ISSN 1001-6120

决策科学理论和应用

THEORY AND APPLICATION OF DECISION MAKING SCIENCE

—全国决策科学研讨会论文集—

上册

全国决策科学研讨会筹委会
《运筹学杂志》编 辑 部 编

前 言

在社会因素十分复杂,生产规模愈加宏大和科技水平高度发展的当今世界，运用科学的方法对社会、经济、科技、文体和军事的各种重大问题进行有效的决策，是事业取得成功的首要条件和基本保证。

自 50 年代以来，主要借助于现代数学和计算机技术的成就，决策科学无论在理论研究或实际应用方面都有了很大的发展．经过各国学者 40 余年的积极探索，不仅为这一学科奠定了基本的理论基础，而且还派生了一些新的活跃分支．决策科学的一个重要特点是，其理论研究常常需要综合地运用数学和其它有关学科的新成果，应用又具有直接性和广泛性．因此，有关它的理论和应用研究一直受到国际学术界和各发达国家政府部门的重视和支持．特别是，近 20 年来在迅速发展的决策支持系统研究的推动下，使这一综合交叉学科的内容不断地得到丰富和扩展。

我国关于决策科学的研究主要始于 70 年代．经过大家的共同努力，我们在决策科学的理论和应用方面都取得了可喜的成绩．但是，我们的工作与国外的先进水平以及与我国经济发展的要求相比，显然还存在着相当大的差距．同时，我们在决策科学各分支学科的研究方面还不甚全面，理论和应用的发展也很不平衡．当前，在我国重点进行经济建设和改革开放的形势下，实现重大决策的民主化和科学化已是当务之急．积极开展决策科学的研究，对于现阶段和今后的经济发展都具有重大的现实意义．为此，举行一次全国性的决策科学学术研讨会，是必要和适时的．相信通过这次会议的交流和讨论，我国不论在决策的理论研究或应用实践方面，都会有一个新的提高和发展．

这次会议首先是由江西省科委和南昌大学倡仪发起的,得到了上海工业大学和上海交通大学的积极支持．上饶师专为会议的顺利举行付出了巨大的劳动,上海工业大学预测研究所和《运筹学杂志》编辑部为这部会议论文集的出版作出很大的努力．在此,我谨代表大会筹备委员会向他们表示衷心的感谢!

胡毓达

1994 年 4 月

目　录

卷1　理论

卷2 应用

决策科学理论和应用
Vol.1(1994)

关于防策略投票理论研究的综述①

罗云峰　岳超源

(华中理工大学系统所,430074)

摘　要

文章着重介绍了近二十年来防策略投票理论的研究情况,以及防策略投票理论研究的最新进展. 在此基础上,提出了防策略投票理论研究中存在的若干问题.

§1 引　言

在委员会决策理论的研究中,一个经常引起人们注意的问题就是"防策略投票理论"的研究[10]. 在实际的委员会决策过程中,用社会选择规则所集结的个人偏好都是个人所表达出来的偏好,而非其真实偏好. 在正常情况下,个人的表达偏好与其真实偏好应是一致的,但不能排除在某些情况下,个人出于某种目的而谎报自已的偏好,使决策结果发生有利于自已的变化. 这就是所谓的"策略投票"[8]. 虽说防策略投票的理论研究是近二十年来的事情,但人们早就注意到了"策略行为"的存在[10][12].

投票选举理论的奠基人之一 C.L.Dogyson 经过大量的对比研究认为,投票程序的"可被操纵性"和投票人（或决策者）的策略行为是"普遍存在的". 他甚至认为投票选举这种决策过程实际上是一种"在一定选择规则（或决策规则）下进行的对策过程"[10].

Dummett 和 Farquharson 则通过对投票程序的"稳定性"即防操纵性的研究,大胆地猜想:"在一定条件下,任何投票选择程序都是非防策略的,即可被操纵的"[7].

Dogyson 和 Dummett 等人虽然已意识到了投票选程序的可被操纵性是一种"普遍存在",但他们的这种认识是从大量的对比研究和实例中得到的.只是一种感性认识,都未能对这种"普遍存在性"从理论上加以解释和证明. 防策略投票理论的真正发展是在 Arrow 提出著名的不可能定理以后,特别是七十年代中后期 Gibbard 和 Satter-thwaite 提出新的防策略不可能定理之后[9][14].

§2 防策略投票不可能定理及其相关研究

2.1 符号与定义

$N=\{1,2,\cdots,n\}$ 表示委员会成员集,N 的任一元素 i 表示委员会的某一成员. $E=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 表示方案集,2^E 表示 E 的幂指集. 设 V 为 $2^E-\{\Phi\}$ 的子集,即 $\vee\subseteq -2^E\{\Phi\}$.

---

①本课题属国家教委博士点基金资助项目

R_i 表示成员i对方案集E的排序,R_i 为线性序.

$U = R_E^n = \{u|u = (R_1,R_2,\cdots,R_n)\}$ 表示偏好断面集，其中 $u = (R_1,R_2,\cdots,R_n)$ 表示一偏好断面. u/i 表示委员会各成员中仅 i 改变了偏好，即 $u/i = (R_1,R_2,\cdots,R_{i-1},R_i',R_{i+1},\cdots,R_n)$.

定义 1 选择函数 $c(\cdot)$ 的单值性概念：若对任意的 $(u,v)\in UxV$, 有 $|c_u(v)| = 1$, 则称 $c(\cdot)$ 是单值的，其中 $|c(\cdot)|$ 表示 $c(\cdot)$ 取值的个数.

单值性意味着在任一偏好断面 u 下，对方案集的任一子集 v 进行选择，得到的选择结果是唯一的. 用$\overline{c_u(v)}$ 表示 $c_u(v)$ 中的唯一元素.

定义 2 选择函数 $c(\cdot)$ 的非空性概念：若对任意的 $(u,v)\in U \times V$, 有 $c_u(v) \neq \Phi$, 则称 $c(\cdot)$ 是非空的.

定义 3 选择函数 $c(\cdot)$ 的非独裁性概念：若不存在 $i\in N$, 使得对任意 $x \neq \overline{c_u(v)}(x\in E)$, 有$\overline{c_u(v)}R_i x$(即$\overline{c_u(v)}$) 优于 x), 则称 $c(\cdot)$ 满足非独裁性.

非独裁性意味着在委员会中不存在成员 i, 使其选择就是委员会的集体选择 $c_u(v)$, 而不管其他成员的选择如何.

定义 4 选择函数 $c(\cdot)$ 可操纵性概念：若对任意的 $U\in U, \exists\, u' = u/i$, 使得$\overline{Cu'(v)}R_i\overline{C_u(v)}$, 则称 $c(\cdot)$ 在 (u,v) 是"可操纵"的.

$c(\cdot)$ 可操纵意味着委员会各成员中，当 i 有意识地改变自已的偏好时，可使选择结果发生有利于自已的变化.

定义 5 选择函数 $c(\cdot)$ 的防策略性概念：若对任意的 $(u,v)\in U \times V$,$c(\cdot)$ 在 (u,v) 是不可操纵的，则称 $c(\cdot)$ 是防策略的.

2.2 G－S不可能定理

Givvard 和 *Satterthwaite* 分别于 1973 年和 1975 年提出了如下不可能定理 [15][22].

定理1 不存在能同时满足以下条件的选择函数$c(\cdot)$:

(1) 约束域条件 :(*a*) $V = \{E\},|E| \geqslant 3$; (*b*) $3 \leqslant n < \infty, U = R_E^n$;(*c*) 对任意的 $(u,v)\in U \times V, c_u(v)$ 非空.

(2) $c(\cdot)$满足单值性.

(3) 对任意$(u,v)\in U \times V, c(\cdot)$是防策略的.

(4) $c(\cdot)$的值域中至少存在三个或三个以上的元素,即$|\{c_u(E)\}| \geqslant 3$.

(5) 非独裁性条件.

G－S 不可能定理（即防策略投票不可能定理）的提出，是防策略投票理论研究的一个巨大突破. 该定理实际上是对 *Dodyson* 和 *Dummett* 等人的"可操纵性的普遍存在性"猜想的理论证明. 从本质上讲 ,*G－S* 不可能定理意味着任何投票选择程序在一定条件下，要么是可被操纵的，要么是独裁的.

防策略投票不可能定理的提出，在理论界引起了很大的震动. 特别是，它对经济领域的资

源合理配置理论的存在性和合理性提出了巨大的挑战 [10].

继 *Gibbard* 和 *Satterthwaite* 之后，又有许多学者如 *Sen,Fishburn,Pattanaik,Kelly* 等，对防策略投票理论做了大量的研究，其主要研究成果如下.

[I]定义新的防策略性条件,以得到新的不可能定理.

首先 *Pattanaik* 对 $G-S$ 不可能定理中的防策略性条件提出了疑问，认为该定理中的防策略性条件太强. 他通过引入一种“反威胁”的概念定义了一种新的防策略性条件 – “具有反威胁的防策略性条件”[11]: 如果 $c(\cdot)$ 在 (u,v) 是可操纵的，即对于任意 $u\in U$, 存在 $u'=u/i$(称 u' 为一个“威胁”), 使 $\overline{C^{u'}}R_i\overline{C_u(v)}$ 成立，那么存在着一个联盟 $S\subset N-\{i\}$ 和 $u''=(R_1'',R_2'',\cdots,R_n'')$(称 u' 为一个“反威协”),(其中 $R_i''=R_i'$ $R_k''=R_k,k\in N-(SU\{i\})$), 使得对任何 $j\in S$, 有

$\overline{c_{u''}(v)}R_j\overline{c_{u'}(v)}$ 且 $\overline{c_u(v)}R_j\overline{c_{u''}(v)}$, 则称 $c(\cdot)$ 在 (u,v)“具有反威胁的防策略性”.

显然，“具有反威胁的防策略性”条件是一种较弱的防策略性条件，因为 $c(\cdot)$ 在 (u,v) 既使可被操纵，但只要有“反威胁”存在，选择函数 $c(\cdot)$ 就同样具有防策略 (反威胁的防策略性), 而 *Gibbard* 所定义的防策略性则不然.

对于“具有反威胁的防策略性”条件 ,*Pattanaik* 给出了如下不可能定理 [11]:

定理2 不存在这样的选择函数$c(\cdot)$,它能同时满足以下条件:

(1)约束域条件(同定理1).

(2)无关方案独立性[1].

(3)单值性条件(同定理1).

(4)非负反应条件[1].

(5)非强迫性条件[1].

(6)非独裁性条件[1].

(7)具有反威胁的防策略性条件.

Barbera 则在 *Pattanaik* 的“具有反威胁的防策略性”条件的基础上，提出了一种“具有保护性”的策略性条件 (亦称 $P-$ 稳定性条件), 并找到了一种满足这种防策略性条件的选择规则 [6].

此外 ,*Kelly,Dumment,Farquharson* 等人对防策略性条件作了一定的研究 [10][7].

[II]提出一系列的“行为假设”,对单值性条件进行修改.

Kelly 对非单值性的选择函数 (即 $|c(\cdot)|>1$ 的情况) 的防策略性进行了研究 [10]. 在非单值选择函数的防策略性研究中，首先需要解决的问题是如何对选择结果 $c_u(v)$ 和 $c_{u'}(v)$ 进行比较排序，即判别 $c_u(v)$ 与 $c_{u'}(v)$ 的优劣 (此时 $c(\cdot)$ 为多元素集合). *Kelly* 通过提出下列“行为假设”解决了方案集间的排序比较问题.

行为假设 1 对于任意两个方案集 s_1、s_2, 若对于任意 $x\in S_1$, 任意 $y\in S_2$, 都有 $x>y$, 并且至少存在一对 (x,y) 使 $x>y$), 则有 $s_1>s_2$。

继 *kelly* 之后 *Bandyopadhyay,Fishburn* 和 *Pattanaik* 等人又提出了一系列新的行为假

设．除行为假设 1 之外，主要还有：

行为假设 2[2] 对于任意两个方案集 s_1、s_2，若对任意 $s \in S_1 - S_2$，任意 $y \in S_1 \cap s_2$ 和任意 $z \in S_2 - S_1$，有 $x > y > z$，则有 $s_1 > s_2$

行为假设 3[2] 对于任意两个方案集 s_1、s_2，若对任意 $x \in S_1 - s_2$，任意 $y \in S_1 \cap s_2$ 和任意 $z \in S_2 - s_1$，有 $x \geqslant y \geqslant z$，且至少存在 (x,y,z)，有 $x > y > z$，则有 $s_1 > s_2$．

现已证明：在已给出的各种行为假设下 *Pareto* 最优准则是一种防策略性选择规则 [2]．

注：在非单值性情况和一定的行为假设下，各种防策略性条件都要作相应的修改．

除了对防策略性条件和单值性条件进行专门的研究以外，还有一些学者对各约束条件的相互关系做了大量的研究．如 *Sengupta* 通过对单调性条件，无关方案独立性条件和防策略性条件的研究，得到了一类新的可能 / 不可能定理 [16]．

此外，*Schwarty*,*Riker* 等，还对多数票准则下的投票选择程序的防策略性进行了研究，并得到了一些很好的结果 [13][15]．

在委员会决策理论的实际应用中，鉴于“可操纵性的普遍存在性”，在设计具体选择程序时，不再强求选择规则和选择函数本身具有完备的防策略性，而是根据一种“计算复杂性”的概念，使设计出来的选择规则具有“某种意义”下的防策略性 [3]，所谓“计算复杂性”就是指：如果委员会中某一成员想要通过谎根自已的偏好来操纵选择结果，使选择结果发生有利于自已的变化，那么他首先就面临着如何报出自已偏好（即表达偏好，而非真实偏好）的问题．如果某种选择机制能使找到有利于自已的表达偏好等同于一个 *NP* 完全问题，那么操纵者对选择结果的操纵就变得几乎不可能．在这种情况下，称选择规则具有“计算复杂性”．例如：*STV*（*single transferabel vote*）选择程序，本身并不具有防策略性而且也不完全满足单调性，但它满足“计算复杂性”条件，因而在实际的选择过程中，要想对 *STV* 选择程序进行操纵几乎是不可能的，特别是当被选方案的数目和委员会的人数都很多时 [4]．

现已证明：*Dodgson* 设计的 *HV*(*Harevoting*) 选择程序也满足“计算复杂性”条件 [5]．

§3 有待解决的几个问题

在委员会决策中，虽然各成员的基本利益是一致的，但各成员间仍存在着一定的“冲突”（如对各方案的意见不一致），所以不能排除在委员会中还存在着各种各样的小“利益集团”[19]．这些小的“利益集团”一般包括委员会中的一部分成员，这些成员或者由于对各予选方案的偏好相近，或者由于某种目的而形成政治或经济联盟．在决策过程中，利益集团的各成员是根据利益集团的“集体意志”而采取统一“行动”[12]，而不再是根据各自的偏好单独行动．在有利益集团存在的情况下，选择规则的防策略性究竟如何，仍是策略投票理论研究中一个值得探讨的问题．

对于非单值选择函数的防策略性的研究，目前都是通过一定的行为假设来进行的[4]．虽然现在已提出了各种各样的行为假设近十种之多，但仍不能穷尽决策人的行为方式．此外，在同一委员会中，各成员的行为方式是不尽相同的，用一种规定的行为模式来描述委员会中

不同成员的行为方式显然是不适当的。如果对于不同的决策人，采用不同的行为假设对其行为进行描述，这样做虽然能使问题的描述更加接近于实际，但却使理论上的处理变得非常困难或者近乎不可能。这就要求寻找一种这样的"性能指标"，它既能对委员会各成员的行为方式进行准确或近似的描述，使问题的描述接近于实际，同时又能使理论上的处理变得切实可行，显然这种性能指标不能用"效用"来充当。这种性能指标是否存在，倘若存在又该如何构造，也是值得探讨的问题。

"计算复杂性"虽然能使决策过程中的"策略行为"变得不可能，但现有的选择规则并不都具有"计算复杂性"。而且对于各种具体的选择程序，我们只能检验它是否具有"计算复杂性"，而不能在设计选择程序时，就有意识地使它具有"计算复杂性",否则就会牺牲选择程序的其他性质和增加程序设计的难度。另外"计算复杂性"还常常隐含着一个不良的性质--选择规则的非单调性，在选择程序的设计中，如何处理"计算复杂性"和其他性质的关系，仍需进一步的探讨和研究。

参考文献

[1]陈廷《决策分析》,科学出版社,1987

[2]T.Bandyopadhyay Coalitional Manipulation and the Pareto Rule J Econ Theory 29:359-363.

[3]J.J.Bartholde III Voting Schemes for Which It Can Be Difficult to Tell Who Won The Election Soc Choice Welfare 6:157-165.

[4]J.J.Bartholdi III Single Transferable Vote Resises Strategic Voting Soc Choice Welfare 8:341-354.

[5]J.J.Bartholdi III The Computational Difficulty of Manipulation on Election Soc Chioce Welfare 6:227-241.

[6]S.Barbera Stable Voting Schems J Econ Theory 23:267-247.

[7]M.Dummett Stability in Voting Econometrica 29:33-44.

[8]M.Dummett Voting Procedure Duckworth London,1983.

[9]A.Gibbard Manipulation of Voting Schemes: A General Result Econometrica 41:587-601.

[10]J.Delly Arrow Impossibility Theorems MIT,1979.

[11]P.K.Pattanaik Threats, Counter-threats, and Strategic Voting Econometrica 44:91-103.

[12]P.K.Pattanaik Strategy and Group Decision North Holland, Amsterdam.

[13]H.W.Riker The Art of Political Manipulation Yale University Press, New Haven,1987.

[14]M.A.Satterthwait Strategy-proofness and Arrow's Conditions J Econ Theory 10:187-217.

[15]T.Schwartz No Minimality Reasonable Collective-Choice Process Can Be Etragey-proof Math Social Science 3:57-72.

[16]M.Sengupta Monotomicity, Independence of Irrelevant Alternatives and Strategy-proofness of Social Decision Function Rev Econ Strdies XL VII:393-407.

决策科学理论和应用
Vol.1(1994)

多目标分式规划的对偶定理①

李仲飞
(内蒙古大学数学系,010021)

汪寿阳　王谦
(中国科学院系统科学研究所,100080)

摘　要

本文在弱有效解意义下讨论多目标分式规划的对偶性,在较弱的条件下给出两种对偶形式下的弱对偶定理和强对偶定理．此外,还讨论了这两种多目标分式对偶规划之间的关系．这些结果无需严格的凸性假设,推广了[1]的相应结论．

§1 引　言

多目标对偶理论一直吸引着国内外研究者的广泛注意,到目前为止在这一方面的研究已发表了数以百计的论文和专著,例如[1]−[8]．最近[1]提出了多目标分式规划的两种新对偶形式,在凸性假定下证明了弱对偶定理和强对偶定理．本文基于这两种对偶形式考虑更一般的问题,在去除可行域X的有界闭性与目标分子(分母)函数和约束函数的凸性假设的情形下,我们证明弱对偶定理和强对偶定理．最后,还讨论这两种对偶形式的相互关系．

§2 定义和引理

记 $R^m_+=\{x\in R^m|x_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,m\}$．设 $x,y\in R^m$,令 $x\leqslant y$ 表示 $y-x\in R^m_+$,$x\leqslant y$ 表示 $y-x\in R^m_+\setminus\{0\}$ 和 $x<y$ 表示 $y-x\in intR^m_+$．

考虑如下多目标分式规划问题:

$$V-\begin{cases} minF(x)=(\frac{f_1(x)}{l_1(x)},\cdots,\frac{f_m(x)}{l_m(x)})^T \\ s.t\ \ g(x)=(g_1(x),\cdots,g_p(x))^T\leqslant 0 \\ \quad x\in X', \end{cases} \qquad (VFP)$$

其中 X' 为 R^n 中的非空开集,$f{:}X'\to R_m$ 和 $g{:}X\to R^p$ 分别是 X 上的连续可微 R^m − 和 R^p − 预 − 不变凸向量函数,又 $:X'\to R^m$ 是 X' 上的连续可微取正值的向量函数,且 $\pm l$ 在 X' 上 R^m_+ − 预 − 不变凸.

①得到国家自然科学基金的支持

定义 2.1 f称为是 X' 上的 R^m_+ − 不变向量函，如果 f在 X' 上可微，且存在希 $\eta:X'\times X'\to R^n$ 使对任意的 $x,y\in X'$ 有

$$[f(x)-f(y)]^T \geqslant [\eta(x,y)]^T \nabla f(y),$$

其中 $\nabla f(y)=(\nabla f_1,(y),\nabla f_2(y),\cdots,\nabla f_m(x))$. f称为是 X' 上的 R^m_+ − 预 − 不变凸向量函数，如果存在 $\eta:X'\times X'\to R^n$ 使对任意的 $x,y\in x'$ 和任意的 $\lambda\in(0,1)$ 有

$y+\lambda\eta(x,y)\in X'$且$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\geqslant f(y+\lambda\eta(x,y))$.

不变凸性和预 − 不变凸性是凸性的两种推广形式，不变凸性与预 − 不变凸性有如下关系.

引理 2.1[9] 若 f在 X' 上可微且为 X' 上的 R^m_+ − 预 − 不变凸向量函数(关于 η)，则 f为在 X' 上的 R^m_+ − 不变凸向量函数(关于 η).

类似于[9,定理1.2],我们有预 − 不变凸函数的如下性质.

引理 2.2 若 $f:X'\to R^m$ 和 $g:X'\to R^p$ 在 X' 上关于同一 η 分别是 R^m_+ − 和 R^p_+ − 预 − 不变凸的，则对任意的 $A\in R^{k\times m}_+$ 和 $B\in R^{k\times p}_+$,$Af+Bg$ 在 X' 上关于 η 是 R^k_+ − 预 − 不变凸的.

关于预 − 不变凸函数，*weir* 和 *Jeyakumar* 证明了下面的择一性命题.

引理 2.3[9] 若 f为 X' 上的 R^m_+ − 预 − 不变凸函数，则下列系统有且仅有一个成立：

(i)存在$x\in X'$使得$f(x)<0$,

(ii)存在$\lambda\in\wedge_+$使得对任意$x\in X'$有$\lambda^T f(x)\geqslant 0$

其中$\wedge_+=\{\lambda\in R^m_+ \mid \sum_{j=1}^{m}\lambda_i=1\}$.

设 $S\subset R^m$，称$\bar{y}\in S$ 为 S 的一个弱极小有效点，若不存在 $y\in S$ 使得 $y<\bar{y}$, 称 $y^0\in S$ 为 S 的一个弱极大有效点，若不存在 $y\in S$ 使得 $y>y^0$. S 的所有弱极小有效点构成的集合和所有弱极大有效点构成的集合分别记为 $w-MinS$ 和 $w-MaxS$.

记问题(VFP)的可行域为X,即$X=\{x\in X':g(x)\leqslant 0\}$.

定义 2.2 $\bar{x}\in X$ 称为是 (VFP) 的一个弱有效解，若 $F(\bar{x})\in w-MinF(X)$.

本文将在弱有效解意义下讨论两种对偶规划问题. 假定(VFP)中的f,g和$\pm l$的预 − 不变凸性是关于同一个η.

§3 对偶问题I

定义问题(VFP)的向理值*Lagrange*函数$l:X'\times R^{m\times p}_+\to R_m$如下:

$$L(x,u)=F(x)+[diag(l_1(x),\cdots,l_m(x))]^{-1}Ug(x)$$

其中 $diag(l_1(x),\cdots,l_m(x))$ 为 $l_1(x),\cdots,l_m(x)$ 构成的对角矩阵，$R^{m\times p}_+$ 为 $m\times p$ 的非负矩阵全体. 我们简记.

$$Uog(x)=[diag(l_1(x),\cdots,l_m(x))]^{-1}Ug(x).$$

称 $(\bar{x},\bar{U})\in X'\times R^{m\times p}_+$ 为向量值 *Lagrange* 函数 L 的一个弱鞍点，若

$$L(\bar{x},\bar{u})\in w-Min\{L(x,\bar{u}):x\in X'\}\bigcap w-Max\{L(\bar{x},U):U\in R^{m\times p}_+\}.$$

命题 3.1 $(\bar{x},\bar{u})\in X'\times R^{m\times p}_+$ 是 L 的一个弱鞍点当且仅当.

(1)$L(\bar{x},\bar{u})\in w-Min\{L(x,\bar{u})|x\in X'\}$

(2)$g(\bar{x})\leqslant 0$,

(3)$Uog(\bar{x})\nless 0$,

命题 3.2 若 $(\bar{x},\bar{u})$ 是 L 的弱鞍点，且$\bar{u}og(\bar{x})=0$，则$\bar{x}$ 为 (VFP) 的弱有效解．

令$\mathbf{W}=(\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_m)^{\mathbf{T}}\in\mathbf{R}_m$，

$$\mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{w})=(\mathbf{f}_1(\mathbf{x})-\mathbf{w}_1\mathbf{l}_1(\mathbf{x}),\cdots,\mathbf{f}_m(\mathbf{x})-\mathbf{w}_m\mathbf{l}_m(\mathbf{x}))^{\mathbf{T}}.$$

定理 3.1(弱鞍点定理) 设 (VFP) 满足 Slater 约束规格．若$\bar{x}$ 是 (VFP) 的弱有效解，则存在$\bar{u}\in R_+^{m\times p}$ 使 $(\bar{x},\bar{u})$ 是 L 的弱鞍点，且$\bar{u}og(\bar{x})=0$.

证 令$\bar{w}=F(\bar{x})$，则 $H(\bar{x},\bar{w})=0$．因$\bar{x}$ 是 (VFP) 的弱有效解，我们易证

$$H(x,\bar{w})\nless H(\bar{x},\bar{w})=0 \text{ 对任意的} x\in X. \tag{3.1}$$

事实上,若(3.1)不成立,则存在$x^0\in X$使$H(x^0,\bar{w})<0$,即

$$f_i(x^0)-\bar{w}_i l_i(x^0)<0,\quad i=1,2,\cdots,m.$$

因此,有

$$F_i(x^0)=\frac{f_i(x^0}{l_i(x^0)}<\overline{w^0}_i,\ i=,2,\cdots,m.$$

即 $F(x^0)<\bar{w}=F(\bar{x})$。这与$\bar{x}$ 是 (VFP) 的弱有效解矛盾．由 (3.1) 可知如下系统．

$$(H(x,\bar{w}),g(x))<0,\ x\in X'$$

无解．因 f,g 和 $\pm l$ 在 X' 上关于同一 η 分别是 $R_+^m-R_+^p-$ 和 R_+^m- 预 $-$ 不变凸的，由引理 2.2 可知，$(H(.,\bar{w}),g(\cdot))$ 在 X' 上是 $R_+^m\times R_+^p-$ 预 $-$ 不变凸的．根据引理 2.3, 存在 $(\bar{\mu},\bar{\lambda})\in R_+^m\times R_+^p$，$(\bar{\mu},\bar{\lambda})\neq 0$，使

$$\bar{u}^T H(x,\bar{w})+\bar{\lambda}^T g(\bar{x})\geqslant 0\quad Vx\in X'. \tag{3.2}$$

因 $g(\bar{x})\leqslant 0,\bar{\lambda}\in R_+^p$，故$\bar{\lambda}^T g(\bar{x})\leqslant 0$，但由 (3.2) 有$\bar{\lambda}^T g(\bar{x})\geqslant 0$，因此

$$\bar{\lambda}^T g(\bar{x})=0. \tag{3.3}$$

假如$\bar{u}=0$，则$\bar{\lambda}\in R_+^p\setminus\{0\}$．根据 Slater 约束规格，存在 $x'\in X'$ 使 $g(x')<0$，从而$\bar{\lambda}^T g(x')<0$．但将$\bar{\mu}=0$ 和 $x=x'$ 代入 (3.2) 有$\bar{\lambda}^T g(x')\geqslant 0$．此矛盾说明$\bar{\mu}\neq 0$，故$\bar{\mu}\in R_+^m\setminus\{0\}$．取 $e\in R_+^m$ 使$\bar{\mu}^c=1$．令$\overline{U}=e\bar{\lambda}^T$，则$\overline{U}\in R_+^{m\times p}$，$\bar{\mu}^T\overline{U}=\bar{\lambda}^T$，且由 (3.3) 有$\overline{U}og(\bar{x})=0$．根据命题 3.1，假设 $(\bar{x},\overline{U})$ 不是 L 的弱鞍点，则

$$L(\bar{x},\bar{u})\notin W-Min\{L(x,\bar{u})|x\in X'\}$$

故存在$\tilde{x}\in X'$使$L(\tilde{x},\bar{u})<L(\bar{x},\bar{u})$,即

$$\frac{r_i(\tilde{x})+\bar{u}_i g(\tilde{x})}{l_i(\tilde{x})}<\frac{f_i(\bar{x})}{l_i(\bar{x})}=\bar{w}_i,\quad i=1,2,\cdots,m,$$

其中$\overline{U}=(\bar{u},\cdots,\bar{u}_m)^T$．由此式有

$$f_i(\tilde{x})\qquad-\bar{w}_i l_i(\tilde{x})+\bar{u}_i g(\tilde{x})<0,\ i=1,2,\cdots,m,$$

即

$$H(\tilde{x},\bar{w})+\bar{u}g(\tilde{x})<0,$$

从而$\bar{u}^T H(\tilde{x},\bar{w})+\bar{\lambda}^T g(\tilde{x})=u^T(H(\tilde{x},\bar{w})+\bar{u}g(\tilde{x}))<0$．这与 (3.2) 矛盾，因此 $(\bar{x},\bar{u})$ 是 L 的弱鞍点。

为导出第一种规划问题,我们可证以下命题.

命题 3.3 若 $(\bar{x},\bar{u})\in x'\times R_+^{m\times p}$ 是 L 的弱鞍点，则存在$\bar{\lambda}\in\wedge_+$ 使 $\vee_x L(\bar{x},\bar{u})\bar{\lambda}=0$.

令 $T=\{(x,U)\in X'\times R_+^{m\times r}|\exists\ \lambda\in\wedge_+$ 使$\vee_x L(x,u)\lambda=0\}$.

假设 T 非空．事实上我们仅需假设对每个 $U\in R_+^{m\times p}$，$\{L(x,U)|x\in X'\}$ 满足 R_+^m- 紧致条

件，则由命题 3.3 即知此条件能满足[3]。

现在定义(VFP)的一个对偶问题为:

$$V-max\ \ L(x,u)$$

$$s.t.(x,u)\in T. \qquad (VFD1)$$

$(\bar{x},\bar{u})\in T$ 称为是 $(VFD1)$ 的一个弱有效解若 $L(\bar{x},\bar{u})\in w-Max\{L(x,u)|(x,u)\in T\}$。

定理 3.2(弱对偶定理) 若 x 是 (VFP) 的可行解，$(\bar{x},\bar{U})$，是 $(VFD1)$ 的可行解，则 $F(x) \nless L(\bar{x},\bar{u})$。

证 因 $(\bar{x},\bar{u})\in t$，故存在$\bar{\lambda}\in\wedge+$ 使 $\vee_x L(\bar{x},\bar{u})\bar{\lambda}=0$。于是，有

$$[\eta(x,\bar{x})]^T\vee F(\bar{x})\bar{\lambda}=-[\eta(x,\bar{x})]^T\vee_x(\bar{u}og(\bar{x}))\bar{\lambda}$$

$$=-[\eta(x,\bar{x})]^T\sum_{i=1}^m\bar{\lambda}_i\vee\frac{\bar{u}_i^T g(\bar{x})}{\lambda_i(\bar{x})}$$

$$=-[\eta(x,\bar{x})]^T\sum_{i=1}^m\bar{\lambda}_i\frac{\lambda_i(\bar{x})\vee g(\bar{x})\bar{u}_i-\bar{u}_i^T g(\bar{x})\vee l_i(\bar{x}}{\lambda_i^2(\bar{x})}.$$

由于 g 在 x' 上是可微的且关于 η 是 R_+^p − 预 − 不变凸的，$\pm l$ 在 x' 上是可微的且关于 η 是 R_+^m − 预 − 不变凸的，因此根据引理 2.1 有

$$[\eta(x,\bar{x})]^T\vee F(\bar{x})\bar{\lambda}$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^m\bar{\lambda}_i\frac{l_i(\bar{x})\bar{u}_i^T[g(\bar{x})-g(x)]-\bar{u}_i^T g(\bar{x})[l_i(\bar{x})-l_i(x)]}{l_i^2(\bar{x})}$$

$$=\sum_{i=1}^m\bar{\lambda}_i\frac{l_i(x)}{l_i(\bar{x})}\quad[\bar{u}_i^T g(\bar{x})/l_i(\bar{x})\quad-\bar{u}_i g(x)/l_i(x)\quad]$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^m\bar{\lambda}_i\frac{l_i(x)}{l_i(\bar{x})}\ \frac{\bar{u}_i^T g(\bar{x})}{\lambda_i(\bar{x})}.$$

另一方面有

$$[\eta(x,\bar{x})]^T\vee F(\bar{x})\bar{\lambda}=[\eta(x,\bar{x})]^T\sum_{i=1}^m\bar{\lambda}_i\vee\frac{f_i(\bar{x}}{\lambda_i(\bar{x})}$$

$$=\sum_{i=1}^m\bar{\lambda}_i[\eta(x,\bar{x})]^T\frac{\lambda_i(\bar{x})\vee f_i(\bar{x})-f_i(\bar{x})\vee\lambda_i(\bar{x})}{l_i^2(\bar{x})}.$$

再根据 f和 $\pm l$ 在 x' 上的可微性和 R_+^m − 预 − 不变凸性 (关于同一 η)，以及引理 2.1 得

$$[\eta(x,\bar{x})]^T\vee F(\bar{x})\bar{\lambda}\leqslant\sum_{i=1}^m\bar{\lambda}_i\frac{l_i(\bar{x})[f_i(x)-f_i(\bar{x})]-f_i(\bar{x})[l_i(x)-l_i(\bar{x})]}{l_i^2(\bar{x})}$$

$$=\sum_{i=1}^m\bar{\lambda}_i\frac{l_i(x)}{l_i(\bar{x})}[f_i(x)/l_i(x)\quad-\frac{f_i(\bar{x})}{l_i(\bar{x})}].$$

因此,我们有

$$\sum_{i=1}^m\bar{\lambda}_i\frac{l_i(x)}{l_i(\bar{x})}[\frac{f_i(x)}{l_i(x)}-\frac{f_i(\bar{x})}{l_i(\bar{x})}]\geqslant\sum_{i=1}^m\bar{\lambda}_i\frac{l_i(x)}{l_i(\bar{x})}\frac{\bar{u}^T g(\bar{x})}{l_i(\bar{x})},$$

即

$$\sum_{i=1}^{m}\bar{\lambda}_i\frac{l_i(x)}{l_i(\bar{x})}\frac{f_i(x)}{l_i(x)} \geqslant \sum_{i=1}^{m}\bar{\lambda}_i\frac{l_i(x)}{l_i(\bar{x})}\frac{f_i(\bar{x})+\bar{u}_i^T g(\bar{x})}{l_i(\bar{x})},$$

亦即

$$\sum_{i=1}^{m}\bar{\lambda}_i\frac{l_i(x)}{l_i(\bar{x})}f_i(x) \geqslant \sum_{i=1}^{m}\bar{\lambda}_i l_i(\bar{x},\bar{u}).$$

因此有$F(x) \nless L(\bar{x},\bar{u})$.

由上述弱对偶定理立即得

推论 3.1 若 x 是 (VFP) 的可行解，$(\bar{x},\bar{u})$ 是 $(VFD1)$ 的可行解，且 $F(x)=L(\bar{x},\bar{u})$，则 x 和 $(\bar{x},\bar{u})$ 分别是 (VFP) 和 $(VFD1)$ 的弱有效解.

定理 3.3(强对偶定理) 设 (VFP) 满足 *sleater* 约束规格. 若$\bar{x}$ 为 (VFP) 的弱有效解，则存在$\bar{u}\in R_+^{m\times p}$ 使得 $(\bar{x},\bar{u})$ 是 $(VFD1)$ 的弱有效解，且 $F(\bar{x})=L(\bar{x},\bar{u})$.

证 由定理 3.1，存在$\bar{u}\in R_+^{m\times p}$ 使 $(\bar{x},\bar{u})$. 是 L 的弱鞍点，且$\bar{U}og(\bar{x})=0$ 从而 $F(\bar{x})=L(\bar{x},\bar{U})$. 再由命题 3.3 知，$(\bar{x},\bar{u})$ 是 $(VFD1)$ 的可行解，因此由推论 3.1 知，$(\bar{x},\bar{u})$ 是 $(VFD1)$ 的弱有效解.

§4 对偶问题Ⅱ

令$G(x,w,u)=H(x,w)+ug(x)$,

$T'=\{(x,w,U)\in X'\times R^m\times R_+^{m\times p} \mid \exists\ \lambda\in\wedge+$ 使$\nabla_x G(x,w,u)\lambda=0\}$.

考虑(VFP)的第二个对偶规划问题为

$$V-\begin{cases} max\ \ w=(w_1,m,w_m)^T \\ s.t\ \ (x,w,U)\in T' \\ \qquad G(x,w,u)\geqslant 0. \end{cases} \qquad (VFD2)$$

定理 4.1(弱对偶定理) 若 x 为 (VFP) 的可行解，$(\bar{x},\bar{w},\bar{u})$ 为 $(VFD2)$ 的可行解，则 $F(x) \nless \bar{w}$.

证 因 x 是 (VFP) 的可行解，$(\bar{x},\bar{w},\bar{u})$ 是 $(VFD2)$ 的可行解，故 $g(x)\leqslant 0$, 且存在$\bar{\lambda}\in\wedge+$ 使

$$\nabla_x G(\bar{x},\bar{w},\bar{u})\bar{\lambda}=0. \qquad (4.1)$$

因 f和 $\pm l$ 在 X 上关于同一 η 是 R_+^m － 预 － 不变凸的且是可微的，由引理 2.2 可知$\bar{\lambda}^T H(x,\bar{w})$ 对变量 x 在 X 上关于 η 是 R_+ － 预 － 不变凸的且是可微的. 于是，由引理 2.1 和 (4.1) 有

$$\begin{aligned}&\bar{\lambda}^T H(x,\bar{w})-\bar{\lambda}^T H(\bar{x},\bar{w})\geqslant[\eta(x,\bar{x})]^T\nabla_x(\bar{\lambda}^T H((\bar{x},\bar{w}))\\&=[\eta(x,\bar{x})]^T\nabla_x H(\bar{x},\bar{w})\bar{\lambda}=-[\eta(x,\bar{x})]^T\nabla_x(\bar{u}g(\bar{x}))\bar{\lambda}\\&=-[\eta(x,\bar{x})]^T\nabla_x(\bar{\lambda}^T\bar{u}g(\bar{x})).\end{aligned}$$

又由于 g 在 X' 上是可微的且关于 η 是 R_+^p － 预 － 不变凸的，根据引理 2.2 和 2.1,$\bar{\lambda}^T\bar{U}g$ 在 X 上关于 η 是 R_+^- － 不变凸的，因此由上式有$\bar{\lambda}H(x,\bar{w})-\bar{\lambda}^T H(\bar{x},\bar{w})\geqslant-(\bar{\lambda}^T\bar{u}g(x)-\bar{\lambda}^T\bar{u}g(\bar{x}))$ $\geqslant\bar{\lambda}^T\bar{u}g(\bar{x})$, 故

$$\bar{\lambda}^T H(x,\bar{w})\geqslant\bar{\lambda}^T G(\bar{x},\bar{w},\bar{u}).$$

又因$G(\bar{x},\bar{w},\bar{u})\geqslant 0$,故

$H(x,\bar{w})\nless 0$. 因此,$F(x)\nless\bar{w}$.

推论 4.1 若 x 为 (VFP) 的可行解，$(\bar{x},\bar{w},\bar{u})$ 为 $(VFD2)$ 的可行解，且 $F(x)=\bar{w}$, 则 x 和 $(\bar{x},\bar{w},\bar{u})$ 分别是 (VFP) 和 $(VFD2)$ 的弱有效解.

定理 4.2(强对偶定理) 设 (VFP) 满足 *Slater* 约束规格. 若$\bar{x}$ 为 (VFP) 的弱有效解，则存

在$\overline{w}\in R^{m}$,$\overline{u}\in R_{+}^{m\times p}$,使$(\overline{x},\overline{w},\overline{u})$是$(VFD2)$的弱有效解，且$F(\overline{x})=\overline{w}$.

证 定义

$$
\begin{aligned}
&v-minH(x,w)\\
&\quad s.t\ x\in X \qquad \text{和}\\
&\qquad (D_w)V-maxG(x,w,u)\\
&\qquad\quad s.t(x,u)\in T(w),
\end{aligned}
$$

其中$T(w)=\{(x,u)\in X'\times R_{+}^{m\times p}|\exists\ \lambda\in\wedge_{+}$使$\vee_{x}G(x,w,u)\lambda=0\}$

令$\overline{w}=F(\overline{x})$,则$H(\overline{x},\overline{w})=0$. 与定理3.2证明的开头部分一样，易证$\overline{x}$是$(P_{w})$的弱有效解. 由于$f$和$\pm l$在$X'$上可微且关于同一$\eta$是$R_{+}^{m}$ - 预 - 不变凸的，由引理2.2知对任意的$w\in R^{m}$,$H(x,w)$关于x在X'上可微且关于η是R_{+}^{m} - 预 - 不变凸的. 将定理3.3应用于多目标分式规划$(P_{\overline{w}})$(视其目标函数分母都等于1),则存在$\overline{u}\in R_{+}^{m\times p}$使$(\overline{x},\overline{u})$是$(D_{\overline{w}})$的弱有效解，且$G(\overline{x},\overline{w},\overline{u})=H(\overline{x},\overline{w})=0$. 显然$(\overline{x},\overline{w},\overline{u})$是$(VFD2)$的可行解. 假若$(\overline{x},\overline{w},\overline{u})$不是$(VFD2)$的弱有效解，则存在$(VFD2)$的可行解$(x',w',u')$使$\overline{w}<w'$,从而

$$H(\overline{x},w')<H(\overline{x},\overline{w})=0.$$

显然,$\overline{x}$也是$(P_{w'})$的可行解,(x',u')也是$(D_{w'})$的可行解. 将定理3.2应用于$(P_{w'})$和$)D_{w'})$,则有

$$H(\overline{x},w')\not<G(x',w',u').$$

因此,$G(x',w',u')\not>0$,这与(x',w',u')是$(VFD2)$的可行解矛盾，故$(\overline{x},\overline{w},\overline{u})$是$(VFD2)$的弱有效解.

§5 两种对偶规划的关系

前面就应两种对偶形式讨论了(VFP)与对偶规划之间的关系. 这些结果推广了[1]中的有关定理. 本节我们讨论这两种对偶规划之间的相互关系.

引理5.1 若$(x,U)\in T$,$w=F(x)+Uog(x)$,则$(x,w,u)\in T'$. 反之，若$(x,w,u)\in T'$,且$G(x,w,u)=0$则$(x,u)\in T$.

定理5.1 (i)若$(\overline{x},\overline{w},\overline{u})$是$(VFD2)$的弱有效解，且$G(\overline{x},\overline{w},\overline{u})=0$,则$(\overline{x},\overline{u})$是$(VFD1)$的弱有效解. (ii)若$(\overline{x},\overline{u})$是$(VFD1)$的弱有效解，且$\overline{w}=F(\overline{x})+\overline{u}og(\overline{x})\in F(x)$,则$(\overline{x},\overline{w},\overline{u})$是$(VFD2)$的弱有效解.

证 (i)由引理5.1知$(\overline{x},\overline{u})$是$(VFD1)$的可行解. 假若$(\overline{x},\overline{u})$不是$(VFD1)$的弱有效解，则存在$(x',u')\in T$ 使

$$L(\overline{x},\overline{u})<L(x',u').$$

令$w'=L(x',u')$,则再由引理5.1知(x',w',u')是$(VFD2)$的可行解. 又由条件$G(\overline{x},\overline{w},\overline{u})=0$可得$\overline{w}=L(\overline{x},\overline{u})$,所以$\overline{w}<w'$. 但这与$(\overline{x},\overline{w},\overline{u})$是$(VFD2)$的弱有效解矛盾，故$(\overline{x},\overline{u})$是$(VFD1)$的弱有效解.

(ii)由引理5.1知$(\overline{x},\overline{w},\overline{u})$是$(VFD2)$的可行解. 假若$(\overline{x},\overline{w},\overline{u})$不是$(VFD2)$的弱有效解，则存在$(VFD2)$的可行解$(x',w',u')$使$\overline{w}<w'$. 又因$\overline{w}\in F(X)$,故存在经$x^{0}\in X$使$\overline{w}=F(x^{0})$,因而$F(x^{0})<w'$. 这与定理4.1矛盾，因此$(\overline{x},\overline{w},\overline{u})$是$(VFD2)$的弱有效解.

注1 在定理5.1中我们不要求$\overline{w}=F(\overline{x})+\overline{u}og(x)\in w-MinF(x)$,这大大减弱了[1]中相应定理的假设条件.

注2 本文的部分结果还可推广到一般非控解情形.

参考文献

[1]胡毓达,张峰,多目标分式规划的两种新对偶形式,应用数学学报 14(1991),128–135.

[2]林锉云,多目标分式规划对偶理论,高等学校计算数学学报 4(1998),289–300.

[3]汪寿阳,多目标最优化中的共轭对偶理论,系统科学与数学 4(1984),303–312.

[4]Graven,B.D.and B.M.Glover, Invex functions and duality, J.Austral, Math. Soc(scr.A)39(1985),1–20.

[5]Sawaragi,Y.et al, Theory of Multiobjective OPtimization, Academic Press, New York,(1985).

[6]Singh, c., Aclass of multiple–criteria fractional programming problems, J.Nath. Ana. Appl.115(1986),202–213.

[7]Weir,T., A dual for a multiple objective fractional programming problem,J. Inform. Optim. Sci.7(1986),261–269.

[8]Egudo, R.R., Multiobjective fractional duality, Bull. Austral. Math. Soc.38(1988),367–378.

[9]Weir,T.and V.Jeyakumar, A class of nonconvex functions and mathe–matical programming, Bull. Austral. Math. Soc. 38(1988),177–189.

[10]bazaraa, M.S.and C.M.Shetty, Nonlinear Programming:Theory and Algorithms, John Wiley & Sons, New York,(1979).