

GCT入学资格考试精编辅导丛书

2011版



全国GCT入学资格考试命题研究组◎编  
梁莉娟◎主编

# 精编教程4合1

四大学科重点考点为您一手掌握

第②版

- ◆ 内容精练，代表性强
  - ◆ 结合大纲，针对性强
- ◆ 真题回顾，掌握要领
  - ◆ 重点突出，解析详尽
- ◆ 名师操盘，内容权威



附赠“GCT系统精讲班”

16学时，价值300元的网络视频课程

机械工业出版社  
CHINA MACHINE PRESS



GCT入学资格考试精编辅导丛书 2011版

# 精编教程4合1

四大学科重点考点为您一手掌握

第 全国GCT入学资格考试命题研究组◎编

②  
版

 机械工业出版社  
CHINA MACHINE PRESS

本书为面向 GCT 考生、简洁精练的综合辅导图书。本书按照最新考试大纲的要求，系统全面地讲解了 GCT 考试中数学基础能力测试、逻辑推理能力测试、外语运用能力测试和语言表达能力测试这四个部分的考试要点、复习要领、应试技巧及专项练习等内容。通过内容精练、重点突出的讲解，使考生可以系统地了解 GCT 考试的全貌，掌握复习要领，提高应试能力，进而在考试中胜出。

#### 图书在版编目 (CIP) 数据

2011GCT 精编教程 4 合 1/梁莉娟主编.—2版.—北京:机械工业出版社,2011.3

(GCT 入学资格考试精编辅导丛书)

ISBN 978-7-111-33760-7

I. ①2… II. ①梁… III. ①研究生-入学考试-自学参考资料 IV. ①G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 040130 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑:孟玉琴 杨晓昱 版式设计:张文贵

责任印制:杨曦

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

2011 年 4 月第 2 版·第 1 次印刷

184mm×260mm·42 印张·1044 千字

标准书号:ISBN 978-7-111-33760-7

定价:67.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010) 88361066

门户网:<http://www.cmpbook.com>

销售一部:(010) 68326294

教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售二部:(010) 88379649

读者服务部:(010) 68993821

封面无防伪标均为盗版

# 前 言

这是市面上少有的一本面向 GCT 考生的、简洁精练的综合辅导图书!

为了使考生能够对 GCT 入学资格考试的全部过程以及考试题型和难易度的变化有所了解,调整复习状态和计划,进而更好地备考,我们组织编写了这本《GCT 精编教程 4 合 1》。

本书是 GCT 入学资格考试精编辅导丛书之一。本书按照最新考试大纲的要求,系统全面地讲解了 GCT 考试中数学基础能力测试、逻辑推理能力测试、外语运用能力测试和语言表达能力测试这四个部分的考试要点、复习要领、应试技巧及专项练习等内容。本书在编写上具备以下特点。

## 1. 内容精练,代表性强。

本书摒弃了市面上传统的图书操作模式,将 GCT 考试涉及的四门学科进行了科学、全面的整合,内容精练、重点要点突出,让考生通过 1 本书的精工细研,代替泛泛的至少 4 本书的研读,以便考生节省精力,直击考试要领!

## 2. 结合大纲,针对性强。

针对性强。本书严格按照最新考试大纲要求,以确定本书的难度及题材的选择。本书各部分考点全面,重点突出,实用性强。

## 3. 真题回顾,掌握要领。

历年考试真题都是经过反复筛选和推敲的,具有代表性和指导性,是考生最好的测试和复习材料。通过回顾分析往年真题(2005~2010 年),尤其是 2010 年真题,考生可以了解该部分考试难度、考试特点和重要考点,进而熟悉解题思路和解题技巧,明确复习思路和复习方法。

## 4. 重点突出,解析详尽。

本书各个部分都配有适量的针对性极强的练习,每部分练习都给出了详尽的参考答案和解析,让考生通过练习进一步熟练掌握解题思路和解题技巧。

## 5. 名师编写,内容权威。

本书由众多业内辅导名师亲自编写,各部分内容选材参考了众多名师的 GCT 辅导讲义、国内各种相关考试真题以及各种教材、杂志和报刊等,突出了备考的权威性、针对性和实用性。

通过使用本书,考生可以系统地了解 GCT 考试的全貌,掌握复习要领,提高应试能力,进而在考试中胜出!

由于编者水平有限,不妥之处在所难免,衷心希望广大读者批评指正!

编 者

2011 年 3 月 于北京

# 目 录

丛书序

前言

## 数学篇

|      |                        |     |
|------|------------------------|-----|
| 第一章  | 数及其运算 .....            | 2   |
| 第二章  | 集合、映射和函数 .....         | 23  |
| 第三章  | 方程与不等式 .....           | 38  |
| 第四章  | 数列与数学归纳法 .....         | 52  |
| 第五章  | 排列、组合、二项式定理和古典概率 ..... | 60  |
| 第六章  | 常见几何图形 .....           | 72  |
| 第七章  | 三角学 .....              | 83  |
| 第八章  | 平面解析几何 .....           | 98  |
| 第九章  | 极限和连续 .....            | 116 |
| 第十章  | 一元函数微分学 .....          | 132 |
| 第十一章 | 一元函数积分学 .....          | 155 |
| 第十二章 | 行列式 .....              | 173 |
| 第十三章 | 矩阵 .....               | 182 |
| 第十四章 | 向量 .....               | 199 |
| 第十五章 | 线性方程组 .....            | 211 |
| 第十六章 | 矩阵的特征值和特征向量 .....      | 225 |

## 逻辑篇

|     |              |     |
|-----|--------------|-----|
| 第一章 | 逻辑预备知识 ..... | 238 |
| 第二章 | 逻辑试题详解 ..... | 284 |
| 第三章 | 真题训练 .....   | 353 |

## 英语篇

|     |            |     |
|-----|------------|-----|
| 第一章 | 绪 论 .....  | 430 |
| 第二章 | 词 汇 .....  | 430 |
| 第三章 | 语法部分 ..... | 454 |
| 第四章 | 阅读理解 ..... | 496 |
| 第五章 | 完形填空 ..... | 557 |

VI

|                |     |
|----------------|-----|
| 第六章 口语交际 ..... | 577 |
|----------------|-----|

## 语文篇

|                |     |
|----------------|-----|
| 第一章 绪 论 .....  | 604 |
| 第二章 汉 字 .....  | 604 |
| 第三章 词 语 .....  | 612 |
| 第四章 句 子 .....  | 622 |
| 第五章 修 辞 .....  | 636 |
| 第六章 文史知识 ..... | 642 |
| 第七章 百科知识 ..... | 652 |
| 第八章 阅 读 .....  | 655 |



# 数学篇

## 第一章 数及其运算

### 【本章考点】

|                               |            |
|-------------------------------|------------|
| 1. 比例的运算                      | 2. 绝对值的性质☆ |
| 3. 应用题的综合考查：根据题中不变的量列出等式进而求解。 |            |
| 4. 复数 ① $i^2 = -1$            | ②模的计算☆     |

### 第一节 数的概念、性质和运算

#### 一、自然数和整数

用来表示物体个数的 0、1、2、3、… 叫做自然数。1 是自然数的单位，0 也是自然数，自然数是正整数。

#### 二、分数、小数和百分数

##### 1. 分数

将单位“1”平均分成若干份，表示这样的一份或几份的数叫做分数。表示其中一份的数是这个分数的单位。分数有真分数、假分数、带分数等。把“1”平均分成多少份的数，称为分数的分母；表示取了多少份的数，称为分数的分子。

分子比分母小的分数称为真分数，如  $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{4}{5}$ 。

分子比分母大或者分子、分母相等的分数称为假分数，如  $\frac{4}{3}$ 、 $\frac{6}{5}$ 、 $\frac{3}{3}$ 。

一个整数和一个真分数合成的数，称为带分数，如  $1\frac{1}{3}$ 、 $3\frac{2}{7}$ 。

两个自然数相除，它的商可以用分数表示，如  $a/b = \frac{a}{b}$  ( $b \neq 0$ )。

两个数的比，也可用分数表示，如  $a:b = \frac{a}{b}$  ( $b \neq 0$ )。

##### 2. 百分数

表示一个数是另一个数的百分之几的数叫做百分数。百分数也叫百分率或者百分比。百分数通常用“%”表示。

##### 3. 分数的基本性质

(1) 分数的分子和分母都乘以或除以同一个不为零的数，分数的大小不变。

$$\text{即 } \frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}} \quad (b \neq 0, m \neq 0)$$





(2) 乘积是1的两个数互为倒数；1的倒数是1；0没有倒数。

### 三、数的整除

当整数 $a$ 除以整数 $b$  ( $b \neq 0$ )，除得的商正好是整数而无余数时，则称 $a$ 能被 $b$ 整除或称 $b$ 能整除 $a$ 。当 $a$ 能被 $b$ 整除时，也称 $a$ 是 $b$ 的倍数， $b$ 是 $a$ 的约数。一个数的约数的个数是有限的，其中最小的约数是1，最大的约数是它本身；一个数的倍数的个数是无限的，其中最小的倍数是它本身。

能被2整除的数称为偶数，不能被2整除的数称为奇数。

一个数，如果只有1和它本身两个约数，叫做质数（素数）。一个数，如果除了1和它本身，还有其他约数，叫做合数。每个合数都可以写成几个质数相乘，这几个质数都叫做这个合数的质因数。

几个数公有的倍数叫做这几个数的公倍数，所有公倍数中最小的一个叫做这几个数的最小公倍数。几个数公有的约数叫做这几个数的公约数，所有公约数中最大的一个叫做这几个数的最大公约数。公约数只有1的两个数，叫做互质（素）数。分子和分母互质的分数称为最简分数。

### 四、四则运算

#### 1. 运算定律

- (1) 加法交换律  $a + b = b + a$
- (2) 加法结合律  $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$
- (3) 乘法交换律  $a \times b = b \times a$
- (4) 乘法结合律  $a \times b \times c = (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- (5) 乘法分配律  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$   
 $(a - b) \times c = a \times c - b \times c$

#### 2. 运算性质

- (1) 交换性质  $a + b - c = a - c + b$      $a - b - c = a - c - b$      $a \times b / c = a / c \times b$   
 $a / b / c = a / c / b$  ( $b \neq 0, c \neq 0$ )
- (2) 结合性质  $a + b - c = a + (b - c) = a - (c - b)$   
 $a - b - c = a - (c + b)$   
 $a \times b / c = a \times (b / c)$  ( $c \neq 0$ )  
 $a / b \times c = a / (b / c)$  ( $b \neq 0, c \neq 0$ )  
 $a / b / c = a / (b \times c)$  ( $b \neq 0, c \neq 0$ )

#### 3. 整数和小数四则混合运算

(1) 在一个没有括号的算式里，如果只含有同一级运算，应从左到右依次计算。如果既含有第一级运算（加减法），又含有第二级运算（乘除法），则应当先算第二级运算，后算第一级运算。

(2) 在一个有括号的算式里，应先进行括号内运算，运算顺序是先算小括号里的，再



算中括号里的，最后算大括号里的算式.

#### 4. 分数四则混合运算

##### (1) 分数加减法

同分母分数相加减，分子相加减，分母不变.

异分母分数相加减，先通分，然后按照同分母分数的加减法法则进行计算.

带分数相加减，整数部分、分数部分要分别相加减，再把所有的数合并在一起.

##### (2) 分数乘法

分数乘以整数，用分子和整数相乘做积的分子，分母不变.

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b}$$

分数乘以分数，用分子相乘的积做分子，分母相乘的积做分母.

$$\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

分数中有带分数的，要把带分数化成假分数，然后再相乘.

##### (3) 分数除法

一个数除以另一个数（零除外），等于一个数乘以另一个数的倒数.

##### (4) 分数四则混合运算

分数四则混合运算的顺序和整数四则混合运算的顺序相同.

整数加法和乘法的运算定律以及加减、乘除混合运算的性质，在分数四则运算中也适用.

### 【经典例题】

例 1 50 能被 25 整除，25 能被 5 整除，所以 50 是 25 和 5 的 ( ).

A. 公约数      B. 最大公约数      C. 公倍数      D. 最小公倍数

答案: C

解析: 由于 50 既能被 25 整除，也能被 5 整除，所以 50 是 25 和 5 的公倍数. 同时由于 25 也是 25 和 5 的公倍数，因此 50 只能是 25 和 5 的公倍数，而不是最小公倍数.

故选 C.

例 2 [2008 年] 请你想好一个数，将它加 5，将其结果乘以 2，再减去 4，将其结果除以 2，再减去你想好的那个数，最后的结果等于 ( ).

A.  $\frac{1}{2}$       B. 1      C.  $\frac{3}{2}$       D. 3

答案: D

解析: 设想好的那个数为  $a$ ，则有  $[(a+5) \times 2 - 4] \div 2 - a = a + 5 - 2 - a = 3$ . 故选 D.

例 3 一辆卡车从甲地驶向乙地，每小时行驶 60km，另一辆卡车从乙地驶向甲地，每小时行驶 55km，两车同时出发，在离中点 10km 处相遇，甲乙地之间的距离为 ( ) km.

A. 115      B. 230      C. 345      D. 460

答案: D

解析: 相遇时从甲地开往乙地的卡车比从乙地驶向甲地的卡车多走  $10 \times 2 = 20$  km，两车速度相差 5km/h，因此相遇时两车各走了  $20 \div 5 = 4$  (h). 两车相向而行，各走 4h 相



遇，因此甲、乙两地之间距离为  $(60+55) \times 4 = 460$  (km). 故选 D.

**例 4** 甲、乙两个工人要生产同样规格并且是同样数量的零件，甲每小时可做 12 个，乙每小时可做 10 个. 两人同时开始生产，甲比乙提早 2.5h 完成任务. 当甲完成任务时，乙做了多少个零件？

解：根据题意，当甲完成任务时，甲比乙多做的零件个数为

$$10 \times 2.5 = 25 \text{ (个)}$$

由此可知甲完成任务所用的时间为

$$25 \div (12 - 10) = 12.5 \text{ (h)}$$

因此甲完成任务时，乙做的零件个数为

$$10 \times 12.5 = 125 \text{ (个)}$$

答：当甲完成任务时，乙做了 125 个零件.

**例 5** 两地相距 351 公里，汽车已行驶了全程的  $\frac{1}{9}$ ，再行驶( )公里，剩下的路程是已行驶的路程的 5 倍.

A. 19.5 公里

B. 21 公里

C. 21.5 公里

D. 22 公里

答案：A

解析：剩下路程是已行驶路程的 5 倍，即已行驶的路程将占总路程的  $\frac{1}{6}$ ；目前已行驶了  $\frac{1}{9}$ ，显然仍需行驶

$$351 \times \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{9} \right) = 351 \times \frac{3-2}{18} = 19.5 \text{ (公里)}$$

故选 A.

## 第二节 比和比例

### 一、比的定义和性质

#### 1. 定义

两个数相除，又称为这两个数的比，即  $a:b = \frac{a}{b}$  (或  $a:b = a/b$ )，其中  $a$  叫做比的前项， $b$  叫做比的后项，相除所得的商叫做比值.

如  $3:2 = 1.5$  (比值)

前项 后项

#### 2. 基本性质

比的前项与后项都乘以或除以同一个不为零的数，其比值不变.

如  $\frac{4}{3}:2 = \left(\frac{4}{3} \times 3\right) : (2 \times 3) = 4:6 = \left(\frac{4}{2}\right) : \left(\frac{6}{2}\right) = 2:3$

#### 3. 百分比

在实际应用中，常将比值表示成百分数，称为百分比 (或百分率). 此时分母 100 用



符号“%”表示.

如  $1:2 = 50\%$ ,  $4:2 = 200\%$ .

## 二、比例

### 1. 定义

两个比相等时,称为比例,用字母表示为  $a:b=c:d$  或  $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ .

其中,  $a$ 、 $d$  称为比例外项;  $b$ 、 $c$  称为比例内项.

若  $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$  时,称  $b$  为  $a$ 、 $c$  的比例中项,显然  $a$ 、 $b$ 、 $c$  均为正数时,  $b$  是  $a$ 、 $c$  的几何平均值.

### 2. 性质

比例  $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$  具有如下性质:

(1)  $ad=bc$  (外项积 = 内项积)

(2)  $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$  或  $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$  (互换外项或内项)

(3)  $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$  (合比定理)

(4)  $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$  (分比定理)

(5)  $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$  (合分比定理)

## 三、正反比例

若  $y=kx$  ( $k \neq 0$ ,  $k$  为常数), 则称  $y$  与  $x$  成正比,  $k$  为比例系数.

若  $y=\frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ,  $k$  为常数), 则称  $y$  与  $x$  成反比,  $k$  为比例系数.

### 【经典例题】

例 1 [2005 年] 2005 年,我国甲省人口是全国人口的  $c\%$ ,其生产总值占国内生产总值的  $d\%$ ;乙省人口是全国人口的  $e\%$ ,其生产总值占国内生产总值的  $f\%$ ;则 2005 年甲省人均生产总值与乙省人均生产总值之比是 ( ).

A.  $\frac{cd}{ef}$

B.  $\frac{ce}{df}$

C.  $\frac{cf}{de}$

D.  $\frac{de}{cf}$

答案: D

解析: 设全国人口为  $a$ , 国内生产总值为  $b$ ; 则甲省人均生产总值为  $\frac{d\% \cdot b}{c\% \cdot a}$ , 乙省为

$\frac{f\% \cdot b}{e\% \cdot a}$ ; 所以二者之比为  $\frac{de}{cf}$ . 故选 D.



例2 已知 $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$ , 那么 $\frac{3x+2y}{3x-2y}$ 的值是 ( ).

A. 19                      B. -19                      C. 6                      D. -6

答案: B

解析: 由已知 $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$ , 所以 $\frac{3}{2} \times \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{10}$

即 $\frac{3x}{2y} = \frac{9}{10}$ ,  $\frac{3x+2y}{3x-2y} = \frac{9+10}{9-10} = -19$

故选 B.

例3 已知 $x-y$ 与 $x+y$ 成正比例, 比例系数为 $k$ ;  $y$ 与 $\frac{1}{x}$ 成反比例, 比例系数为 $k+1$ , 则 $k$ 的值为 ( ).

A. 3                      B. -3                      C. 1                      D. -2

答案: B

解析: 因为 $x-y$ 与 $x+y$ 成正比例, 比例系数为 $k$ . 所以 $x-y = k(x+y)$ ,

即 $(1-k)x = (k+1)y$  ①

又因为 $y$ 与 $\frac{1}{x}$ 成反比例, 比例系数为 $k+1$

所以 $y = \frac{1+k}{\frac{1}{x}} = (k+1)x$  ②

把②式代入①式, 得 $(1-k)x = (k+1)(k+1)x$

由于 $x \neq 0$ , 所以 $1-k = 1+2k+k^2$ . 化简得 $k^2+3k=0$

又 $k \neq 0$ , 所以 $k = -3$ . 故选 B.

例4 某公司的纯收入是51万元, 欲按 $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{9}$ 的比例分配给下属甲、乙、丙3个部门, 乙部门得到的款数为( )万元.

A. 6                      B. 17                      C. 18                      D. 27

答案: C

解析: 按 $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{9}$ 的比例分配收入, 也就是按 $\frac{18}{2} : \frac{18}{3} : \frac{18}{9} = 9:6:2$ 的比例来分配, 将收入分成 $9+6+2=17$ (份), 乙部门得6份, 所以乙部门得到的款数为 $51 \times \frac{6}{17} = 18$ (万元).

故选 C.

例5 [2010年] 若某单位员工的平均年龄为45岁, 男员工的平均年龄为55岁, 女员工的平均年龄为40岁, 则该单位男、女员工工人数之比为 ( ).

A. 2:3                      B. 3:2                      C. 1:2                      D. 2:1

答案: C

解析: 设单位男工人数为 $x$ , 女工人数为 $y$ .

则根据题意, 有:  $45(x+y) = 55x + 40y$ . 所以 $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$ . 故选 C.

**例 6** 一项工程, 甲独立做 30 天可以完成, 乙独立做 20 天可以完成. 甲先做了若干天后, 由乙接着做完, 这样甲、乙二人合起来共做了 22 天. 问甲乙二人各做了多少天?

解: 甲、乙二人每人每天分别完成工作的  $\frac{1}{30}$  和  $\frac{1}{20}$ , 乙每天比甲每天多完成  $\frac{1}{20} - \frac{1}{30} = \frac{1}{60}$ . 如果 22 天均是甲做工作, 则只能完成总工作量的  $22 \times \frac{1}{30} = \frac{22}{30}$ , 尚差  $1 - \frac{22}{30} = \frac{8}{30}$ . 由此可知, 乙的工作天数是  $\frac{8}{30} \div \frac{1}{60} = 16$  (天).

答: 甲做了 6 天, 乙做了 16 天.

### 第三节 实数

#### 一、实数

##### 1. 自然数

自然数包括 0, 1, 质数和合数.

一个大于 1 的自然数, 至少有 2 个约数, 即 1 和它本身. 若一个自然数的约数只有 2 个, 则称它为素数; 若大于 1 的自然数, 除了 1 和它本身还有别的约数, 则称其为合数. 素数又称为质数, 复合数简称为合数.

##### 2. 整数

整数包括正整数、零和负整数. 由全体数组成的集合, 称为整数集.

零“0”, 是介于正整数和负整数之间的唯一的整数.

它具有如下特征: (1)  $x + 0 = 0 + x = x$

(2)  $x \times 0 = 0 \times x = 0$  (其中  $x$  表示任何数)

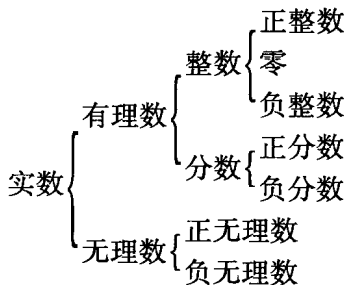
##### 3. 有理数和无理数

整数和分数统称为有理数; 无限不循环小数称为无理数.

如  $2, \sqrt{9}, \sqrt{16}$  是有理数;  $\sqrt{5}, \pi, e = 2.71828 \dots$  是无理数.

##### 4. 实数

实数的分类如下:



## 二、数轴

数轴是一条直线上规定了一个坐标原点  $O$  (对应实数  $0$ ) 和一个单位点  $E$  (对应实数  $1$ )，也就规定了它的正方向和单位长度，每一个实数都可以用数轴上唯一的一个点来表示；反之，数轴上的每一个点都表示唯一的一个实数。因此，数轴作为点的集合，与实数集之间可以建立起一一对应的关系，在某些场合对实数  $a$  和数轴上表示这个数  $a$  的点可以不加区别。

## 三、实数的运算

### 1. 运算定律

- |               |   |
|---------------|---|
| (1) 加法交换律     | $a + b = b + a$                                 |
| (2) 加法结合律     | $(a + b) + c = a + (b + c)$                     |
| (3) 乘法交换律     | $a \times b = b \times a$                       |
| (4) 乘法结合律     | $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ |
| (5) 乘法对加法的分配律 | $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$    |

### 2. 乘方与开方运算

#### (1) 乘方

求几个相同乘数的积的运算，称为乘方，乘方的结果称为幂。在  $a^n$  中  $a$  称为底数， $n$  称为指数， $a^n$  读作  $a$  的  $n$  次方，也可读作  $a$  的  $n$  次幂。

正数的任何次幂都是正数。负数的偶数次幂是正数，负数的奇数次幂是负数。零的任何次幂都是零。

#### (2) 开方

设  $a$  和  $x$  是两个实数， $n$  是大于  $1$  的整数。若  $x^n = a$ ，则  $x$  称为  $a$  的  $n$  次方根。求  $a$  的  $n$  次方根的运算，称为  $a$  开  $n$  次方， $a$  称为被开方数， $n$  称为根指数。

开方与乘方互为逆运算。

在实数范围内，正数的偶次方根是两个，它们互为相反数，正数的奇次方根是一个正数；负数没有偶次方根，负数的奇次方根是一个负数；零的任何次方根都是零。

非负数的非负的方根称为这个数的算术根。当  $a \geq 0$ ，且  $n$  为大于  $1$  的整数时， $\sqrt[n]{a}$  表示  $a$  的  $n$  次算术根。当  $a \geq 0$  时， $\sqrt[n]{a} \geq 0$ 。当  $a \geq 0$  时， $\sqrt[n]{a}$  读作  $a$  的  $n$  次算术根。

#### (3) 零指数幂和负指数幂

当  $n$  是正整数时， $a^n$  称为正整指数幂。

当  $a \neq 0$  时， $a^0 = 1$ ， $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  ( $n$  为自然数)。  $a^0$  称为零指数幂， $a^{-n}$  称为负整指数幂。

### 3. 绝对值、相反数

#### (1) 绝对值

实数  $a$  的绝对值记为  $|a|$ 。并规定



$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

绝对值  $|a|$  的几何意义:

数轴上表示  $a$  的点到原点的距离.

(2) 相反数

设  $a$  为一实数, 则称  $-a$  是  $a$  的相反数.

若两实数  $a$  与  $b$  互为相反数, 则  $a+b=0$ ; 若  $a$ 、 $b$  为两实数, 且  $a+b=0$ , 则  $a$  与  $b$  互为相反数; 特殊的, 0 的相反数还是 0.

(3) 绝对值的性质与运算法则

$$|a| \geq 0 \quad |a+b| \leq |a| + |b| \quad |a-b| \geq |a| - |b|$$

$$|a \times b| = |a| \times |b| \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} (b \neq 0)$$

当  $k \geq 0$  时,  $|a| \geq k \Leftrightarrow a \geq k$  或  $a \leq -k$ .

$$|a| \leq k \Leftrightarrow -k \leq a \leq k.$$

### 【经典例题】

例 1 [2009 年] 若将偶数 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ……依次排成一行 2 4 6 8 10 12 14, 则从左向右数第 101 个数码是 ( ).

- A. 4                      B. 3                      C. 2                      D. 1

答案: D

解析: 由题意, 依次排列为 2 4 6 8 10 12 … 96 98 100 102 104 …, 所以第 4 个数码  $\frac{98-10}{2} + 1 = 45$  组数 = 90 个数码

个数码是 1, 故选 D.

例 2 已知  $0 < x < 1$ , 那么在  $x$ 、 $\frac{1}{x}$ 、 $\sqrt{x}$ 、 $x^2$  中, 最大的数是 ( ).

- A.  $x$                       B.  $\frac{1}{x}$                       C.  $\sqrt{x}$                       D.  $x^2$

答案: B

解析: 用特殊值法, 令  $x=0.01$ , 则  $\frac{1}{x}=100$ ,  $\sqrt{x}=0.1$ ,  $x^2=0.0001$ , 于是  $\frac{1}{x} > \sqrt{x} > x > x^2$ , 故选 B.

例 3 记不超过 10 的素数的算术平均数为  $M$ , 则与  $M$  最接近的整数是 ( ).

- A. 2                      B. 3                      C. 4                      D. 5

答案: C

解析: 不超过 10 的素数为 2、3、5、7,  $M = \frac{2+3+5+7}{4} = 4.25$ , 故与  $M$  最接近的整数为 4.

例 4 实数  $a$ 、 $b$ 、 $c$  在数轴上的位置如图 1.1 所示, 图中  $O$  为原点, 则代数式



$$|a+b| - |b-a| + |a-c| + c = ( \quad )$$

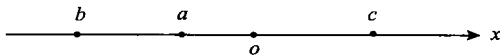


图 1.1

- A.  $-3a+2c$       B.  $-a-ab-2c$       C.  $a-2b$       D.  $3a$

答案: A

解析: 由图可知  $b < a < 0, c > 0$ . 因此  $a+b < 0, b-a < 0, a-c < 0$ , 故有  $|a+b| - |b-a| + |a-c| + c = -a-b + (b-a) - (a-c) + c = -3a+2c$ .

## 第四节 复数

### 一、复数的概念

复数  $z$  的一般形式 (代数形式) 是  $z = a + ib$ , 其中  $a, b$  是实数,  $i$  是虚数单位,  $i = \sqrt{-1}$ , 满足  $i^2 = -1$ .  $a, b$  分别称为复数  $z$  的实部和虚部, 记为  $a = \operatorname{Re}z, b = \operatorname{Im}z$ .  $a - ib$  称为  $z$  的共轭复数, 记为  $\bar{z} = a - ib$ .

复数还可以用三角表示或用指数表示为

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta) \text{ 或 } z = r e^{i\theta}$$

其中,  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  称为复数  $z$  的模或绝对值,  $\theta$  称为复数  $z$  的辐角, 它满足  $\tan \theta = \frac{b}{a}$ , 其中的辐角主值  $\operatorname{arg}z \in [0, 2\pi]$ .

在坐标平面上, 复数  $a + ib$  可以和点  $(a, b)$  或向量  $\vec{oz}$  一一对应, 此平面称为复平面,  $x$  轴和  $y$  轴分别称为实轴和虚轴. 复数的模  $r = |\vec{oz}|$ , 辐角  $\theta$  就是  $\vec{oz}$  和  $x$  轴正向所成的角.

### 二、复数的运算

#### 1. 复数的四则运算

设  $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, z = x + iy$

(1) 加法

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

(2) 减法

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

(3) 乘法

$$z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

(4) 除法

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0)$$

#### 2. 共轭复数的运算

(1)  $\overline{\bar{z}} = z$

(2)  $z \in \mathbf{R}, z = \bar{z}$

