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}>0,$$

所以，$f(x)$单调递增，故方程的解唯一.

(2) 对任意的 n 有 $x_n\leqslant x_{n-1}$（否则 $1=\sum\limits_{k=1}^{n}x_n^k>\sum\limits_{k=1}^{n-1}x_{n-1}^k=1$，矛盾），所以$\{x_n\}$单调递减，且 $x_n\geqslant 0$，由单调有界原理可得 x_n 的极限存在. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由方程得 $1=\sum\limits_{k=1}^{n}x_n^k=\dfrac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}$，而 $0\leqslant x_n^n<1$，对$\dfrac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}=1$ 两边取极限，得

$$1=\frac{a}{1-a},$$

则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a=\frac{1}{2}.$$

例 12（武汉大学 2002 年）　设 f,g 满足：① f,g 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导；② $f(0)=g(0)=0$，$g(1)=1$；③ 对任意的 $x\in(0,1)$，有 $0<f'(x)<g'(x)$. 证明：

(1) 对任意的 x，存在 $y\in[0,1]$，使得 $g(y)=f(x)$；

(2) 任取 $x_0\in[0,1]$，由下述的递推公式确定数列$\{x_n\}$，$g(x_n)=f(x_{n-1})$ $(n=1,2,\cdots)$，那么$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

证明：(1) 依题意，有 $f(0)=g(0)=0$，因为 $0<f'(x)<g'(x)$，所以 $g(x)>f(x)$，$x\in(0,1)$. 若对任意的 $x\in(0,1)$，$f(0)=0$，$f(x)=c<f(1)<g(1)=1$，则 $g(x)>c$，即 $c\in[g(0),g(1)]$. 因为 $g(x)$在$[0,1]$上连续，且 $g(x)$单调递增，所以由介值定理，存在 $y\in(0,1)$，使得 $g(y)=c=f(x)$，且 $y<x$，若 $y\geqslant x$，则 $g(y)\geqslant g(x)>f(x)$，矛盾.

(2) 对任意的 $x_0\in[0,1]$，存在 $x_1\in[0,1]$，使得 $f(x_0)=g(x_1)$；对 x_1，

存在 $x_2\in[0,1]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，…，以此类推，$g(x_n)=f(x_{n-1})$，且 $0<x_n<x_{n-1}<1$，所以 $\{x_n\}$ 单调有界. 由单调有界原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设为 A，由 $f(x)$，$g(x)$ 连续，对 $f(x_{n-1})=g(x_n)$ 两边取极限，得 $f(A)=g(A)$，所以 $A=0$.

例 13（哈尔滨工业大学 2006 年） 设 $x_n=\frac{\cos 1}{\mathrm{e}}+\frac{\cos 2}{\mathrm{e}^2}+\cdots+\frac{\cos n}{\mathrm{e}^n}$，按提示思路用三种方法证明 $\{x_n\}$ 收敛：(1) 柯西准则；(2) 利用级数收敛；(3) 利用 Dirichlet 判别法；(4) 其他.

证明：(1) 利用柯西准则.

对 $\forall\varepsilon$，$\exists N=\left[\ln\frac{1}{(1-\mathrm{e}^{-1})\varepsilon}\right]+1$，$\forall n,m>N$，有

$$\begin{aligned}|x_m-x_n|&=\left|\frac{\cos(n+1)}{\mathrm{e}^{n+1}}+\frac{\cos(n+2)}{\mathrm{e}^{n+2}}+\cdots+\frac{\cos m}{\mathrm{e}^m}\right|\\&\leqslant\left|\frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}}+\frac{1}{\mathrm{e}^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{e}^m}\right|\\&<\frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(1-\mathrm{e}^{-1})}<\varepsilon.\end{aligned}$$

(2) 利用级数收敛.

作级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\mathrm{e}^n}$，由于 $\left|\frac{\cos n}{\mathrm{e}^n}\right|\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}^n}$，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^n}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\mathrm{e}^n}$ 绝对收敛，从而收敛，于是数列 $\{x_n\}$ 收敛.

(3) 利用级数收敛的 Dirichlet 判别法.

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos k\right|=\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right|$$

有界，同时 $\{\mathrm{e}^{-n}\}$ 关于 n 单调递减，且当 n 趋向无穷大时 $\{\mathrm{e}^{-n}\}$ 趋于 0，则由 Dirichlet 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\mathrm{e}^n}$ 收敛，故数列 $\{x_n\}$ 收敛.

§1.2 函数极限

一、基本知识

1. 函数极限的定义

函数极限按自变量 x 的趋向来区分，有 6 种类型，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x),\quad \lim_{x\to x_0^+} f(x),\quad \lim_{x\to x_0^-} f(x),$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x),\quad \lim_{x\to+\infty} f(x),\quad \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

其极限值有 4 种：有限数 A（正常极限）；无穷大∞；正无穷大$+\infty$；负无穷大$-\infty$. 共有 24 种极限形式.

(1) ε-δ 语言. 以$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 为例（$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$ 可类似叙述）.

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x$：$0<|x-x_0|<\delta$，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

(2) ε-M 语言. 以$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 为例（$x\to+\infty$，$x\to-\infty$可类似叙述）.

$\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，$\forall x$：$|x|>M$，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3) G-M 语言. 以$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$为例.

$\forall G>0$，$\exists M>0$，$\forall x$：$|x|>M$，有$|f(x)|>G$.

2. 无穷小量

设 f 在某 $U^0(x_0)$内有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称 f 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

设当 $x\to x_0$ 时，f 与 g 均为无穷小量.

(1) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称当 $x\to x_0$ 时 f 为 g 的高阶无穷小量，或称 g 为 f 的低阶无穷小量，记作 $f(x)=o(g(x))$ $(x\to x_0)$.

(2) 若存在正数 k 和 l，使得在其 $U^0(x_0)$上有

$$k\leqslant\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leqslant l,$$

则称 f 与 g 为当 $x\to x_0$ 时的同阶无穷小量.

(3) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则称 f 与 g 是当 $x\to x_0$ 时的等价无穷小量，记作 $f(x)\sim g(x)$ $(x\to x_0)$.

3. 无穷大量

设 f 在某 $U^0(x_0)$内有定义，若对任给的 $G>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in U^0(x_0;\delta)$ $(\subset U^0(x_0))$时有$|f(x)|>G$，则称 f 当 $x\to x_0$ 时有非正常极限∞，记作$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

若$|f(x)|>G$ 换成“$f(x)>G$”或“$f(x)<-G$”，则分别称 f 当 $x\to x_0$ 时有非正常极限$+\infty$，$-\infty$，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty\quad 或\quad \lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty.$$

对于自变量 x 的某种趋向（或 $n\to\infty$时），所有以∞，$+\infty$或$-\infty$为非正