高等学校试用教材

高等数学

（化、生、地类专业）

第二册

上海师范大学数学系
中山大学数学力学系 合编
上海师范学院数学系

高等教育出版社

高等学校试用教材

高等数学

（化、生、地类专业）

第一册

上海师范大学数学系
中山大学数学力学系　合编
上海师范学院数学系

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学　第二册/上海师范大学数学系等. －北京:高等教育出版社,2005 重印

化生地类专业

ISBN 7-04-001797-0

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 上…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 00957 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	天津新华印刷一厂		

开　　本	850×1168　1/32	**版　　次**	1978 年 4 月第 1 版
印　　张	8.75	**印　　次**	2005 年 4 月第 23 次印刷
字　　数	206 000	**定　　价**	11.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

物料号　1797－00

目　录

第六章　无穷级数

无穷级数是与数列极限有密切联系的一个概念. 它不仅在数学分析理论本身是一个重要的研究工具,而且在自然科学与工程技术中也有着广泛的应用. 本章主要讨论一类最简单最重要的级数,那就是幂级数. 为此,在前面先简单地介绍一些数项级数的知识.

§6.1　数项级数

1. 级数及其收敛与发散的概念

我们先看一个无穷级数的例子. 如果要求出圆的面积,可先作圆的内接正六边形(图 6－1). 设这正六边形的面积为 A_1,它是圆面积的一个近似值. 再以这正六边形的每一边为底边,在弓形内作顶点在圆上的等腰三角形. 设这六个等腰三角形的面积之和为 A_2,那么这个圆的内接正十二边形的面积 $S_2=A_1+A_2$,它也是圆面积的一个近似值,其近似程度比前面的好. 同样,再以这正十二边形的每一边为底边,在弓形内作顶点在圆上的等腰三角形. 设这十二个等腰三角形的面积之和为 A_3,那么这个圆的内接正二十四边形的面积 $S_3=A_1+A_2+A_3$,它也是圆面积的一个近似值,其近似程度比前面的都更好. 依此类推. 这个圆的面积近似地等于 $S_n=A_1+A_2+\cdots+A_n$,n 越大,则近似的程度越好. 人们自然地认为圆的面积是:

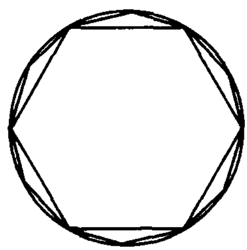

图　6－1

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots.$$

定义 1 设给定了序列 $u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$,则如下的式子

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots(\text{或简写为}\sum_{n=1}^{\infty}u_n) \tag{1}$$

就叫做无穷级数,或简称级数.其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项.其中 $u_n(n=1,2,\cdots)$都是数,或者都是函数.

如果 $u_n(n=1,2,\cdots)$都是数,那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 就叫做数项级数.下列级数都是数项级数:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots,$$

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots,$$

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots.$$

如果 $u_n=u_n(x)(n=1,2,\cdots)$都是 x 的函数,那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 就叫做函数项级数.下列级数都是函数项级数:

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,$$

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx+\cdots,$$

本节只讨论数项级数.

定义 2 设给定了级数(1),作级数的前 n 项的和

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,$$

可得到另一个数列

$$S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots.$$

如果$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$(有限值),那么就称级数(1)是收敛的,并称 S 为级数(1)的和,写作

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=S.$$

如果$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在,那么就称级数(1)是发散的.(注意:发散级数没有和.)

例 1 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$的收敛性.

解 因为 $S_n-\frac{1}{2}S_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}$,

从而
$$S_n=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}.$$

而
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1,$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛,其和为 1. 即
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1.$$

例 2 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1^n=1+1+\cdots+1+\cdots$的收敛性.

解 因为 $S_n=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{共}n\text{项}}=n$,

而$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty$(即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在),所以级数 $1+1+\cdots+1+\cdots$发散.

例 3 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n=-1+1-1+\cdots+(-1)^n+\cdots$的收敛性.

解 因为 $S_n=-1+1-1+\cdots+(-1)^n$.

当 n 为奇数时,$S_n=-1$;当 n 为偶数时,$S_n=0$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在,从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散.

上面三个例子都是等比级数的特例. 下面我们来讨论一般的等比级数(等比级数又叫做几何级数):

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots, (a\neq 0),$$

其中 r 叫做等比级数的公比.

如果 $|r|\neq 1$,那么

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a-ar^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r},$$

当 $|r|<1$ 时,由于 $\frac{ar^n}{1-r}\to 0$,所以 $S_n\to\frac{a}{1-r}$,这时等比级数收敛,其和为 $\frac{a}{1-r}$;当 $|r|>1$ 时,由于 $\frac{ar^n}{1-r}\to\infty$,所以 $S_n\to\infty$,这时等比级数发散;当 $r=1$ 时,$S_n=na\to\infty$,级数发散;当 $r=-1$ 时,级数成为 $a-a+a-a+\cdots$,当 n 为奇数时 $S_n=a$,当 n 为偶数时 $S_n=0$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在,从而级数发散.

综上所述可得结论:公比为 r 的等比级数,当 $|r|<1$ 时,级数收敛,其和为 $\frac{a}{1-r}$;当 $|r|\geqslant 1$ 时,级数发散.

一般说来,直接讨论 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 是否存在是很困难的.以后我们将介绍一些简单的方法来判断某些级数是否收敛.同样,对于收敛级数,要求其和 S 的准确值也还是困难的,但是我们可以用 S_n 作为 S 的近似值. S 与 S_n 的差值

$$r_n=S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$$

叫做(收敛)级数的 n 项后的余项.用 S_n 近似代替 S 所产生的误差就是这个余项的绝对值 $|r_n|$.只要 n 足够大,这个误差就可以任意小.

注意:发散级数是没有和的,当然其前 n 项之和 S_n 也就不能近似地表达什么,因此也没有 n 项后的余项的概念.

由此可见,收敛级数与发散级数在实用上有根本性的区别.因此,研究级数的收敛性是级数理论中的首要问题.下面我们还将专门讨论级数的收敛性问题.

2. 级数收敛的必要条件

为了研究级数的收敛性，我们先看看收敛级数有什么性质.

定理 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，那么 $\lim_{n\to\infty} u_n=0$.

证 由于 $S_n=S_{n-1}+u_n$，从而 $u_n=S_n-S_{n-1}$. 又因为级数收敛，所以当 $n\to\infty$ 时，S_n、S_{n-1} 的极限存在且相等. 因此有

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=0.$$

例如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$ 是收敛级数，果然有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0.$$

这定理也可以这样来叙述：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty} u_n=0$.

但是要注意：$\lim_{n\to\infty} u_n=0$ 并不是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分条件. 有许多级数，虽然一般项趋于 0，但它仍然是发散的. 例如调和级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

虽然它的一般项 $\frac{1}{n}\to 0$，但它是发散级数. 证明如下：

$$\text{因为}\quad S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{2\text{项}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{4\text{项}}$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}\right)}_{8\text{项}}+\cdots$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)}_{2^{k-1}\text{项}}$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}_{\text{不足}2^k\text{项}}$$

$$>1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}_{2\text{项}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)}_{4\text{项}}$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)}_{8\text{项}}+\cdots$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)}_{2^{k-1}\text{项}}$$

$$=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{k\text{项}}=1+\frac{k}{2},$$

当 n 无限地增大时，不等式右边的数 $1+\frac{k}{2}$ 也无限地增大，从而 S_n 也无限地增大，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散级数.

由此可见，由 $u_n\to 0$ 并不能判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 那么这定理有什么用处呢？这定理的重要用处在于它给出了判断级数发散的准则. 因为由这定理可知：如果 u_n 不趋于 0，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

例 4 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\cdots+\frac{n}{2n+1}+\cdots$ 的收敛性.

解 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}\neq 0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$发散.

例 5 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n=-1+1-1+\cdots+(-1)^n+\cdots$的收敛性.

解 因为$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散.

3. 级数的基本性质

以后讨论级数的收敛性时，要用到级数的几个基本性质. 现介绍如下：

性质 1 在级数前面去掉有限项或加上有限项得一新级数，新级数收敛或发散的性质与原级数相同.

证 设原级数为

$$u_1+u_2+\cdots+u_m+u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots.$$

去掉前 m 项后的新级数为

$$u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots,$$

并设 S_n 为原级数前 n 项的和，S'_n 为新级数前 n 项的和. 显然有

$$S_{n+m}=(u_1+u_2+\cdots+u_m)+S'_n$$

即

$$S'_n=S_{n+m}-(u_1+u_2+\cdots+u_m).$$

由此可见，如果$\lim\limits_{n\to\infty}S_{n+m}$存在，极限为 S，那么$\lim\limits_{n\to\infty}S'_n$也存在. 且等于 $S-\sum\limits_{n=1}^{m}u_n$. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}S_{n+m}$不存在，那么$\lim\limits_{n\to\infty}S'_n$也不存在. 这就是说新级数收敛或发散的性质与原级数相同. 加上有限项后新级数收敛性不变的证明是完全相仿的.

性质 2 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛；且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$.

证 记$\sigma_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$,

$$\tau_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n,$$
$$S_n = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots + (u_n + v_n),$$
$$T_n = (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \cdots + (u_n - v_n).$$

显然
$$S_n = \sigma_n + \tau_n, T_n = \sigma_n - \tau_n.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛. 即$\lim_{n\to\infty}\sigma_n$ 与$\lim_{n\to\infty}\tau_n$ 都存在.

从而
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(\sigma_n + \tau_n) = \lim_{n\to\infty}\sigma_n + \lim_{n\to\infty}\tau_n$$

与
$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}(\sigma_n - \tau_n) = \lim_{n\to\infty}\sigma_n - \lim_{n\to\infty}\tau_n.$$

这就是说级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$都收敛，其和为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

性质 3 以非零常数 k 乘级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的每项得新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$，新级数收敛或发散的性质与原级数相同.

证 设 S_n 为原级数前 n 项的和，S'_n为新级数前 n 项的和. 显然

$$S'_n = k u_1 + k u_2 + \cdots + k u_n = k S_n.$$

所以，如果 S_n 有极限 S，那么 S'_n也有极限，且等于 kS；如果 S_n 没有极限，那么 S'_n也没有极限.

4. 正项级数的收敛判别法

正项级数就是每项非负的级数(即各项 $u_n \geqslant 0$). 它是级数中比较简单的. 这一段我们只讨论正项级数，以后研究其它级数的收敛性时，也常要用到正项级数的收敛性.

正项级数的特点是它的前 n 项之和 S_n 是一个单调增加数列：$S_1 \leqslant S_2 \leqslant \cdots \leqslant S_n \leqslant \cdots$. 要判定正项级数是否收敛，只要看它的 S_n 是否有上界就行了. 如果 S_n 有上界，那么由极限存在准则(单调有界数列必有极限)，可知 S_n 有极限，从而级数收敛；如果 S_n 无上界，那么 S_n 无极限，从而级数发散.

我们要研究正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性，但直接计算 S_n 一般来说是不容易的，通常是把它与另一收敛情况已知的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 作比较，通过比较来决定 S_n 是否有上界，从而判定 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否收敛. 比较判别法则如下：

定理 1 设已知两个正项级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

与

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots. \tag{2}$$

如果级数(2)收敛，并且 $u_n \leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$，那么级数(1)也收敛.

如果级数(2)发散，并且 $u_n \geqslant v_n(n=1,2,\cdots)$，那么级数(1)也发散.

证 先证明第一部分，已知级数(2)收敛，设其和为 σ，因为(2)是正项级数，所以对任何 n 均有

$$v_1+v_2+\cdots+v_n \leqslant \sigma.$$

又因为 $u_n \leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$，所以有

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n \leqslant v_1+v_2+\cdots+v_n \leqslant \sigma.$$

即正项级数(1)的前 n 项之和 S_n 是有上界的，从而级数(1)收敛.

现证明第二部分. 用反证法. 假设级数(1)收敛，那么由定理的第一部分可得级数(2)收敛，这与已知条件矛盾，所以级数(1)必发散.

作为比较判别法的举例，我们来讨论 p 级数：

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \quad (p \text{ 是常数}).$$

当 $p=1$ 时，就是前面已经讨论过的调和级数，已知它是发散的.

当 $p<1$ 时，$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}$. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的，所以由比较判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$也是发散的.

当 $p>1$ 时，因为对正项级数加括号不影响它的收敛性，所以可把 p 级数加括号写成如下的形式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\underbrace{\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)}_{2\text{项}}+\underbrace{\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)}_{4\text{项}}$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{8^p}+\frac{1}{9^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}\right)}_{8\text{项}}+\cdots,$$

再把它与下面的级数作比较

$$1+\underbrace{\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)}_{2\text{项}}+\underbrace{\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)}_{4\text{项}}$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right)}_{8\text{项}}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{4^{p-1}}+\frac{1}{8^{p-1}}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\cdots.$$

显然，从第二项起，前者各项都小于后者对应的各项，而后者是等比级数，其公比 $r=\frac{1}{2^{p-1}}<1(\because p>1)$，它是收敛的，所以由比较判别法可知前者也是收敛的.

综上所述可得结论：p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，当 $p\leqslant1$时，级数发散；当 $p>1$ 时，级数收敛.

例如,级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$是发散的;级数 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$是收敛的.

在比较判别法的基础上,下面再介绍一个在实用上非常方便的比值判别法,又称达朗贝尔(d'Alembert)判别法.

定理 2 设已知正项级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$,那么 $\rho<1$ 时,级数收敛;$\rho>1$ $\left(或\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty\right)$时,级数发散;$\rho=1$ 时,级数可能收敛也可能发散.

证 当$\rho<1$时,取 $r=\frac{\rho+1}{2}$,它是ρ与 1 的平均值,在ρ与 1 之间,比ρ大,比 1 小. 因为 $n\to\infty$时$\frac{u_{n+1}}{u_n}\to\rho$. 又因为 $\rho<r$,所以当 n 充分大以后,$\frac{u_{n+1}}{u_n}$就小于 r(图 6-2). 也就是说,从某个 m 开始后所有的 n 都满足不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<r.$$

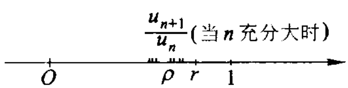

图 6-2

因此有

$$u_{m+1}<ru_m,$$
$$u_{m+2}<ru_{m+1}<r^2u_m,$$
$$u_{m+3}<ru_{m+2}<r^3u_m,$$
$$\cdots,$$

把下面两个级数作比较

$$u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\cdots \tag{3}$$

$$ru_m + r^2u_m + r^3u_m + \cdots \tag{4}$$

已知(3)的各项小于(4)的对应各项，而(4)是公比 $r<1$ 的等比级数，是收敛的，由比较判别法可知(3)也是收敛的. 级数(3)与已知级数比较两者只相差前面有限项之和 $\sum\limits_{n=1}^{m} u_n$，从而它们是同时收敛或同时发散的，既然(3)收敛，所以已知级数也收敛.

当 $\rho>1$ 时，因为 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\to\rho$. 又因为 $\rho>1$，所以当 n 充分大以后，$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ 就大于 1(图 6－3). 也就是说，从某个 m 开始后所有的 n 都满足不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>1.$$

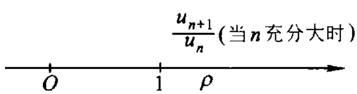

图 6－3

即
$$u_{n+1}>u_n.$$

由此可见，从第 m 项开始以后 u_n 是单调增加的，当 n 无限增大时，u_n 不可能趋于 0，它不满足级数收敛的必要条件，所以级数(1)发散. $\left(\text{同样可以证明}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\infty\text{的情况.}\right)$

当 $\rho=1$ 时，级数(1)可能收敛也可能发散. 例如，p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$，当 $n\to\infty$ 时，无论正数 p 取什么值都有 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^p\to 1$，但我们知道 $p\leqslant 1$ 时级数发散，而 $p>1$ 时级数收敛. 因此当 $\rho=1$ 时，不能判定级数是收敛或发散.

例 6 讨论下面级数的收敛性

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\cdots+\frac{n^2}{2^n}+\cdots.$$