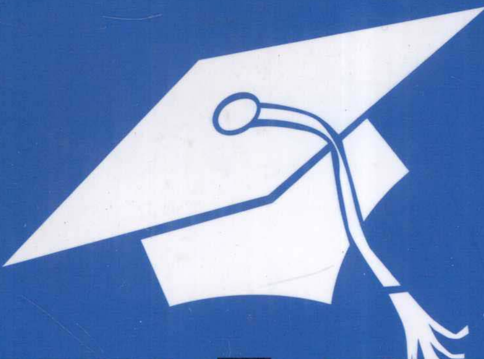

全国硕士研究生入学统一考试

数学考试参考书

（数学三适用）

2011年版

本书编写组

南開大學出版社

全国硕士研究生入学统一考试

数学考试参考书

（数学三适用）

2011年版

内容简介

本书是为参加全国硕士研究生入学统一考试数学(三)的考生编写的辅导书。本书依据《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》,在研究历年研究生入学考试的试题,分析考生答题特点,归纳、总结考试内容的基础上,结合各部分知识的基本问题和基本运算方法、解题思路、典型运算错误、特殊解题技巧、题目的变式、题设条件的解说、试题的难度系数及由性质、概念的内涵、外延而导出的一些有效解题技巧而编写,这些构成了本书的特色,成为本书的亮点。这些内容包含着作者多年研究教学、研究考研试题的研究成果,是备考生不可多得的复习资料。这些知识及解题思路是通常辅导书中少见,但对备考生是有很大帮助的。

本书是参加全国硕士研究生入学统一考试数学(三)考生的指导书,也可以作为高等学校相应专业在校学生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书:2011年版/《全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书》编写组编.—天津:南开大学出版社,2010.8

数学三适用

ISBN 978-7-310-03503-8

Ⅰ.①全… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第136734号

南开大学出版社出版发行

出版人:肖占鹏

地址:天津市南开区卫津路94号 邮政编码:300071

营销部电话:(022)23508339 23500755

营销部传真:(022)23508542 邮购部电话:(022)23502200

*

天津泰宇印务有限公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2010年8月第1版 2010年8月第1次印刷

787×1092毫米 16开本 23.875印张 2插页 750千字

定价:38.00元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

前　言

近年来全国硕士研究生入学数学试题的难易程度在考生中出现不同反映，这表明试题的进步。是什么原因使考生出现这种现象？特别是感到试题困难的考生是否思考过下面的问题：不同年份的试题有什么共性？差异在哪里？复习中出现了哪些问题？对这些问题的认识是否有偏差？

由历年来教育部考试中心发布的统计资料，可以发现一个值得考生深思的问题：

为什么试卷中的题目绝大多数是中等难度题与容易题，但一些考生的成绩这么低？后来的备考生应该从中汲取什么教训？

读一读教育部考试中心发布的"全国硕士研究生入学统一考试数学考试分析"，教育部考试中心针对每年考生现状，对考生提出"思考与建议"，这几年来，多次建议考生：

"注重数学基础。在阅卷中发现一些考生在答题的过程中出现很多很初等的错误，这是基本功不扎实的表现，可能是考生在复习中存在的偏差，一些考生在复习时过分追求难题，而对基本概念、基本方法和基本性质重视不够，投入不足。从试题可以看出，基本概念、基本方法和基本性质是考查的重点。因此要注重基础是复习的方向，要求考生不仅能明确概念的要素、性质和基本特征，还要理解概念与性质的内涵与外延。"

教育部考试中心为备考生提出了复习的方向，这是提高考试成绩的根本途径。

针对上述问题，本书作者确定为备考生提供一套既有针对性又有特色的考研应试对策书。目的是能提高备考生复习效率，引导备考生把握住正确的复习方向，达到提高考试成绩的效果。本书作者参加过多种层次的考试命题，多年来参加研究生入学考试辅导工作。本书作者曾逐年对数学教学大纲、考试大纳进行对照研究，对历年研究生入学考试数学试题进行分析。基于对研究生入学考试的性质、命题指导思想的认识、对试题题型与内容及难度关系的研究，针对考生中出现的普遍问题及学生学习数学中的常见问题，提出两个现实又有普遍意义的问题：

一、明确考试的性质，了解命题的指导思想，对于坚定把握复习的方向有何意义？

对此希望考生明确以下五点：

1. 全国硕士研究生入学考试具有两个功能：一是选拔功能；二是从考试的测量功能上看，它又是水平考试，用来测量考生是否达到一定的水平。因此，命题不以教学大纲或某一指定的教材为依据，而是以考试大纲为依据。考试大纲规定的考试内容和考试要求与教学大纲不完全相同。教学大纲中规定的有些内容并不作考查，而考试大纲中的某些考试要求略高于教学要求。

2. 全国硕士研究生入学考试的命题指导思想是坚持两个"有利于"，即：一是有利于国家对高层次人才的选拔；二是有利于数学教学质量的提高。因此，要求数学考试试题的编制能综合高等学校的教学实际，考试水平既能反映教学的实际水平，也能指导研究生新生明确应当具备的知识和能力。同时，正确利用这根"指挥棒"引导高校教学向培养学生应用数学能力的方向发展，使得学生学而有用、学而会用，对促进教学质量的提高起到积极的促进作用。

3. 硕士研究生入学考试的数学试题以考查数学基本概念、基本方法和基本原理为主，并在这个基础上加强对考生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想像力和综合所学知识解决实际问题能力的考查。

试题从知识内容来说有覆盖面较大的特点；从其题型与难度来说有以下特点：

填空题　用于考查“三基”及数学重要性质。一般来说，这类考题不是省去解答过程的大计算题，而以中等难度的试题为主。

选择题　主要是考查考生对数学概念、数学性质的理解，并考查学生能否进行简单推理、判定和比较。一般不出纯粹的计算题。

综合题　考查的是知识之间的有机的结合。

应用题　一般结合与考生不同专业均相关的背景知识，避免出现不公平性。

4. 命题有明确的共性，即保持历年试题难度的稳定性。

5. 对于数学考试，难度在0.3以下的为难题，难度值在0.3~0.8之间的视为中等难度的试题，难度为0.8以上的视为易题，试卷难度一般控制在0.5左右。

明确上述五点，就能清楚地理解“注重基础是复习的方向”。

二、一个较现实的问题是：如果在复习过基本知识之后，面对一些选出的往年试题，觉得几乎个个题目都遇到困难，是否深深地伤害了你的自信心？如果面对一些选出的往年试题，你每道题几乎都能入手，又能否说明你已经较好地掌握了基本知识？如果你完整地演算了一份往年考试试卷，自己评定出成绩之后，是否你能依此判断出掌握知识的程度如何？在以后的时间内成绩还有多少提升空间？

目前全国有十几种版本的考研真题汇编，但是多数不可能帮助备考生解决上述问题。我们对这些问题进行了深入的研究，积多年教学与考研辅导经验，共同的认识是：

学习往年考试真题时，要考查这个题目的知识点、解题思路、特殊的解题技巧、通常可能出现的运算错误、题目可能的变化形式、题目的难度系数等。以便对这个题目有全面的了解，知道它在试卷中的作用。

经过这样训练之后，当你遇到的几个题目，它们的难度系数都为0.2~0.3，即使你几乎每个题都遇到困难，也不至于伤害你的自信心。如果这几个题目难度系数都为0.6~0.7，即使你基本上能上手，也不会过于盲目乐观。当你做完一套完整试卷之后，你可以对照前面提出的问题，检查自己的试卷，判定自己掌握基本知识的程度，找出问题的症结，明确努力的方向，确定出自己成绩可能提升的空间。

本书作者在上述共识的基础上，参考教育部考试中心历年《硕士研究生入学考试数学试卷分析》、《数学试题编制实例分析》，结合多年参加考研阅卷及考研辅导的积累资料，以编写出考研辅导的珍品辅导书为目的，使本书体现以下几个特点：

1. 归纳内容概要，分析各部分知识的基本问题，归纳基本运算方法，以利于备考生理出知识框架。

2. 对例题给出了解答，分析了解题思路。对部分例题给出了考生的典型运算错误、指出错误产生的原因，以利于备考生防范。

3. 对部分例题给出了特殊解题技巧，或例题可能变化的形式，或对例题中某些条件的作用进行解析：可能由此得出隐含条件；也可能是为了达到降低考试难度的目的，故意放宽已知条件，即明确题中给出的条件是不是“多余”条件或“宽松”条件等等。有利于备考生深入复习。

4. 给出了近年来试题难度系数，以利于备考生在复习时，检查自己对知识掌握的程度。

例题中的难度系数都是历年来教育部考试中心发布的考生的真实数据。读者也可以分析其余未注明难度值的题目，从而悟出应该如何对待？

简言之，各部分知识的基本问题及基本运算方法的归纳、总结、解题思路、典型运算错误、特殊解题技巧、题目的变式、题设条件的解说、试题的难度系数及由性质、概念的内涵、外延而导出的一些有效解题技巧，这些构成了本书的特色，成为本书的亮点。这些内容包含着作者多年研

究教学、研究考研试题的研究成果，是备考生不可多得的复习资料。这些知识及解题思路是通常辅导书中少见，但对备考生是有很大帮助的。

本书概率与数理统计部分，由南开大学周概容教授执笔；微积分部分，由北京航空航天大学徐兵教授执笔；线性代数部分，由南开大学肖马成教授执笔。三人都在近20年期间参加了教育部考试中心的命题工作。作者们深信，只要读者认真学习此书，一定能在考试中取得好成绩。

作　者

于2010年4月

目　录

第一篇　微　积　分

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇 微 积 分

第一章 函数、极限与连续性

1.1.1 函 数

一、内容概要

(一)函数的定义

定义 1 对变量 x 在允许范围内的每一个确定的值,变量 y 按照某个确定的规则总有相应的值与之对应,则称 y 为 x 的**函数**,记为 $y=f(x)$.

常称 x 为**自变量**,y 为**函数**. 称使函数有定义的值的全体为函数的**定义域**. 函数概念有两个基本要素:定义域、对应规则(或称依赖关系). 常见的问题有:函数符号的运用问题. 此类问题可分为三类:

(1)由函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的表达式,求函数 $f[g(x)]$ 的表达式. 这类问题相当于已知函数 $y=f(u)$,$u=g(x)$,求复合函数 $f[g(x)]$.

(2)已知 $f[g(x)]$ 的表达式,求 $f(x)$ 的表达式. 这类问题的求解有两种途径:

①令 $u=g(x)$,从中反解出 $x=\varphi(u)$,求出 $f(u)$ 的表达式,再将 u 换为 x,即得 $f(x)$ 的表达式.

②将 $f[g(x)]$ 的表达式凑成 $g(x)$ 的函数关系式,然后将所有 $g(x)$ 的位置换为 x,则得 $f(x)$.

(3)已知 $f(x)$ 和 $f(g(x))$ 的表达式,求 $g(x)$. 这类问题是由复合函数的表达式来求"中间变量".

(二)函数的性质

1. 单调性

定义 2 设 $y=f(x)$ 在某区间内有定义,如果对于该区间内任意两点 $x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)<(>)f(x_2)$,则称 $y=f(x)$ 在该区间内**单调增加(减少)**.

单调增加与单调减少统称为**单调**. 函数的单调性不能脱离区间而言. 如果没有指明区间而说"$f(x)$ 为单调函数",总要理解为 $f(x)$ 在其定义区间上为单调函数.

判定函数 $y=f(x)$ 单调性的常见方法:

(1)依定义判定 在给定的区间内任取两点 $x_1<x_2$,比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$. 如果总有 $f(x_2)-f(x_1)>0$,则 $f(x)$ 在该区间内单调增加;如果总有 $f(x_2)-f(x_1)<0$,则 $f(x)$ 在该区间内单调减少.

(2)依导数的符号判定 如果在某区间内总有 $f'(x)>0$,则 $f(x)$ 在该区间内单调增加;如果在某区间内总有 $f'(x)<0$,则 $f(x)$ 在该区间内单调减少. 通常都用第二种方法判定(留待第二章介绍).

2. 奇偶性

定义 3 设 $y=f(x)$ 的定义区间 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则有 $-x\in D$),如果对于 D 内任意点 x,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为 D 内的**偶函数**;如果恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为 D 内的**奇函数**.

奇函数的图形关于原点对称;偶函数的图形关于 y 轴对称. 两个奇(偶)函数之和仍为奇(偶)函数;两个奇(偶)函数之积必为偶函数;奇函数与偶函数之积必为奇函数. 判定函数奇偶性的方法是利用定义或上述性质.

3. 周期性

定义 4 若存在 $T>0$,对于任意 x,恒有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为**周期函数**. 使得上述关系式成立的最小正数 T,称为 $f(x)$ 的**最小周期**,简称为函数 $f(x)$ 的**周期**.

并不是每个周期函数都有周期.

4. 有界性

定义 5 设 $y=f(x)$ 在某区间内有定义. 若存在 $M>0$,对于该区间内任意的 x,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在该区间内为**有界函数**.

如果没有指明区间,而是说"$f(x)$ 为有界函数",总要理解为 $f(x)$ 在其定义区间内为有界函数.

(三)初等函数

1. 反函数

定义 6 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_x，值域为 D_y. 若对 D_y 中的每一个值 y，通过关系 $y=f(x)$，有值 x 与之对应，这就建立了 x 与 y 之间的函数关系 $x=\varphi(y)$，常称 $x=\varphi(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**. 习惯上常将 x 作为自变量，将 y 作为因变量，因此，需将 $x=\varphi(y)$ 中的 y 换为 x，将其中的 x 换为 y，从而得到 $y=\varphi(x)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数.

求反函数的一般步骤为：

(1)在 $y=f(x)$ 中将 y 作为已知量，解出 x，即得 $x=\varphi(y)$.

(2)在 $x=\varphi(y)$ 中交换 x,y 的位置，即将 x 换为 y，将 y 换为 x，则可得 $y=f(x)$ 的反函数 $y=\varphi(x)$.

反函数图形的特点　函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=\varphi(x)$ 这两条曲线在 Oxy 坐标面上关于直线 $y=x$ 对称.

2. 基本初等函数

幂函数　$y=x^\mu$　(μ 为实数)；

指数函数　$y=a^x$　($a>0,a\neq1$)；

指数函数　$y=\log_a x$　($a>0,a\neq1$)；

三角函数　$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$；

反三角函数　$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$.

定义 7 上述五类函数统称为**基本初等函数**.

3. 复合函数

定义 8 若对于 x 在某一范围中的每一个确定的值，依据一个确定的规则总有 u 的值与之对应 $u=g(x)$，而对于 u 的此确定值，y 按某确定的规则有值 $y=f(u)$ 与之对应，则称 y 为 x 的**复合函数**，常记为 $y=f(g(x))$. 称 x 为自变量，u 为中间变量，y 为函数.

4. 初等函数

定义 9 由常数及基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合而成的，并能用一个式子表示的函数，称为初等函数.

二、基本问题与基本运算方法

(一)基本问题

1. 函数符号的运用问题，包括分段函数、反函数、可变上(下)限积分形式的函数、可变限二重积分等.

2. 讨论函数的基本性质.

(二)基本运算方法

1. 函数符号的运用.

2. (1)判定函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的有界性，常利用连续函数在闭区间上的最大(小)值定理.

(2)判定函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的有界性，常利用连续函数在闭区间上的最大(小)值定理，并判定 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$.

(3)求函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域，常常可以利用求 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值来确定.

3. 判定函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的单调性，常利用 $f'(x)$ 的符号来确定.

4. 判定函数 $f(x)$ 的奇偶性与周期性，常利用定义与性质来确定.

三、范例解析

近年来单独考查函数的题目已不多见，基本都是在一些综合性题目中，考查函数符号或判定函数的状态. 这些函数可能是导函数、原函数、可变限积分表示的函数等.

例 1 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，在区间 $[0,2]$ 上，$f(x)=x(x^2-4)$，若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$，其中 k 为常数. 写出 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上的表达式；

解析 由于题设中只给出了在 $[0,2]$ 上 $f(x)$ 的解析表达式，欲求 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上的表达式，可以考虑变换，将 $[-2,0]$ 上的变量 x 变到 $[0,2]$ 上的新变量.

当 $-2\leqslant x\leqslant0$，可得 $0\leqslant x+2\leqslant2$. 设 $y=x+2$，因此当 $-2\leqslant x\leqslant0$ 时，$0\leqslant y\leqslant2$，从而

$$\begin{aligned}f(x)&=kf(x+2)=kf(y)=kf(y^2-4)\\&=k(x+2)[(x+2)^2-4]=kx(x+2)(x+4).\end{aligned}$$

例 2 若$f(x)=e^{x^2}$,$f(\varphi(x))=1-x$,且$\varphi(x)\geqslant 0$,求$\varphi(x)$并求出它的定义域.

解析 所给问题为已知复合函数的表达式反过来求"中间变量"的问题.求解的关键是将$f[\varphi(x)]$的表达式转化为$\varphi(x)$的表达式形式.注意到$f(\varphi(x))=e^{\varphi^2(x)}$,且$f(\varphi(x))=1-x$,可得$e^{\varphi^2(x)}=1-x$,两端取对数解得

$$\varphi^2(x)=\ln(1-x),\varphi(x)=\pm\sqrt{\ln(1-x)}$$

由于$\varphi(x)\geqslant 0$,可得

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$$

进而可得其定义域为$x\leqslant 0$.

练　习　题

1. 试回答下列问题:

(1)若两个函数都是某个区间上的单调增加函数,它们的乘积是否仍为该区间上的单调增加函数?

(2)周期函数是否必定有周期?

(3)$y=\sin n$(n为自然数)是否是以2π为周期的函数?

2. 设$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$则$f(f(x))=$______;$f[f(f(x))]=$______.

3. 设函数

$$g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}\quad f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

则$g(f(x))=$______.

4. 设$y=\begin{cases}x, & x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, & 4<x,\end{cases}$则其反函数为______.

练习题参考解答

1. (1)否;(2)否;(3)否　2. 1;1.　3. $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　4. $y=\begin{cases}x, & x<1,\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16,\\ \log_2 x, & x>16.\end{cases}$

1.1.2 极　　限

一、内容概要

(一)极限的定义　　极限描述了在给定的过程中,函数的变化趋势(性态).极限值为某个确定的常数.

1. 数列的极限

定义 1 如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在正整数N,当$n>N$时,恒有$|x_n-a|<\varepsilon$成立,则称常数a为数列$\{x_n\}$当n趋于无穷时的**极限**.记为$\lim\limits_{n<\infty}x_n=a$.

2. 函数的极限

定义 2 设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义.如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在$\delta>0$使得对于满足$0<|x-x_0|<\delta$的一切x,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的**极限**.记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

定义 3 如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在$N>0$,使得对于满足$|x|>N$的一切x,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数A为$f(x)$当$x\to\infty$时的**极限**.记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

3. 左极限与右极限　　在$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的定义中,把$0<|x-x_0|<\delta$改为$x_0-\delta<x<x_0$,那么$A$就称为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的**左极限**,记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\text{ 或 }f(x_0^-)=A$$

类似地,在$\lim\limits_{x\to x0}f(x)=A$的定义中,把$0<|x-x_0|<\delta$改为$x_0<x<x_0+\delta$,那么$A$就称为$f(x)$当$x\to x_0$时的**右极限**,记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^+)=A$$

在$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$的定义中,把$|x|>N$换为$x>N$,那么$A$就称为$f(x)$当$x\to+\infty$时的极限,记为$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$. 类似地,在$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$的定义中,把$|x|>N$换为$-x>N$,那么$A$就称为$f(x)$当$x\to-\infty$时的极限,记为$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

(二)无穷小量与无穷大量

定义4 如果$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0$,那么就称函数$f(x)$当$x\to x_0(x\to\infty)$时为**无穷小量**(或称**无穷小**).

当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时,对于任意给定的正数M,总存在一个时刻,自这个时刻之后,总有$|f(x)|>M$,那么就称$f(x)$当$x\to x_0(x\to\infty)$时为**无穷大量**(或简称**无穷大**).

(三)极限的性质

性质1 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$,则必定存在$x_0$的某邻域,在该邻域内任何异于$x_0$的点$x$处,恒有$f(x)>0$.

性质2 若$f(x)\geqslant 0$,且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,则必有$A\geqslant 0$.

性质3 $f(x)$在点x_0处极限存在的充分必要条件是$f(x)$在点x_0处的左极限与右极限都存在,且相等,此时三者值相同.

(四)无穷小量的性质

为了简便,首先约定下列性质中所讲的无穷小量与无穷大量是指在同一过程. 在性质的叙述中省略不提.

性质4 有限个无穷小量之和仍为无穷小量.

性质5 有界函数与无穷小量之积仍为无穷小量. 又称为极限基本定理.

性质6 有限个无穷小量之积仍为无穷小量.

性质7 若$f(x)$为无穷大量,则其倒数$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小量;若$f(x)$为无穷小量,且$f(x)\neq 0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大量.

性质8 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$的充分必要条件是$f(x)=A+\alpha$,其中$\alpha$当$x\to x_0$时为无穷小量.

无穷小量阶的比较 下面定义中极限过程换为$x\to\infty$时也成立.

定义5 设$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta=0$,

若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$,则称在$x\to x_0$时,$\alpha$**为较**$\beta$**高阶无穷小量**,常记为$\alpha=o(\beta)$.

若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$,则称在$x\to x_0$时,$\alpha$**为较**$\beta$**低阶无穷小量**.

若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=A\neq 0$,则称在$x\to x_0$时,$\alpha$与$\beta$为**同阶无穷小量**.

若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$,则称在$x\to x_0$时,$\alpha$与$\beta$为**等价无穷小量**,常记为$\alpha\sim\beta$.

性质9 若当$\underset{(x\to\infty)}{x\to x_0}$时,$\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$,且$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha'}{\beta'}$存在,则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

(五)极限的四则运算 设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$.

性质10 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B$.

性质11 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\cdot B$.

推论 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,$n$为自然数,则有$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=A^n$.

性质12 若$B\neq 0$,则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{A}{B}.$$

上述运算法则在$x\to\infty$时也成立.

(六)极限存在的准则 **准则Ⅰ 夹逼准则**

(1)当x在x_0的某去心邻域内(或$|x|>M$时),有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$$

成立;

(2)若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x)=A$,则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)$存在,且等于 A.

准则Ⅱ 单调有界数列必有极限.

(七)两个重要极限 由两个准则可以得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e},\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},\ \lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=\mathrm{e}$$

后面三个极限属于同一类型.

二、基本问题与基本运算方法

(一)基本问题

1. 求极限与极限性质的问题.
2. 无穷小量阶的比较.

(二)基本运算方法

1. 利用连续函数性质求极限.

(1)若$f(x)$在点 x_0处连续,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

(2)若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$, $f(u)$在点 u_0处连续,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0}g(x))$.

2. 利用极限的四则运算法则求极限.
3. 利用两个重要极限公式求极限.
4. 利用等价无穷小量代换简化运算.

(三)常见的等价无穷小量代换:当 $x\to 0$ 时

$$\sin x\sim x,\ \tan x\sim x,\ \arcsin x\sim x,\ \arctan x\sim x,$$

$$\ln(1+x)\sim x,\ \mathrm{e}^x-1\sim x,\ 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\ \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x.$$

5. 利用无穷小量性质求极限. 当 $b_0\neq 0$ 时,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0, & m<n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

6. 利用极限的概念与性质求极限.
7. 求分段函数在分段点处的极限时,当函数在分段点两侧表达式不同时,需利用左极限与右极限.
8. 利用洛必达法则求极限.
9. 利用定积分定义求极限.
10. 利用极限运算进行无穷小量阶的比较.

三、范例解析

1. 概念与性质

例 1 如果$\{u_{2n}\}$和$\{u_{2n+1}\}$都以 A 为极限,是否必定有$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$.

解析 如果$\lim\limits_{n\to\infty}u_{2n}=A$,且$\lim\limits_{n\to\infty}u_{2n+1}=A$,则必有$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$.

由极限定义可知,任给$\varepsilon>0$,必定存在自然数 N_1,N_2. 当$2n>N_1$时,总有$|u_{2n}-A|<\varepsilon$. 当$2n+1>N_2$时,总有$|u_{2n+1}-A|<\varepsilon$. 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,则当 $n>N$ 时,总有$|u_n-A|<\varepsilon$. 因此$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$.

以后可以将这个结论当作极限存在的充分条件使用,请读者记住此结论.

例 2 设$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$,数例$\{u_{n_i}\}$为数列$\{u_n\}$的任意一个子列,是否必定有$\lim\limits_{n_i\to\infty}u_{n_i}=A$?

解析 由极限的定义可以证明,如果数列$\{u_n\}$以 A 为极限,则它的任意一个子数列也必定以 A 为极限. 请读者自己完成其证明. 此结论以后将作为一种求极限的方法被使用. 请读者记住此结论.

例 3 检查下列运算是否正确.

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$.

解 由于$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$，因此$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}}{1+\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}}=1.$

解析 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$是正确的，但是这不意味着$\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}=0$. 由于$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$，可得$\lim\limits_{x\to 0^-}2^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}2^{\frac{1}{x}}\xlongequal{令t=-x}\lim\limits_{t\to 0^-}2^{-\frac{1}{t}}=\infty$，因此$\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}$不存在，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$不存在，且不为无穷大量.

2. 利用极限性质求极限

例 4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$________.

解析 令$x_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}$，当$n=2k$为偶数时，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^{(-1)^{2k}}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2k+1}{2k}\right)=1;$$

当$n=2k-1$为奇数时，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2k-1+1}{2k-1}\right)^{(-1)^{2k-1}}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2k}{2k-1}\right)^{-1}=1,$$

可知$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=1$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$（见例 1），即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=1.$$

本题难度系数 0.871.

本题解题技巧 利用数列极限的性质：若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

典型运算错误 有些考生误认为$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}$为重要极限形式，而导致错误.

3. 利用连续函数性质求极限

例 5 设常数$a\neq\frac{1}{2}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$________.

解析 根据连续函数的性质，有

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)\cdot\frac{1}{1-2a}}$$

$$\xlongequal{(*)}\ln\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)\cdot\frac{1}{1-2a}}=\ln e^{\frac{1}{1-2a}}=\frac{1}{1-2a}\left(a\neq\frac{1}{2}\right).$$

本题难度系数 0.61.

本题解题技巧 如果将重要极限公式$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$推广到

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx+c}=e^{ab},\quad \lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}+c}=e^{ab},$$

并将推广之后的表达式当作公式使用，则在上述（ * ）处，直接利用上述结论，免掉变形，即

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n=\ln\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n=\ln e^{\frac{1}{1-2a}}=\frac{1}{1-2a}.$$

4. 利用极限的四则运算法则求极限

例 6 设函数$f(x)=a^x(a>0$，且$a\neq 1)$则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=$________.

解析 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln(a\cdot a^2\cdot\cdots\cdot a^n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln a^{1+2+\cdots+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\ln a$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}\ln a=\frac{\ln a}{2}.$$

本题难度系数 0.78.

例 7 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$________.

解析 所给极限为“$\dfrac{0}{0}$”型,不能直接利用极限四则运算法则.

本例求极限的函数分子中含有根式,且在 $x\to1$ 时,带有根式的分子表达式极限为零.对于分子含有根式的函数的求极限问题,通常可以先进行分子有理化,使恒等变形以后的表达式中带有根式的因子的根限不为零,能对其单独求极限.将求极限的函数恒等变形,可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}&=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{(x^2+x-2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(3-x)-(1+x)}{(x+2)(x-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}\\&=\lim_{x\to1}\frac{-2(x-1)}{(x+2)(x-1)}\cdot\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}}=\frac{-\sqrt2}{6}.\end{aligned}$$

本题难度系数 0.79.

说明 本题也可以利用洛必达法则求解.

例 8 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt n}-\sqrt{n-\sqrt n})=$________.

解析 所给极限为“$\infty-\infty$”型,且两个表达式均含有根式.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt n}-\sqrt{n-\sqrt n})&=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3\sqrt n}-\sqrt{n-\sqrt n})(\sqrt{n+3\sqrt n}+\sqrt{n-\sqrt n})}{\sqrt{n+3\sqrt n}+\sqrt{n-\sqrt n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt n}{\sqrt{n+3\sqrt n}+\sqrt{n-\sqrt n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt n}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt n}}}=2.\end{aligned}$$

5. 利用两个重要极限公式求极限

例 9 极限$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$________.

解析 当 $x\to\infty$ 时,$\dfrac{2x}{x^2+1}\to0$,因此由等价无穷小量代换可知 $\sin\dfrac{2x}{x^2+1}\sim\dfrac{2x}{x^2+1}$,所以

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}=2.$$

本题也可以利用重要极限公式求解

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2x}{x^2+1}}{\frac{2x}{x^2+1}}\cdot x\cdot\frac{2x}{x^2+1}=2.$$

本题难度系数 0.649.

例 10 求未知常数 c,已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,且

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)],$$

解析 由于

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{c}{x}}{1-\frac{c}{x}}\right)^x=\mathrm{e}^{2c},$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim_{x\to\infty}f'(\xi)=\lim_{\xi\to\infty}f'(\xi)=\mathrm{e},\xi\in(x-1,x),$$

可知 $e^{2c}=e, c=\dfrac{1}{2}$.

本题难度系数 0.58.

典型运算错误 该题没得满分的，几乎都是在求右端极限时出现错误，主要有以下错误：

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)}=\lim_{x\to\infty}f'(x)=e.$$

上述错误是概念性错误. 错用了导数的定义(见 1.2.1). 运算中利用了微分中值定理(1.2.2).

例 11 设 $0<a<b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=($　　$)$.

A. a　　B. a^{-1}　　C. b　　D. b^{-1}

解析 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{a}\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}$. 由于 $0<a<b$，令 $x=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x=0$.

$$原式=\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{n}}=\frac{1}{a}.$$

因此选 B.

本题难度系数 0.647.

6. 利用等价无穷小量代换简化运算

例 12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$________.

解析 所给极限为"$\dfrac{0}{0}$"型，不能直接利用极限四则运算法则. 先进行等价无穷小量代换，再分组，可简化运算.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{2}.$$

本题难度系数 0.66.

说明 本题不能使用洛必达法则求解，它不满足洛必达法则的条件.

7. 利用无穷小量的性质求极限　　常用的无穷小量性质有：有界变量与无穷小量之积为无穷小量. 无穷大量的倒数为无穷小量，等等.

例 13 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

解析 所给极限为"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型问题，不能利用极限四则运算法则，也不能利用洛必达法则求解. 通常对无穷大量运算的基本原则是转化为无穷小量运算.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}\overset{(*)}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+x+1}{-x\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$$

$$\overset{(**)}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=1.$$

本题难度系数 0.45.

本题解题技巧 在上述(＊)处，将无穷大量的运算转化为无穷小量运算.

典型运算错误 上述运算(＊)处，忽略了条件 $x\to-\infty$，得出

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+x+1}{x\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}},$$

导致了错误. 当 $x\to-\infty$,且 $|x|$ 足够大时,$\sqrt{x^2}=|x|=-x$,这是解题中的关键. 相当多的考生在此处出现错误,误答为 3.

说明 讨论以下变式:

变式 1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=$ ________. 此变式较例 13 简单,可以免掉出现 $\sqrt{x^2}$ 去掉根号时产生的符号错误.

变式 2 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$. 此变式较例 13 复杂,需分别讨论 $x\to-\infty$ 与 $x\to+\infty$ 两种情形.

例 13 的难度位于变式 1 与变式 2 之间.

8. 利用极限的概念与性质求极限

例 14 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$,则 $a=$ ________,$b=$ ________.

解析 所给问题为求极限的反问题. 所给表达式为分式,分子的极限 $\lim\limits_{x\to0}\sin x\cdot(\cos x-b)=0$,而表达式的极限存在,因此分母的极限应为零,即

$$\lim_{x\to0}(e^x-a)=1-a=0,$$

可得 $a=1$,所给问题化为

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}(\cos x-b)=1-b=5,$$

可得 $b=-4$.

本题难度系数 0.535.

9. 求分段函数在分段点处的极限

例 15 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解析 注意所求极限的函数在点 $x=0$ 处间断,且在 $x=0$ 的两侧表达式不相同,因此应考虑利用左极限与右极限来判定极限是否存在. 由于

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty,\ \lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty, \tag{$*$}$$

因此

$$\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty,\ \lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0.$$

当 $x>0$ 时,$|x|=x$;当 $x<0$ 时,$|x|=-x$,可得

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1,$$

故

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1.$$

本题难度系数 0.64.

典型运算错误 ①将 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$ 分成两个极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}$ 和 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{|x|}$ 讨论. 由于这两个极限都不存在,因此误答为原题极限不存在. ②一些考生没有在($*$)处分左极限、右极限讨论,误认为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=\infty$,$\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}=\infty$.

10. 利用极限运算进行无穷小量阶的比较

例 16 设当 $x\to0$ 时,$(1-\cos x)\cdot\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小,而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小,则正整数 n 等于( ).