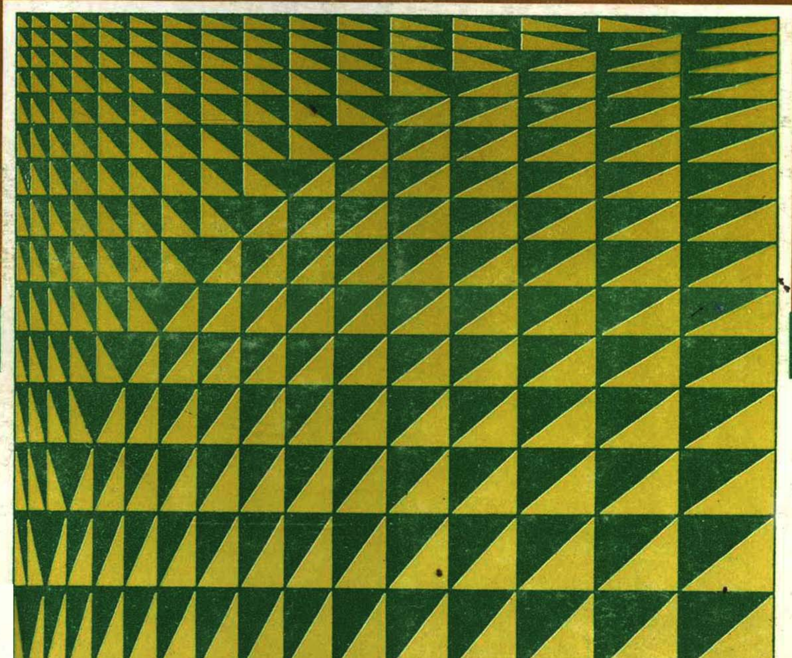
中学教师继续教育丛书

初中数学竞赛的知识与方法

沈传龙　王岳庭　编著



杭州大学出版社

初中数学竞赛的知识与方法

沈传龙 王岳庭 编著

杭州大学出版社

初中数学竞赛的知识与方法
沈传龙　王岳庭　编著
*
杭州大学出版社出版
（杭州天目山路34号）
*
浙江省新华书店发行　　浙江上虞印刷厂印刷
787×1092毫米　1/32　10印张　215千字
1992年5月第1版　　1996年1月第2次印刷
印数：13001—21000
ISBN 7-81035-204-0/O·007
定　价：9.50元

出版说明

为了配合中学教师继续教育的需要，在上海教育学院院长张家祥教授倡导下，北京、天津、上海、浙江、四川、辽宁、广东、陕西、湖北、江苏、武汉、杭州等十二省市教育学院联合发起，决定编写出版《中学教师继续教育丛书》。国家教委师范教育司对这项工作给予了热情的支持和具体的指导，并委托我社承担丛书的出版任务。

中学教师的继续教育，是指中学教师按现行学历规定合格后的非学历的着重于提高政治、业务、教育教学能力的教育，因此《丛书》不能照搬照抄大学本科生段和研究生段的课程内容，也不能等同于现行中学课本的备课资料。

《丛书》应具有科学性、先进性、适用性、针对性，应致力于学科前沿知识与基础知识同中学教育实际的结合，教育科学与心理科学同中学学科教育实际的结合。

《丛书》书目大体分为三类：一、思想政治教育和道德修养类；二、专业知识的拓宽和更新类；三、学科教育和学科心理类。其中以第三类为重点。

《中学教师继续教育丛书》设编委会，负责领导和组织《丛书》的编写工作。上海教育学院院长张家祥教授任主编，杭

州大学校务委员会副主任金锵教授任副主编。编委单位有下列院校：

天津教育学院
四川教育学院
湖北教育学院
杭州教育学院
广东教育学院
武汉教育学院
北京教育学院
陕西教育学院
辽宁教育学院
浙江教育学院
江苏教育学院
杭州大学

《中学教师继续教育丛书》的编写和出版，是一项新的探索性的工作，需要从事中学教师继续教育的同行和中学教育界的广泛支持。我们热切地期待着大家的批评、指正，以便把这套《丛书》编得更好，为提高中学教育质量，发展中学教育事业，贡献我们的一份力量。

杭州大学出版社
1991年8月

总　　序

由京、津、沪、浙等全国十二省市教育学院协作编写的《中学教师继续教育丛书》陆续出版了。在更新教育观念、深化教育改革的今天，这套丛书的问世是很有意义的。

国家振兴，教育为本；教育振兴，教师为本。能否建设一支思想品德素质和文化业务素质精良的师资队伍，关系到社会主义教育事业的成败。而要加强师资队伍的建设，就得采取必要的措施，使他们能结合工作的需要，不断地再学习、再进修、再提高。

随着大部分中学教师逐步达到现阶段国家规定的合格学历，教师培训工作的重点必将有步骤地转移到开展继续教育上来。这种继续教育是指对已达国家规定学历的教师进行以提高政治思想素质和教育教学能力为主要目标的培训。它包括职务培训、新教师见习期培训、骨干教师培训和对部分骨干教师提高学历层次的培训等方面。做好这项工作，对于建设一支能够坚持社会主义方向，品德高尚，素质优良，结构合理，适应我国教育事业发展需要的教师队伍，有着十分重要的作用。

开展继续教育，不能没有教材。但我们的国家地域辽

阔，人口众多，各地师资队伍建设的客观条件和实际需求很不一样，这就需要从实际出发设置相应的课程，编写不同的教材。这次，一些起步较早、条件相仿的教育学院，根据已有的实践，发挥群体的优势，协作编写这套丛书，它既可供有关院校当前开展继续教育选用，又能兼顾中学教师自学进修的需要，这是切合时宜的。

中学教师继续教育这项工作目前尚处于探索、研究、实践的阶段，因此，可以说这套丛书的编撰工作也同样处于探索阶段，只能随着我国继续教育事业的发展而逐步改进、完善。但编委会和编写者在调查研究和从事中学教师继续教育的基础上确定丛书的选题和内容，努力把思想政治教育放在首位，致力于学科前沿知识与基础知识同中学教育实际的结合，教育科学与心理科学同中学学科教育实际的结合，这是可取的。丛书以科学性、先进性、适用性、针对性作为努力方向，这就把教师培训工作与提高教育质量有机地联系起来，我相信它将会受到广大教师的欢迎。

编写《中学教师继续教育丛书》是一项开创性的工作。我们希望参编院校发挥团结协作的精神，不断实践，不断提高，共同把这套丛书编好，为中学教师继续教育事业作出贡献。

金长泽

金长泽同志系国家教委师范教育司司长

目　录

第一章

整数的基本知识

一、整数的多项式表示法

众知，一个两位数 37，可以表示成为 $3\times10+7$，一个三位数375，可以表示成为 $3\times100+7\times10+5$。一般地，一个十进制的 $n+1$ 位正整数N可以表示为：

$$N=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_1\times10+a_0,$$

其中 $a_i(i=0,1,\cdots,n)$都是整数，且 $0\leqslant a_i\leqslant9$，$a_n\neq0$。

这种表示法称为整数的多项式表示法。a_n 称为该整数的首位数字，a_0 称为该整数的末位数字。

利用上述知识，可以解如下一类问题：

例 1 大于 10 小于 100 的正整数中，当数字交换位置后所得的数比原数增加 9 的数共有几个？这些数是几？

分析 显然大于 10 小于 100 的正整数是两位数，故可表示为 $10x+y$ 的形式，又由题意知 x,y 应满足如下关系：

$$10y+x=10x+y+9\quad(1\leqslant x,y\leqslant9).$$

由此即可获得结果。

解 设满足题设条件的两位数是 $10x+y$，其中 $1\leqslant x$，$y\leqslant9$。当数字交换位置后所得的两位数为 $10y+x$，则得

$$10y+x=10x+y+9,$$

即

$$x+1=y.$$

取 $x=1,2,\cdots,8$，则得所求结果为：12，23，34，45，56，67，78，89 共八个数。

例 2 若将一个正整数的末位数字删掉形成一个新整数，而原整数是新整数的倍数，求所有具有这样性质的正整数。

解 （1）显然，所有末位数字是零的正整数均为所求。

（2）设原正整数为 $N=a_n\times 10^n+a_{n-1}\times 10^{n-1}+\cdots+a_1\times 10+a_0$，其中 $0\leqslant a_i\leqslant 9(i=1,2,\cdots,n)$，且 $a_n\neq 0, a_0\neq 0$。则删除末位数字 a_0 后形成的新数为：

$$M=a_n\times 10^{n-1}+a_{n-1}\times 10^{n-2}+\cdots+a_2\times 10+a_1.$$

欲使 N 是 M 的倍数，即使 $\frac{N}{M}$ 为整数，则

$$\begin{aligned}\frac{N}{M}&=\frac{a_n\times 10^n+a_{n-1}\times 10^{n-1}+\cdots+a_1\times 10+a_0}{a_n\times 10^{n-1}+a_{n-1}\times 10^{n-2}+\cdots+a_2\times 10+a_1}\\&=\frac{10(a_n\times 10^{n-1}+a_{n-1}\times 10^{n-2}+\cdots+a_1)+a_0}{a_n\times 10^{n-1}+a_{n-1}\times 10^{n-2}+\cdots+a_2\times 10+a_1}\\&=10+\frac{a_0}{a_n\times 10^{n-1}+a_{n-1}\times 10^{n-2}+\cdots+a_2\times 10+a_1}. \quad ①\end{aligned}$$

为使 ① 式为整数，必须使

$$\frac{a_0}{a_n\times 10^{n-1}+a_{n-1}\times 10^{n-2}+\cdots+a_1}$$

为整数，则只有 $a_n\times 10^{n-1}+a_{n-1}\times 10^{n-2}+\cdots+a_2\times 10+a_1$ 是一位整数，于是得到

$$a_n=a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots=a_2=0, \quad a_1\neq 0.$$

由此可见，原整数 N 至多是一个两位数。

另一方面原整数删掉末位数字后仍为一新整数，故 N 至少是一个两位数。

由上知，N 只能是一个两位数。

设 $N=10a+b$，则删掉末位数 b 得到 $M=a$，由条件知

$$\frac{N}{M}=\frac{10a+b}{a}=10+\frac{b}{a}. \qquad ②$$

由②知，b 应该是 a 的倍数。分下述几种情况考虑：

(1) 当 $b=a$ 时，N 为 11，22，33，44，55，66，77，88，99；

(2) 当 $b=2a$ 时，N 为12，24，36，48；

(3) 当 $b=3a$ 时，N 为 13，26，39；

(4) 当 $b=4a$ 时，N 为 14，28；

(5) 当 $b=5a$ 时，N 为 15；

(6) 当 $b=6a$ 时，N 为 16；

(7) 当 $b=7a$ 时，N 为 17；

(8) 当 $b=8a$ 时，N 为 18；

(9) 当 $b=9a$ 时，N 为 19。

二、奇数与偶数

我们知道，±1，±3，±5，…都是奇数，而 0，±2，±4，…都是偶数，任何偶数都可表示成 $2n$ 的形式，任何奇数都可以表示成 $2n+1$ 的形式，其中 $n=0$，±1，±2，…。

我们引进记号：偶数用“0”表示，奇数用“1”表示，则奇数、偶数的基本性质可用下列“加法表”和“乘法表”表示：

奇、偶数加法表

+	0	1
0	0	1
1	1	0

奇、偶数乘法表

×	0	1
0	0	0
1	0	1

此外，下述性质是明显的：

在任意给定的三个整数 a,b,c 中必能从中选出两个，其和与差均为偶数。

证明 把整数按奇数、偶数分成两类，则 a,b,c 三个整数中至少有两个属于同一类（即同为奇数或同为偶数），由加法表可知，同属一类的两数之和（或差）是偶数。

这是一种重要的逻辑划分的思想，实际上是利用被 2 除的余数把全体整数划分成了两类，即偶数能被 2 整除，余数为 0（所以用 0 表示偶数类）；奇数被 2 除时余数为 1（故用 1 表示奇数类）。这种逻辑划分的思想在数学解题中有重要的作用。

例 3 下列各组数中，只有一组数不满足方程：

$$85x-324y=101,$$

请问是哪一组？

（A）$x=5, y=1$；　　　　（B）$x=329, y=86$；

（C）$x=653, y=171$；　　（D）$x=978, y=256$。

分析 本题应从结论分析 x,y 的取值特征，确定正确结果。因为所供选择的除（A）外，其余三组数均较大，逐一代入去寻找答案显然不妥。由于原方程的左端减数 $324y$ 是偶数，而运算结果 101 则是奇数，从而判定被减数 $85x$ 须是奇数，由性质知 x 必为奇数。

解 ∵ $85x-324y=101$，

∴ $85x=101$（奇数）$+324y$（偶数）。

则 $85x$ 为奇数。

由此知 x 必为奇数，因为（D）中 $x=978$（偶数），故（D）不满足原方程。

例 4 设有 101 个自然数，记为 $a_1,a_2,\cdots,a_{101}$，已知

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+101a_{101}=S$ 是偶数，求证：$a_1+a_3+\cdots+a_{99}+a_{101}$ 是偶数。

分析 因 $a_1+a_3+\cdots+a_{99}+a_{101}$ 是 S 的一部分，若把 S 分成两部分，其中一部分是偶数，那么 $a_1+a_3+\cdots+a_{99}+a_{101}$ 亦是偶数。

证明 设 $a_1+a_3+\cdots+a_{99}+a_{101}=P$,

$$\begin{aligned}S&=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+101a_{101}\\&=P+2a_2+4a_4+\cdots+100a_{100}+2a_3+4a_5\\&\quad+\cdots+100a_{101}\\&=P+2[(a_2+2a_4+\cdots+50a_{100})\\&\quad+(a_3+2a_5+\cdots+50a_{101})].\end{aligned}$$

即 $S=P+$偶数。

$\because$ S 是偶数，$\therefore$ P 是偶数。

例 5 有一批中学毕业的学生他们约定彼此互相通信，并且规定每人只要接到对方来信，就一定回信。证明他们中写了奇数封信的学生必有偶数个人。

分析 显然，无论这批学生数是奇数还是偶数，由于约定写信是彼此的，所以所写的信的总数（设为 N）一定是偶数。

证明 用反证法。假设写奇数封信的学生有奇数个人，则这些学生所写的信的数目 A 为奇数，而其余同学每人写的信的数目为偶数封，则他们所写信的总数 B 为偶数，则有

$$N=A+B, \tag{③}$$

其中 N 为这批学生写信的总数，且为偶数。因为③式的左端 N 是偶数，而右端 $A+B$ 为奇数，矛盾。故写奇数封信的同学一定有偶数个人。

三、数的整除性

1. 整除的概念

定义 如果整数 a 被整数 b 除所得的商是整数，即 $a=bq$（$b\neq0$，q是整数）成立，则说 a 被 b 整除，或者说 b 能整除 a，记为 $b|a$，此时 a 也称 b 的倍数。若 a 不被 b 整除，则记 $b\nmid a$。

整数的整除性有如下性质：

性质 1 若 $a|b$，$b|c$，则 $a|c$；

性质 2 若 $a|b$，则对任意整数 k，有 $a|kb$；

性质 3 若 $a|b$，$a|c$，则对任意整数 k，l，有 $a|(kb\pm lc)$；

性质 4 若 $a|c$，$b|c$，且$(a,b)=1$（即 a，b 互质），则 $ab|c$；

性质 5 若 $a|m$，$b|m$，则$[a,b]|m$，（$[a,b]$表示 a，b的最小公倍数）。

例如，$a=2$，$b=5$，$m=20$，显然有

$2|20$， $5|20$， $[2,5]=10$， 则 $10|20$。

性质 6 若 p 是质数，且 $p|ab$，则 $p|a$ 或 $p|b$；

性质 7 n 个连续自然数的积必能被 $1\times2\times\cdots\times n$ 所整除，即 $1\times2\times3\times\cdots\times n|k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$。

以上性质证明略。

例 6 已知 a,b,c,d 为整数，如果 $ab+cd$ 能被 $a-c$ 整除，求证：$a-c|ad+bc$。

分析 已知 $a-c|ab+cd$，故可从已知出发构造结论，采用添项、拆项的方法，使之产生求证结论的形式，这样目标明确，然后应用性质即可获证。

证明 因为 $ad+bc=ad+ab-ab+bc+cd-cd$

$$=ab+cd+(ad-ab+bc-cd)$$

$$=ab+cd+(a-c)(d-b),$$

由已知得　　$a-c|ab+cd$，　$a-c|(a-c)(d-b)$，

所以　　　　$a-c|ad+bc$。

2. 自然数的整除性的判别法。

(1) 一个自然数的个位数若能被2(或5)整除，则这个自然数必能被2(或5)整除。

(2) 一个自然数的各位数字之和若能被3(或9)整除，则这个自然数必能被3(或9)整除。

(3) 一个自然数的末两位数若能被4(或25)整除，则这个自然数必能被4(或25)整除。

(4) 一个自然数若能同时被2,3整除，则这个自然数必能被6整除。

(5) 一个自然数的个位数字以前的数字组成的数与个位数字的2倍的差若能被7整除，则这个自然数一定能被7整除；

(6) 一个自然数的末三位数若能被8整除，则这个自然数必能被8整除。

(7) 一个自然数的奇数位上的数学之和与偶数位上的数字之和的差若能被11整除，则这个自然数必能被11整除。

(8) 一个自然数的奇位千进位的总和与偶位千进位的总和之差若能被7(或11，或13)整除，则这个自然数必能被7(或11，或13)整除。

以上八条判别法在解初中数学竞赛题中有着广泛的应用。

例7　在1,2,…,9这9个数字中各取5个，任意排成45位数，那么这个数一定能被9整除。

分析　利用判别法(2)即可证得。

证明 因为不论这45个数码如何排列成一个数，它的数码之和不变，即

$$(1+2+\cdots+9)\times 5=225.$$

因为 $9|225$，所以9能整除这个45位数。

例8 已知 $N=\overline{13xy45z}$ 能被792整除，问 x,y,z 等于几？

分析 因为 $792|N$，故应首先考虑792是由哪些因数构成，而这些因数一定都能整除 N，由此找出关系式，即可求出 x,y,z。

解 因为 $792=8\times 9\times 11$，

$$N=\overline{13xy45z}=\overline{13xy400}+(50+z),$$

已知 $792|N$，故有 $8|N, 9|N, 11|N$。

(1) 由 $8|N$，且由判别法(6)知 $8|\overline{13xy400}$，故得 $8|50+z$，得 $z=6$。

(2) 由 $9|N$，且由判别法(2)知 $9|(1+3+x+y+4+5+6)$，即 $9|(19+x+y)$。

因为 $0\leqslant x\leqslant 9$，$0\leqslant y\leqslant 9$，

所以 $x+y=8$，或 $x+y=17$。

(3) 由 $11|N$，N 的奇数位数字之和与偶数位数字之和的差是 $(1+x+4+6)-(3+y+5)=3+(x-y)$，由 $11|3+(x-y)$ 得。

$$x-y=8 \quad 或 \quad x-y=-3.$$

由(2)、(3)知只有当 $\begin{cases}x+y=8\\x-y=8\end{cases}$ 时才有适合题意的公共解，即 $x=8, y=0$，因此，本题的结果为 $x=8$，$y=0$，$z=6$，这时 $N=1380456$。

例 9 有一个 n 位数，将这个 n 位数的数字，按逆顺序重新排列得一个新数（如将 3721 按逆顺序重新排列得 1273），试证：新数与原数的差能被 9 整除。

证明 设这个 n 位数为 N，则用多项式表示法为：

$$N = a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \cdots + a_2 \times 10 + a_1,$$

其中 a_i 满足 $0 \leqslant a_i \leqslant 9 (i=1,2.\cdots,n)$ 的整数，且 $a_n \neq 0$，把 N 各位上的数字依次按逆顺序排列得新数 N'，则 N' 可表示为：

$$N' = a_1 \times 10^{n-1} + a_2 \times 10^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \times 10 + a_n.$$

作两数的差

$$\begin{aligned} M &= N' - N \\ &= a_1(10^{n-1} - 1) + a_2(10^{n-2} - 10) + \cdots \\ &\quad + a_{n-1}(10 - 10^{n-2}) + a_n(1 - 10^{n-1}) \\ &= a_1(10^{n-1} - 1) + 10a_2(10^{n-3} - 1) + \cdots \\ &\quad + 10a_{n-1}(1 - 10^{n-3}) + a_n(1 - 10^{n-1}). \end{aligned}$$

因为 $9 | 10^{n-1} - 1, 9 | 10^{n-3} - 1, \cdots, 9 | 1 - 10^{n-3}$，$9 | 1 - 10^{n-1}$，即 9 整除上式的每一项，故 $9 | M$。

例 10 今有甲、乙两人作猜数字游戏。乙对甲说："今有一 n 位数 N，若将此数的数字按逆顺序重新排列得一新数 N'，并已知 $N' - N = M$，请你从中任意去掉一个数字（请你默记心头而不要告诉我）后，将余下的几个数字之和告诉我，我便可猜中你去掉的这个数字是几。"

问：乙如何能猜中去掉的这个数字，为什么？在什么情况下猜出的数字不准？

分析 这个游戏便是利用例 3 的结果，因为（$M = N' - N = 9k$（k 为整数），乙据此便可猜出由甲去掉的数字。例 3 的结论可作为性质应用。