高职高专机械类专业系列丛书

工程数学

主编 陈雪芳 主审 陈家瑾

丛书主编 姜 左

东南大学出版社

高职高专机械类专业系列丛书

工程数学

主　编　陈雪芳
主　审　陈家瑾

东南大学出版社
·南京·

内 容 提 要

全书共十二章，其中第一、二、三、四章属于线性代数部分，包括 n 阶行列式、向量组的线性相关性、矩阵和线性方程组等内容；第五、六、七章属于概率论与数理统计部分，包括经典概率、假设检验和一元线性回归等内容；第八、九章属于积分变换部分，包括傅里叶变换和拉普拉斯变换等内容；第十、十一、十二章属于复变函数部分，包括复数与复变函数、解析函数和复变函数的积分等内容。每章后有习题，书后附有习题参考答案。

本书是高等职业院校机械类专业的教材，同时也可作为工程专科、职工大学、业余大学机械类专业的教材，亦可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学/陈雪芳主编.—南京:东南大学出版社，2001.6

高职高专机械类系列丛书

ISBN 7-81050-672-2

Ⅰ.工... Ⅱ.陈... Ⅲ.工程数学 Ⅳ.TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 031560 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

出版人:宋增民

江苏省新华书店经销 华东有色地研所印刷厂印刷

开本:787mm×1092mm 1/16 印张:11.25 字数:300 千字

2001 年 6 月第 1 版 2001 年 6 月第 1 次印刷

印数:1~3000 册 本册定价:22.00 元

(全套总定价:276.00 元)

出版说明

科教兴国，教育先行。当前，高等教育正处在深化改革阶段，高等职业教育也迎来了新的迅猛发展时期。高等职业教育是在具有高中文化水平的基础上，为生产、建设、管理、服务等第一线培养高级实用型技术人才和管理人才的专门教育。根据教育部《关于加强高职高专教育人才培养工作的意见》，各高职高专学校都对本校的教学计划、课程体系、教学内容作了相应的调整。根据突出应用性、实践性的原则重组了课程结构，教学内容上突出了基础理论教学以应用为目的，以必须、够用为度；专业课教学加强了针对性和实用性。因为高职教育的人才培养目标和规格不同于普通高等教育，因而其教材应具有高职教育的基本特点。目前高等职业教育的教材建设已经成为一个亟待解决的共性问题。在东南大学出版社的支持下，苏州职业大学、常熟高等专科学校、常州工学院、南京工业职业技术学院等学校中的一批有扎实理论基础和丰富实践经验的教师，怀着强烈的责任感和极大的热情编写了一批相应的配套教材，他们具有较强的教学改革意识，决心为高职高专事业的发展作出一些贡献。

本丛书由东南大学博士生导师林萍华教授、博士生导师易红教授担任主审。

这批教材将分期分批出版，第一辑出版的教材有：

· 机械工程基础
· 机械制造技术
· 机械设计
· 现代质量管理概论
· 现代制造技术
· 机械设备控制技术
　　(1)机械设备液压气动控制技术
　　(2)数控技术
· 测试技术
· 工程力学
· 工程数学
· 机械制图

限于水平和经验，加之时间匆促，这批教材还会有不足之处，诚望使用本教材的教师和学生能积极提出批评和建议，以便再版时改进。

高职高专机械类专业系列丛书 编委会

2000年8月

高职高专机械类专业系列丛书（第一辑）
编审委员会

主任委员　林萍华　易　红

副主任委员　（按姓氏笔划为序）

郑志祥　缪协兴

委　　员　（按姓氏笔划为序）

王培羲　孙序泉　余瑞芬　严苏碚

陈家瑾　郑志祥　林萍华　袁雪枚

韩玉启　缪协兴

责任编委　李　玉　朱经邦

编写委员会

主　编　姜　左

副主编　（按姓氏笔划为序）

丁加军　吕慧瑛　李江蛟　林朝平

程宜康

委　员　（按姓氏笔划为序）

丁加军　王伟麟　吕慧瑛　沈中城

李江蛟　吴永祥　陈雪芳　林朝平

姜　左　徐冉丹　陶亦亦　程宜康

魏宣燕

前言

本书根据高职高专机械类专业系列丛书编写的原则和要求，在认真分析高职教育人才培养特点的基础上，以“必须”、“够用”为原则，在保证教材系统性的前提下，着重于数学方法的介绍，突出应用性和工具性，省略(或简化)公式、定理的推导与证明，内容简洁，选例实用，特别适合高等职业类学校机制、机电类专业作为教材使用(可根据需要选取相应的章节)，也可供大专院校的师生和机电工程技术人员参考之用。

本书涉及线性代数、概率论与数理统计、积分变换、复变函数四方面，主要包括：n 阶行列式、向量组的线性相关性、矩阵、线性方程组、经典概率基础、假设检验、一元线性回归、傅里叶变换、拉普拉斯变换、复数与复变函数、解析函数、复变函数积分等内容。

在编写过程中，得到苏州职业大学高义中老师的大力帮助和悉心指导，苏州城建环保学院陈家瑾老师认真审阅了全书，在此表示诚挚的感谢！

由于编者水平有限，书中一定还存在不少缺点和不妥之处，期望得到读者的批评指正。

编　者

2001 年 5 月

目　　录

1 n 阶行列式

1.1 n 阶行列式的概念

先从大家熟悉的三阶行列式

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

来看看行列式的结构,我们把行列式中横排称作行(row),竖排称作列(column),把位于第 i 行第 j 列的那个数字(也称为元素)记为 a_{ij},下标第一位 i 表示它位于第 i 行,下标第二位 j 表示它位于第 j 列。今后我们总采用这种记号来表示行列式的各元素。

从三阶行列式的展开式,我们至少可看出以下几点:

(1) 三阶行列式由 3 行、3 列组成,每一行或每一列均有 3 个元素,共 $3^2 = 9$ 个元素排成,两边各用一条竖线框起来;

(2) 三阶行列式 Δ_3 是一个数;

(3) Δ_3 由 $3! = 6$ 项算出,其中每一项都是 3 个元素的乘积,任何一项的这 3 个元素位于不同行且不同列,这 6 项中有 3 项为正,有 3 项为负;

(4) Δ_3 的具体运算可用大家熟知的对角线法则做出。

现在我们把这些概念推广到 n 阶行列式,记

$$D = \Delta_n = \Delta(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

有:

(1) n 阶行列式形式上将 n^2 个元素(数) 排成 n 行、n 列,两边各用一条竖线框起;

(2) n 阶行列式 $D = \Delta_n = \Delta(a_{ij})$ 代表一个数;

(3) n 阶行列式的值,由 $n!$项的代数和算出,其中每一项都由位于不同行且不同列的 n 个元素相乘得出,当 $n > 1$ 时,取正号的项与取负号的项必相等;

(4) 当 $n = 1$ 时,$\Delta_1 = |\, a_{11} \,|$ 容易与绝对值混淆,故不用此符号;

(5) 当 $n \geqslant 4$ 时,不能用对角线相乘方法展开。

几个特殊的 n 阶行列式:

(1) 对角行列式:除一条对角线上元素不等于 0 外,其余元素全为 0,例如,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

及
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_{i,n-i+1}$$

其值在学过第 1.3 节后，就不难证明。

(2) 上(下) 三角行列式

把对角线以下所有元素全为 0 的行列式叫上三角行列式，同样把对角线以上所有元素全为 0 的行列式叫下三角行列式，例如，

$$\underset{\text{上三角}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}} \quad \underset{\text{下三角}}{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 8 & 4 \end{vmatrix}} \quad \underset{\text{上三角}}{\begin{vmatrix} 4 & 8 & 8 & 3 \\ 2 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}} \quad \underset{\text{下三角}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 8 \end{vmatrix}}$$

不论是上三角还是下三角行列式，其值与对角行列式相同。

1.2 行列式的性质

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将 D' 称为 D 的转置行列式，当然 D 也是 D' 的转置行列式。

性质 1.1 行列式与其转置行列式相等。

性质 1.2 交换行列式的任意两行(或两列)，行列式仅改变符号。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

i 行与 j 行交换

推论 若行列式中有两行(或两列)完全相同,则此行列式为0。因为将这两行(或两列)互换,行列式未变,但有 $D = -D$,故 $D = 0$。

性质1.3 行列式的某一行(或某一列)中所有元素均乘上同一数 k,等于 k 乘这个行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

第 i 行乘 k 可记为 $r_i \times k$ 或 kr_i,第 j 列乘 k 可记为 $c_j \times k$ 或 kc_j。

性质1.4 行列式中若有两行(或两列)成比例,则此行列式等于0。

设行列式中第 i 行与第 j 行成比例,就可写成 $r_i = kr_j$,在 j 行中提出公因子 k,这样 $r_i = r_j$,据性质1.2的推论此行列式为0。

性质1.5 若行列式的某一列(或行)的元素都是两数之和,如

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i} + a_{1i}') & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i} + a_{2i}') & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni} + a_{ni}') & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于两行列式之和,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}' & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

性质1.6 将行列式的某一列(或某一行)的各元素乘以同一数 k,然后加到另一列(或另一行)对应元素上去,行列式不变。我们将数 k 乘第 j 列加到第 i 列记为 $c_i + kc_j$,则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_i + kc_j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

利用上述六个性质,可以简化行列式的计算。通常把行列式化成对角行列式或三角行列式。

例 1.1 求

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

的值。

[解]

$$D\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+2r_2]{r_3+\frac{1}{4}r_2}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 6 & -5 \end{vmatrix}\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{5}{2} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-\frac{1}{3}r_3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{6} \end{vmatrix}=40$$

例 1.2 计算:

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}。$$

[解] 此行列式的特点是各列四个数之和均为 6,现将第 2、3、4 行同时加到第 1 行,提出公因子 6,然后各行减去第 1 行,如此化为三角行列式。

$$D\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}\xlongequal{r_1\text{提公因子}6}6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}} 6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix} = 6\times1\times2\times2\times2 = 48$$

1.3 行列式的展开

用定义来计算高阶行列式既繁又容易搞错，所以一般都不会用定义来计算行列式，实用的方法是将高阶行列式化为一系列二阶或三阶行列式来计算，也就是将高阶行列式按行或按列展开，为此，先引入余子式和代数余子式的概念。

在 n 阶行列式中，将元素 a_{ij} 所在的 i 行和 j 列划去后，留下的 $(n-1)$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，用 M_{ij} 表示；将 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 称作 a_{ij} 的代数余子式。

例如，三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

中，元素 a_{23} 的余子式 M_{23} 为：

$$M_{23} = \begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31},$$

代数余子式 A_{23} 为：

$$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix} = a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}。$$

定理 1.1 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$
$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$
$$(i = 1,2,\cdots,n;\ j = 1,2,\cdots,n)$$

这个定理叫做行列式按行(列)展开法则或 Laplace 展开法则。

利用上一节所述行列式的性质和本定理可简化高阶行列式的计算。

例 1.3 求

$$D = \begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&1&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$$

的值。

[解]

$$D \xlongequal[c_3+c_4]{\substack{c_1+2c_4 \\ c_2+c_4}} \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 & 2 \\ -13 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -5 & -8 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ -13 & -3 & -1 \\ -5 & -8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \\ -5 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ -5 & -8 \end{vmatrix} = 48$$

1.4 克莱姆(Cramer)法则

含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.1}$$

的解可用 n 阶行列式表示。

克莱姆法则 若线性方程组(1.1)的系数行列式 $D \neq 0$,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组(1.1)有惟一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}。 \tag{1.2}$$

式中 $D_j(j = 1,2,\cdots,n)$ 是将系数行列式 D 中的第 j 列元素用(1.1)式右端常数项代替后所得的 n 阶行列式,即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

例 1.4 用克莱姆法则解下面方程组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

[解]

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&4\\2&-3&-1&-5\\3&1&2&11\end{vmatrix}=-142$$

$$D_1=\begin{vmatrix}5&1&1&1\\-2&2&-1&4\\-2&-3&-1&-5\\0&1&2&11\end{vmatrix}=-142$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&5&1&1\\1&-2&-1&4\\2&-2&-1&-5\\3&0&2&11\end{vmatrix}=-284$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&5&1\\1&2&-2&4\\2&-3&-2&-5\\3&1&0&11\end{vmatrix}=-426$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&5&5\\1&2&-1&-2\\2&-3&-1&-2\\3&1&2&0\end{vmatrix}=142$$

于是 $x_1=\frac{D_1}{D}=1, x_2=\frac{D_2}{D}=2, x_3=\frac{D_3}{D}=3, x_4=\frac{D_4}{D}=-1$

定理 1.2 若线性方程组(1.1)的系数行列式 $D\neq 0$,则(1.1)一定有解,且解是惟一的。

定理 1.3 若线性方程组(1.1)无解或有两个不同的解,则其系数行列式 $D=0$。

定义 1.1 若线性方程组(1.1)的右端项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为0,则称(1.1)为非齐次方程组;若全为0,则称(1.1)为齐次方程组。

对于齐次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}\tag{1.3}$$

有下面定理:

定理 1.4 若齐次方程组(1.3)的系数行列式 $D\neq 0$,且(1.3)只有零解,即只有 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 的一组解,这组解称作平凡解(trivial solution)。如果有一组不全为0的数是(1.3)的解,就将这组解称作(1.3)的非零解或非平凡解(untrivial solution)。

定理 1.5 若齐次方程组(1.3)有非零解,则其系数行列式必为0,即 $D=0$。

例 1.5 λ 取何值时,齐次方程组

$$\begin{cases}(5-\lambda)x+2y=0\\2x+(6-\lambda)y=0\\2x+(4-\lambda)z=0\end{cases}$$