高职高专基础课系列教材

线性代数

XIANXING DAISHU

主　编　崔树祥
副主编　张明虎　牛　铭

$\alpha_1=(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3})^T,\alpha_2=(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})^T$

重庆大学出版社

线性代数

主编　崔树祥
副主编　张明虎　牛　铭

重庆大学出版社

内 容 简 介

本书根据教育部高等学校工程专科基础课程《线性代数》教学基本要求编写，内容包括：行列式、矩阵、n 维向量与线性方程组、特征值与特征向量、二次型.

本教材阐述简洁，由浅入深，通俗易懂，注意用实例引入概念，例题和习题的选取突出实用性、代表性和启发性，书末附有习题答案.

本书可作为高职高专工科类各专业、成人高校和本科院校设置的二级技术学院各工科专业的教材，也可作为工程技术人员自学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/崔树祥主编. —重庆：重庆大学出版社，2004.6
(高职高专基础课系列教材)
ISBN 7-5624-3104-3

Ⅰ.线...　Ⅱ.崔...　Ⅲ.线性代数—高等学校：技术学校—教材
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 026664 号

线性代数
主编　崔树祥
副主编　张明虎　牛　铭
责任编辑：曾显跃　　版式设计：曾显跃
责任校对：蓝安梅　　责任印制：张立全
*
重庆大学出版社出版发行
出版人：张鸽盛
社址：重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学(A 区)内
邮编：400030
电话：(023) 65102378　65105781
传真：(023) 65103686　65105565
网址：http://www.cqup.com.cn
邮箱：fxk@cqup.com.cn (市场营销部)
全国新华书店经销
重庆师范大学印刷厂印刷
*
开本：850×1168　1/32　印张：5.75　字数：155 千
2004 年 6 月第 1 版　　2004 年 6 月第 1 次印刷
印数：1—5 000
ISBN 7-5624-3104-3/O·224　　定价：10.00 元

前言

随着科技、经济和社会的发展,对高职高专教育人才培养提出了更高的要求.高职高专教育的教学改革也在不断地深化,积极探索、编写适应高职高专工程类各专业的教材,已成为发展高职高专教育的紧迫任务.

《线性代数》课程是高职高专工程类各专业的一门重要基础课.根据教育部高等学校工程专科基础课程《线性代数》教学基本要求和《关于加强高职高专教育人才培养工作的意见》,结合编者多年讲授本课程的教学实践,为适应高职高专培养技术应用性人才的需要,我们编写了这本旨在工程专科类各专业通用的《线性代数》教材.

本教材内容包括:行列式、矩阵、n 维向量与线性方程组、特征值与特征向量、二次型.讲授本教

材全部内容，参考学时约为36学时．加“*”号的内容可根据不同专业选用．

本教材的编写力图把握以下几个方面：

1．努力体现“加强基础、强化能力、立足应用”的原则，从突出基础理论知识和体现知识的应用出发组织教学内容，基础理论以必需够用为度，以讲清概念、强化应用为教学重点，突出应用能力的培养．

2．鉴于线性代数概念多、结论多、内容抽象等特点，编写时尽量以应用实例引入概念，由具体到抽象．阐述力求通俗易懂、由浅入深，以便学生较好地理解、掌握和运用．

3．适度淡化理论体系和逻辑论证．在编写中，对重要的、证明难度不大的结论一般给出证明．对于有些证明，教师讲授时可根据实际情况选讲，或略去不讲．

4．精选例题和习题．例题和习题的选取坚持要有代表性、实用性，反映教学基本要求，有利于帮助学生加深对概念和定理的理解和运用，有利于基本方法的训练和掌握，有利于提高学生分析问题与解决问题的能力．对重点

内容选配较多的例题和习题，书末给出习题答案.

5. 考虑到高职高专工程类不同专业需求上的差异和应用上的方便，部分内容略高于课程教学基本要求，可供不同专业选用，也可供学有余力的同学自学或参考.

本教材第 1 章和第 3 章的前四节由崔树祥编写；第 2 章和第 3 章的后两节由牛铭编写；第 4 和 5 章由张明虎编写. 全书由崔树祥统稿定稿.

由于我们水平所限，教材中缺点和错误在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

2004 年 2 月

目录

第 1 章 行列式

行列式是研究线性代数的一个重要工具,在线性方程组、矩阵、二次型等问题中都要用到行列式. 本章主要介绍行列式的定义、性质及计算,最后一节将介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

1.1 行列式的定义

1.1.1 二阶行列式

在解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

时,曾引入符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

这个符号称为二阶行列式. 它由 2^2 个数排成二行二列,它代表一

种运算,运算结果等于数

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为二阶行列式的元素. 元素 a_{ij}的第一个下标"i"称为行标,表明该元素位于第 i 行;第二个下标"j"称为列标,表明该元素位于第 j 列. a_{ij}就是位于第 i 行与第 j 列交叉处的元素.

在行列式中,从左上角到右下角的对角线称为主对角线;从右上角到左下角的对角线称为副对角线. 于是,二阶行列式的值等于主对角线上两元素乘积减去副对角线上两元素乘积所得的差. 这种记忆二阶行列式定义的方法称为对角线法则.

1.1.2 三阶行列式

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

将方程组各未知量的系数记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

这个符号称为三阶行列式. 它由 3^2 个数排成三行三列,也代表一个算式,其值等于数

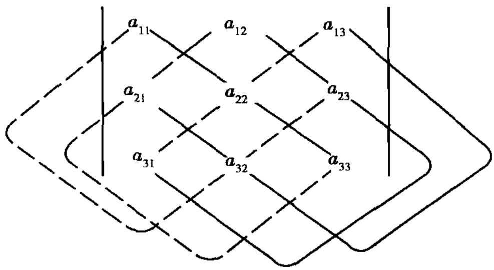
$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$.

为了便于记忆三阶行列式的值,也常用对角线法则:下图中的三条实线看做是平行于主对角线的连线,每条实线上三个元素的乘积都带正号;图中的三条虚线看做是平行于副对角线的连线,每条虚线上三个元素的乘积都带负号.



例 1.1.1　计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

解　按对角线法则有

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} &= 1\times 0\times 5+3\times 3\times 2+2\times(-1)\times 1 \\ &\quad -2\times 0\times 2-3\times(-1)\times 5-1\times 3\times 1 \\ &= 0+18-2-0+15-3 \\ &= 28.\end{aligned}$$

1.1.3　排列及其逆序数

为了给出 n 阶行列式的定义,首先简单介绍排列及其逆序数的概念.

将 n 个不同的元素排成一列,称为这 n 个元素的全排列(简称排列).

对于 n 个不同的元素,可规定各元素之间有一个标准次序. 在

这 n 个元素的任一排列中，当两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有一个逆序.

不失一般性，设 n 个元素为 $1,2,\cdots,n$，这 n 个自然数，规定由小到大为标准次序. 设

$$p_1p_2\cdots p_n$$

为这 n 个自然数的一个排列. 考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果排在 p_i 前面且比 p_i 大的元素有 t_i 个，就说 p_i 的逆序数为 t_i.

排列的所有元素的逆序数之和

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

称为这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列称为奇排列；逆序数为偶数的排列称为偶排列.

例 1.1.2　求排列 2413 的逆序数.

解　在这个排列中，元素 2,4,1,3 的逆序数分别为 0,0,2,1，所以，排列的逆序数为

$$t=0+0+2+1=3.$$

这个排列为奇排列.

1.1.4　n 阶行列式

定义 1.1.1　由 n^2 个数排成 n 行 n 列，符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式.

n 阶行列式是按规定的运算确定的一个数. 这个数是 $n!$ 项的代数和，每一项是取自不同行和不同列的 n 个数的乘积：

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中行标按自然序列 $1,2,\cdots,n$ 排列，列标 $p_1p_2\cdots p_n$ 是自然数 1，

2，…，n 的一个排列. 当 $p_1p_2\cdots p_n$ 为偶排列时，则该项前面带正号；当 $p_1p_2\cdots p_n$ 为奇排列时，则该项前面带负号. 于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

其中 t 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，$\sum$ 表示对自然数 1，2，…，n 所有排列求和.

n 阶行列式可以简记为 $\det(a_{ij})$，数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素.

当 $n=2$ 和 $n=3$ 时，读者不难验证用此定义的二阶、三阶行列式和用对角线法则定义的二阶、三阶行列式是一致的. 当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，注意与绝对值相区别.

对角线法则仅适用于二阶和三阶行列式. 对于三阶以上的行列式，用定义计算是相当复杂的，但对一些特殊的行列式可由定义直接计算.

例 1.1.3　计算 n 阶上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　由 n 阶行列式的定义，因为第一列除 a_{11} 外其余元素全为零，要得到非零项，第一列只能取 a_{11}；因为每列只取一个，每行只取一个，所以第二列只能取 a_{22}；依此类推，可得

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

由于列标的排列为 1，2，…，n，逆序数为零，故该项的符号为 $(-1)^0=1$.

同理，对下三角行列式，由本例有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地,由本例可以得到对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1.1.4 计算形如下式的对角行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 由 n 阶行列式的定义,因为 D 中可能的非零元素只有 n 个:$a_{1n},a_{2,n-1},\cdots,a_{n1}$,且这 n 个元素恰在不同的行、不同的列,所以它们的乘积 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 属于 D 的一项,而其他的项均为零.

因为乘积项 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 列标的逆序数为

$$0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},\text{所以}$$

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

由 n 阶行列式的定义和例 1.1.4 可以得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

1.2 行列式的性质

行列式的性质对于研究行列式的理论和简化行列式的计算都有着重要应用. 本节介绍行列式的性质,先给出转置行列式的定义.

定义 1.2.1 将行列式 D 的行与相应的列互换后得到的新行列式称为 D 的转置行列式,记作 D^{T}. 即若

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

由此性质可知,行列式中的行与列具有同等的地位,行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立,反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式变号.

推论 如果行列式中有两行(列)的对应元素相同,则此行列式等于零.

性质 3 如果行列式中有一行(列)的元素全为零,则此行列式等于零.

性质 4 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式.

推论 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号外面.

性质 5 行列式中如果有两行(列)的对应元素成比例,则此行列式等于零.

性质 6 如果行列式的某一行(列)的元素都是两个数的和,例如第 i 列的元素都是两数之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+b_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+b_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+b_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 7 以数 k 乘行列式的某行(列)的所有元素,然后加到另一行(列)的对应元素上,则行列式的值不变.

数 k 乘第 i 行(列)加到第 j 行(列)上,记作 $kr_i+r_j(kc_i+c_j)$. 这里 r_i 代表第 i 行,c_j 代表第 j 列.

利用行列式的性质,将行列式化为上三角行列式或下三角行列式,利用上节后两个例题的结果,可简便地求出行列式的值.

例 1.2.1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}\xlongequal[c_4+c_1]{\substack{c_2+c_1\\c_3+c_1}}\begin{vmatrix}10&2&3&4\\10&3&4&1\\10&4&1&2\\10&1&2&3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&1\\1&4&1&2\\1&1&2&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[-r_1+r_4]{\substack{-r_1+r_2\\-r_1+r_3}}10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&2&-2&-2\\0&-1&-1&-1\end{vmatrix}\xlongequal[r_2+r_4]{-2r_2+r_3}10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&0&-4&4\\0&0&0&-4\end{vmatrix}$$

$=160.$

例 1.2.2 证明

$$\begin{vmatrix}b&a&a\\a&b&a\\a&a&b\end{vmatrix}=(2a+b)(b-a)^2.$$

证明

$$\begin{vmatrix}b&a&a\\a&b&a\\a&a&b\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}2a+b&2a+b&2a+b\\a&b&a\\a&a&b\end{vmatrix}$$

$$=(2a+b)\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&a\\a&a&b\end{vmatrix}\xlongequal[-c_1+c_3]{-c_1+c_2}(2a+b)\begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&0\\a&0&b-a\end{vmatrix}$$

$=(2a+b)(b-a)^2.$

例 1.2.3 解方程

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&x&2&2\\2&2&x&3\\3&3&3&x\end{vmatrix}=0.$$

解法 1 因为