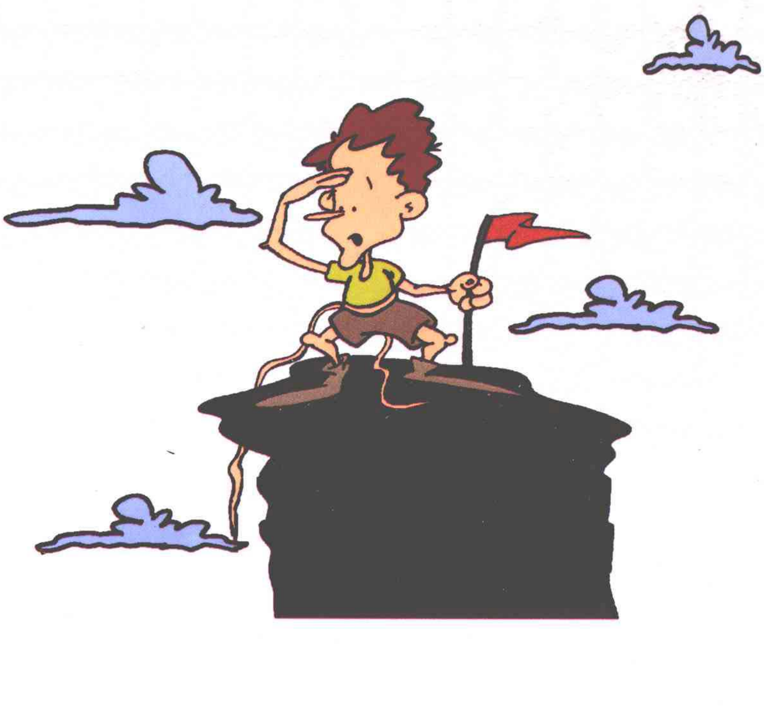
奥林匹克竞赛实战丛书

高中数学奥林匹克协作体学校夏令营专题讲座与模拟训练

第二届·2002

刘诗雄　边红平　主编



中国科学技术大学出版社

☆ 奥林匹克竞赛实战丛书

高中数学奥林匹克协作体学校
夏令营专题讲座与模拟训练

（第二届·2002）

顾　问　裘宗沪
主　编　刘诗雄　边红平

中国科学技术大学出版社
2003·合肥

内容简介

本书汇集了高中数学奥林匹克中学协作体第二届(2002)夏令营中十余位教练员的专题讲座的讲稿,还有十几套高中数学竞赛的模拟试卷。讲座与试卷内容丰富、设计精心、难度适宜、解答详尽,有很强的训练针对性,对今后的奥赛选拔赛有直接的参考意义,是一套比较宝贵的数学竞赛的辅导和学生自学材料,也是广大中学数学教师不可多得的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高中数学奥林匹克协作体学校夏令营专题讲座与模拟训练:第二届·2002/刘诗雄 主编.—合肥:中国科学技术大学出版社,2003.7
ISBN 7-312-01570-0

Ⅰ.高… Ⅱ.刘… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 035805 号

中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路 96 号,230026)
合肥学苑印务有限公司
全国新华书店经销

开本:787×1092/16 印张:12 字数:291 千
2003 年 7 月第 1 版 2003 年 7 月第 1 次印刷
印数:1—4000 册
ISBN 7-312-01570-0/G·192 定价:15.00 元

序

在老一辈数学家的倡导和众多数学工作者、数学教师的共同努力下，我国的数学奥林匹克活动得到了较好的发展，取得了丰硕的成绩和丰富的经验。近年来出现的一个现象正在引起社会的关注：国内有一批很好的中学，她们把数学奥林匹克活动规范到学校的选修课和活动课之中。在这些学校，学生但凭兴趣学习数学，不必奔波于社会上各种"奥班"或"奥校"之间，学得很生动、很有效。这些学校实际上已成为数学和科学人才发现、国际数学奥林匹克选手成长的沃土。尤其令人兴奋的是，在这些学校参加过数学奥林匹克活动的学生差不多都是发展较全面、高考成绩最好的学生，而且进入大学学习后，其发展的优势更为明显。事实上，学生科学精神和创新品质的培养从来都是具体的教育活动。规范的数学奥林匹克活动体现的正是素质教育的要求，其中有丰富多彩的研究性学习。对数学奥林匹克活动这个客观存在，教育管理者和专家应本着实事求是的态度开展研究。

值得庆幸的是，国内一些在数学奥林匹克活动中成绩卓著的学校，为了探索数学和科学人才发现与培养的规律、总结数学奥林匹克活动的经验和教训这个值得称道的目的，共同构筑了一个交流的平台——中国数学奥林匹克协作体学校（以下简称"协作体"）。协作体由东北育才学校、上海中学、华南师大附中、湖南师大附中、武钢三中、大连二十四中、青岛二中、清华附中、人大附中、复旦附中、上海延安中学、江苏盐城中学、华中师大一附中、黄岗中学、长沙一中、深圳中学等 16 所中学组成。协作体成立近四年来开展了一系列有意义的活动，如一年一度的数学夏令营，讲座和辅导都由协作体学校教师担任。因此夏令营不仅给那些优秀的数学爱好者提供了交流学习心得的时空舞台，而且通过教师的"教"这种形式来实现对教师的培训，促进了数学教师的成长。协作体在实践中显示出旺盛的生命力，较好地促进了中国数学奥林匹克活动和科学教育的健康发展。

第二届中国数学奥林匹克协作体夏令营于 2002 年 8 月上旬在武钢三中举办。本书收录的是本次夏令营的活动资料。容易看出，书中内容并不以难取胜，而是通过精选的材料帮助学生理解数学思想、方法，训练学生分析问题、解决问题的能力，因而具有很好的针对性和实用性。

随着科学技术的发展，数学的重要性会不断被人类所认识，年轻一代学习数学的热情会更加高涨。如何通过数学奥林匹克活动这种被广泛接受的形式更好地发现和培养数学和科学人才，无疑是一个很有价值的课题。祝愿协作体和所有有相同志趣的学校在数学和科学人才的发现和培养方面不断取得新的成果、新的经验。

裘宗沪

2003 年 6 月

前　言

本书是第二届中国数学奥林匹克协作体夏令营(2002年,由武钢三中主持)的成果。书中汇集了夏令营中十余位教练员的专题讲座的讲稿,还有14套高中数学竞赛模拟试卷。题目比较有特色,内容丰富,难度适宜,很有训练针对性,是一套比较宝贵的数学竞赛辅导和学生自学的资料。

全书共分三大部分。第一部分是"专题讲座",包括12个讲座。每个讲座包括:"知识与方法",简单勾勒数学奥赛中重要的知识点、定理及方法等;"范例选讲",精选了一些典型例题,进行详细解答,而且更重要的是给出了解决数学问题的思路与方法;"训练题",结合专题讲座内容,以供学生巩固提高之用。第二部分是"模拟训练",汇集了14份模拟试卷,试卷难度适宜、针对性强,很适合各类数学奥赛辅导班用来检验参赛学生的水平。第三部分为"练习解答",这部分对所有的"专题讲座"中的训练题及"模拟训练"中的题目给出了详细的解答。

第二届协作体学校夏令营得到了中国数学奥林匹克委员会副主席裘宗沪教授和协作体两执行主席之一的湖南师大附中常力源校长的悉心指导,得到了协作体各成员学校校长的大力支持。谨借此书出版之机深表谢意。郭希连、岑爱国两位老师参与了部分书稿的整理工作,在此一并表示感谢!

愿本书能为广大高中数学奥林匹克竞赛的参加学生和辅导老师有所帮助!

主　编

2003年6月

目　　录

专题讲座

讲座一　平面几何中一些重要定理的应用

江苏省盐城中学　王金文

知识与方法

一、与三角形有关的定理

1. 梅涅劳斯定理　一直线截$\triangle ABC$的边BC、CA、AB或其延长线于D、E、F，则$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$。

说明：(1) 结论的图形应考虑直线与三角形三边交点的位置情况，因而本题图形应该有两个。

(2) 结论的结构是三角形三边上的6条线段的比，首尾相连，组成一个比值为1的等式。

(3) 其逆定理为：如果D，E，F分别在$\triangle ABC$的边BC，CA，AB(或其延长线上)，并且$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$，那么$D$、$E$、$F$三点在同一条直线上。

(4) 梅氏定理及其逆定理不仅可以用来证明点共线问题，而且是解决许多比例线段问题的有力工具。用梅氏定理求某个比值的关键，在于恰当地选取梅氏三角形和梅氏线。

2. 塞瓦定理　设O是$\triangle ABC$内任意一点，AO，BO，CO分别交对边于D、E、F，则$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$。

说明：(1) 该定理可借助于梅氏定理来证明(也可用面积法来证明)。如果O点在三角形形外，结论仍然是成立的。

(2) 其逆定理为：在$\triangle ABC$三边(所在直线)BC、CA、AB上各取一点D，E，F，若有$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$，则$AD$，$BE$，$CF$平行或共点。

(3) 塞瓦定理及其逆定理是证明三直线交于一点(线共点)问题的重要定理，应用塞瓦定理很容易证明三角形中的主要线段的共点问题。

3. 三角形的四心　三角形的三条中线共点，三条角平分线共点，三条高线共点，三条中垂线共点。三角形的垂心、重心、外心共线(欧拉线)，并且重心把连结垂心和外心的线段分成$2:1$的两段。三角形的外心和内心距离$d=\sqrt{R(R-2r)}$(此公式称为欧拉式，由此还得到$R\geqslant 2r$)，其中R和r分别是三角形外接圆和内切圆半径。

4. 斯特瓦尔特定理 在$\triangle ABC$中,D是BC上的一点,则$AD^2 \cdot BC+BD \cdot DC \cdot BC=AC^2 \cdot BD+AB^2 \cdot DC$。

说明:该定理在解答几何问题,特别是在计算线段长度的问题时,有许多应用。由该定理易推出三角形的中线长为$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$,三角形的角平分线长为$t_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$,三角形的高线长为$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$。

5. 厄尔多斯一摩德尔定理 设P是$\triangle ABC$内或周界上任一点,P到三边的距离分别为x,y,z,则$PA+PB+PC \geqslant 2(x+y+z)$,等号成立当且仅当$\triangle ABC$为正三角形且$P$是$\triangle ABC$的中心。

二、与圆有关的定理

1. 西姆松定理 过三角形外接圆上任意一点作三边的垂线,则三垂足共线(称为西姆松线)。

说明:(1) 其逆定理为:若一点到三角形三边所在直线的垂足共线,则该点在三角形的外接圆上。

(2) 推广:通过$\triangle ABC$外接圆上的一点P引与三边BC、CA,AB分别成同向等角的直线PD,PE,PF与三边交于D,E,F,则D,E,F三点共线。(卡诺定理)

2. 托勒密定理 若四边形内接于一圆,则该四边形的两对边乘积之和等于它的对角线乘积。

说明:(1) 其逆定理为:若四边形两对边乘积之和等于它的对角线乘积,则该四边形内接于圆。

(2) 推广:对于任意凸四边形$ABCD$,恒有两对边乘积之和大于或等于它的对角线乘积。(托勒密不等式)

范例选讲

例1 若在直角$\triangle ABC$中,CK是斜边AB上的高,CE是$\angle ACK$的角平分线,E点在AK上,D是AC的中点,F是DE与CK的交点,求证:$BF /\!/ CE$。

分析 要证两直线平行,可证角度相等,可证对应的比例式成立。本题题设中有角平分线、直角三角形,从而可得到许多比例式,故从比例式入手来证平行,即证$\frac{KF}{FC}=\frac{BK}{BE}$。

证明 因为CE平分$\angle ACK$,所以$\angle ACE=\angle KCE$。又在直角$\triangle ABC$中,CK为斜边上的高,所以有$\angle BAC=\angle BCK$,从而$\angle BEC=\angle BCE$,所以$BC=BE$。

把梅氏定理用于$\triangle ACK$和三点D,E,F,则得

$$\frac{CD}{DA} \cdot \frac{AE}{EK} \cdot \frac{KF}{FC}=1,$$

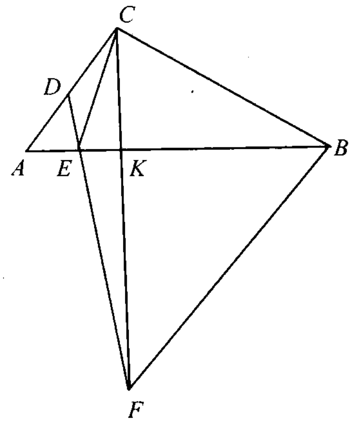
于是

$$\frac{KF}{FC}=\frac{EK}{AE}=\frac{CK}{AC}=\frac{BK}{BC}=\frac{BK}{BE},$$

即 $$\frac{KF}{FC}=\frac{BK}{BE}。$$

利用分比定理得 $$\frac{KF}{KC}=\frac{BK}{KE},$$

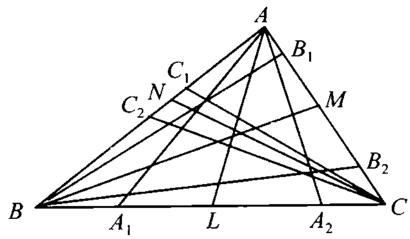
所以 $$FB\parallel CE。$$



评注 梅氏定理是解决有关比例问题的有力工具,应用该定理的关键是结合题意,恰当地选取梅氏线。

例2 在$\triangle ABC$的边BC,CA,AB上分别取点A_1,B_1,C_1,使AA_1,BB_1,CC_1相交于一点,证明:AA_1,BB_1,CC_1关于相应的角平分线对称的直线AA_2,BB_2,CC_2也相应交于一点。

分析 要证三线共点,由塞瓦定理可知即证$\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}=1$,而题设中已知三线共点,又可得到$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$,从而本题的证明转化为寻求这两个比例式之间的联系。结合题中相等角的条件,借助于三角函数有关知识易证。



证明 把正弦定理用于$\triangle ACC_1$得
$$\frac{AC_1}{C_1C}=\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle CAB},$$
用于$\triangle BCC_1$,得$\frac{CC_1}{C_1B}=\frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle C_1CB}$,

把两式相乘得
$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle CAB}\cdot\frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle C_1CB}。$$

同理
$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle A_1AC}\cdot\frac{\sin\angle BCA}{\sin\angle ABC},$$
$$\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle B_1BA}\cdot\frac{\sin\angle CAB}{\sin\angle BCA},$$

把以上三式相乘,得
$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle C_1CB}\cdot\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle A_1AC}\cdot\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle B_1BA}。$$

类似地,可得
$$\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}=\frac{\sin\angle ACC_2}{\sin\angle C_2CB}\cdot\frac{\sin\angle BAA_2}{\sin\angle A_2AC}\cdot\frac{\sin\angle CBB_2}{\sin\angle B_2BA}。$$

由对称性知$\angle ACC_1=\angle BCC_2$,$\angle C_1CB=\angle ACC_2$,$\angle BAA_1=\angle A_2AC$,$\angle A_1AC=\angle BAA_2$,$\angle CBB_1=\angle B_2BA$,$\angle B_1BA=\angle CBB_2$,从而有
$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}=1。$$

又由AA_1,BB_1,CC_1三点共线和塞瓦定理得

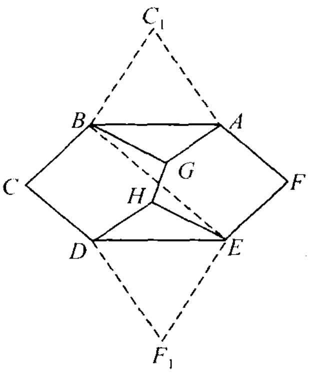
$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

所以有
$$\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}=1。$$

根据塞瓦定理可知，AA_2、BB_2，CC_2 三线共点。

评注 本题解法中的三角函数值比是条件向结论转化的桥梁。

例 3 设 $ABCDEF$ 为凸六边形，满足 $AB=BC=CD$，$DE=EF=FA$，$\angle BCD=\angle EFA=60^\circ$，点 G 和 H 为此六边形内部的两点，使得 $\angle AGB=\angle DHE=120^\circ$，求证：$AG+GB+GH+DH+HE\geqslant CF$。



分析 题目条件让我们联想构造一系列关于托勒密定理的四边形，注意本题图形是由两个等边三角形和一个以 BE 为对称轴的四边形构成的，故可作 C、F 关于直线 BE 的对称点，从而有两组四点共圆，创造了使用托勒密定理的使用条件。

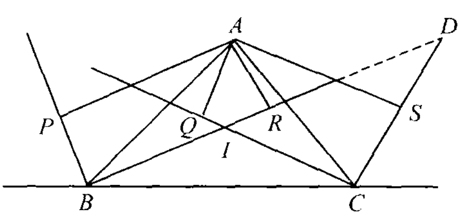
证明 作 C、F 关于直线 BE 的对称点 C_1、F_1，则 $C_1F_1=CF$。由于$\triangle BCD$、$\triangle AEF$ 是等边三角形，所以三角形 ABC_1、DEF_1 也都是等边三角形，所以有$\angle AGB+\angle AC_1B=180^\circ$，$\angle DHE+\angle DF_1E=120^\circ$，从而 $AGBC_1$、$EHDF_1$ 为圆内接四边形。由托勒密定理有
$$C_1G\cdot AB=AG\cdot BC_1+GB\cdot AC_1,$$
因而
$$C_1G=AG+GB,$$
同理
$$HF_1=DH+HE,$$
所以
$$AG+GB+GH+DH+HE=C_1G+GH+HF_1\geqslant C_1F_1=CF。$$

评注 应用托勒密定理的关键是四边形内接于圆，有时需要构造圆内接四边形。构造的方法是多种多样的，本题是利用了对称思想。

例 4 已知$\triangle ABC$ 的顶点 A 在 B，C 两角的内外角平分线上的射影分别是 P，Q，R，S，求证：P，Q，R、S 四点共线。

分析 因 Q，R、S 分别为点 A 向$\triangle ICD$ 三边引垂线的垂足，如能证得点 A 在$\triangle ICD$ 的外接圆上，则根据西姆松定理可知 Q，R，S 三点共线，同理可证 P、Q、R 三点共线，从而问题得证。

证明 延长 BR、CS 相交于 D，则 Q、R、S 是点 A 在$\triangle CDI$ 三边所在直线上的射影。因为 BI、CI 是$\triangle ABC$ 中的角平分线，所以



$$\begin{aligned}\angle IDC&=90^\circ-\angle CID=90^\circ-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)\\&=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle B-\angle C)\\&=\frac{1}{2}\angle A=\angle IAC,\end{aligned}$$

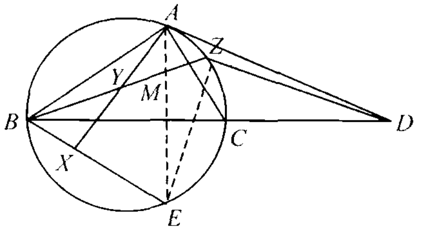
所以，A、I、C，D 四点共圆，故由西姆松定理知，Q，R，S 三点共线。

同理，P，Q，R 三点共线，而过 Q、R 两点的直线是惟一的，所以 P，Q，R，S 四点共线。

评注 本题获解的关键是将四点共线问题转化为两组三点共线问题，从而借助于西姆松定理加以解决。

例 5 在$\triangle ABC$中，角A等于$90°$，角B小于角C，过点A作$\triangle ABC$的外接圆的切线，交直线BC于D，设点A关于BC的对称点为E，作AX垂直BE于X，Y为AX的中点，BY与外接圆交于Z，证明：BD为$\triangle ADZ$外接圆的切线。

分析 要证BD为$\triangle ADZ$外接圆的切线，即证$\angle ZAD=\angle ZDC$。由于$\angle DAZ=\angle ZCA$，$\angle ZBD=\angle CAZ$，所以只需要证明$\triangle ZBD\backsim\triangle ZAC$，即需证$\frac{AC}{BD}=\frac{AZ}{BZ}$，而图中有三角形的截线和圆内接四边形，由梅氏定理和托勒密定理都可以得到相应的比例式或乘积式。



证明 连AE交BZ于M，连ZE，ZC，在$\triangle AXE$中，由梅氏定理得

$$\frac{EB}{BX}\cdot\frac{XY}{YA}\cdot\frac{AM}{ME}=1,$$

因为Y为AX的中点，$XY=YA$，所以

$$\frac{BX}{EB}=\frac{AM}{ME}。$$

设$\angle ABC=\angle EBC=\theta$，则
$$\frac{BX}{EB}=\frac{BX}{AB}=\cos 2\theta,$$

即
$$\frac{AM}{ME}=\cos 2\theta。$$

由托勒密定理知

$$AZ\cdot BE+AB\cdot EZ=AE\cdot BZ。$$

因$AE=2AB\sin\theta=2BE\sin\theta$，代入到上式得

$$AZ+EZ=2BZ\sin\theta, \tag{1}$$

又$\angle AZM=\angle EZM$，由角平分线定理得

$$\frac{AZ}{EZ}=\frac{AM}{MEP}=\cos 2\theta,$$

将上式代入(1)式，可得

$$\frac{AZ}{BZ}=\frac{2\sin\theta\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta},$$

由$\angle ABC=\theta$可得

$$\angle CAD=\theta, \angle ADC=90°-2\theta,$$

于是

$$\frac{AC}{BD}=\frac{2\sin\theta\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta},$$

所以

$$\frac{AC}{BD}=\frac{AZ}{BZ},\quad \frac{AC}{AZ}=\frac{BD}{BE}。\tag{2}$$

由$\angle ZBD=\angle CAZ$及(2)知

$$\triangle ZBD\backsim\triangle ZAC,$$

于是 $$\angle ZCA=\angle ZDB,$$

$$\angle ZCA=\angle ABZ=\angle ZAD,$$

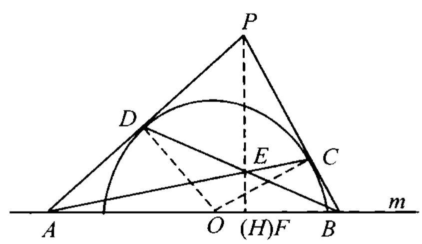
所以 $$\angle ZAD=\angle ZDC。$$

命题得证。

评注 本题证明中充分运用了代数法这一方法，通过计算证明两个比相等证得结论。同时应注意应用托勒密定理的关键是该四边形内接于圆。

例 6 在一条直线 m 的一侧画一个半圆，C,D 是半圆上的两点，半圆上过 C,D 两点的切线分别交直线 m 于 B,A，半圆的圆心 O 在线段 AB 上，E 是线段 AC 和 BD 的交点，F 是 m 上的点，EF 垂直 m，求证：EF 平分 $\angle CFD$。

分析 由题设易证 $\angle DOP=\angle COP$，而 D,O,C,P 四点共圆，因 $EF\perp OF$，如能求得 P,E,F 共线，则 F 与 D,O,C,P 共圆，故有 $\angle DFE=\angle CFE$，即问题得证。因此问题转化为 P,E,F 三点共线的问题。而 P,E,F 三点共线又可转化为直线 PF 过点 E，即三直线 AC,BC,PF 共点的问题。



证明 设 $AD\cap BC=P$，过 P 作直线 m 的垂线，交 m 于点 H，连 OD,OC，由题设知

$$\mathrm{Rt}\triangle OAD\backsim \mathrm{Rt}\triangle PAH,$$

于是 $$\frac{AH}{AD}=\frac{HP}{DO}。$$

类似有 $$\mathrm{Rt}\triangle OCB\backsim \mathrm{Rt}\triangle PHB,$$

于是 $$\frac{BH}{BC}=\frac{HP}{CO}。$$

由 $CO=DO$，有 $\frac{BH}{BC}=\frac{AH}{AD}$。所以有

$$\frac{AH}{HB}\cdot\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PD}{DA}=1。$$

由塞瓦定理知，三条直线 AC,BD,PH 相交于一点，即直线 PH 重合于直线 EF，点 H 与 F 重合。因 $\angle ODP=\angle OCP=90^\circ$，所以 O,D,C,P 四点共圆，直径为 OP。又 $\angle PFO=90^\circ$，从而点 F 也在这个圆上。因此有 $\angle DFP=\angle DOP=\angle COP=\angle CFP$，即 EF 平分 $\angle CFD$。

评注 一旦本题的结论由证角相等转化为证三点共线、三线共点问题，便具有使用塞瓦定理的条件。

训 练 题

1. 设 $\triangle ABC$ 的三条垂线 AD,BE,CF 的垂足分别为 D,E,F，从点 D 作 AB,BE,CF,AC 的垂线，其垂足分别为 P,Q,R,S，则 P,Q,R,S 在同一直线上。

2. 设四边形 $ABCD$ 的一组对边 AB 和 CD 的延长线交于点 E，另一组对边 AD 和 BC 的延长线交于点 F，则 AC 的中点 K，BD 的中点 M 及 EF 的中点 N 三点共线。（牛顿定理）

3. 以 $\triangle ABC$ 的边 BC,CA,AB 为边向外作正方形 $ABDE,ACGF,BCHK$，A_1,B_1,C_1 分别是 KH,GF,DE 的中点，试证明：直线 AA_1,BB_1,CC_1 三线交于一点。

4. $\triangle ABC$中，记BC为a，BC边上的中线长为m_a，现将BC分成n等份，分点为D_1，D_2，…，D_{n-1}，求证：$AD_1^2+AD_2^2+\cdots+AD_{n-1}^2=(n-1)\left(m_a^2+\frac{n-2}{12n}a^2\right)$。

5. 设M，N是$\triangle ABC$内部的两个点，且满足$\angle MAB=\angle NAC$，$\angle MBA=\angle NBC$，证明：$\frac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}+\frac{BM\cdot BN}{BA\cdot BC}+\frac{CM\cdot CN}{CA\cdot CB}=1$。

讲座二　组合几何问题

中国人民大学附中　刘叔才

几何学研究的是图形的度量和位置关系。经典的几何学(如中学的平面几何、立体几何、解析几何)只讨论一些简单的规则图形(直线、平面、二次曲线、二次曲面所构成的图形)。组合几何则是几何思维的进一步深化,它试图研究不定形、不定位的图形带有限制条件的欧几里得性质,如图形的计数、分类、构造、叠合、分解、覆盖、拓扑关系等,内容丰富多彩。本专题讲座仅选讲其中部分内容。

知识与方法

一、组合几何计数方法

组合几何的核心部分——组合几何计数理论形成较早,处理方法比较传统,基本上是利用排列组合、组合数学中的递推关系等进行几何图形的点、边、角、多边形、区域等计数,内容丰富,经常出现在数学竞赛中。主要计数方法有利用组合解释计数和利用递推关系计数。

二、平面凸集、凸包及应用

平面凸集和凸包是组合几何中的基本内容。鉴于这方面的题目在近年来国内外竞赛中出现较多,因此要求做到掌握并会应用。

定义 1　如果 F 中的任意两点 A,B 的连线段 AB 上的每一点都属于 F,那么称 F 为凸集或凸图形。空集也算作凸集。

直线上的凸集有:线段,直线,射线。

平面凸集的例:全平面,半平面,不大于 $180°$的角域,抛物线及双曲线(一支)在开口方向的无界区域,圆,椭圆,凸多边形等有界区域。

空间凸集的例:全空间,半空间,不大于 $180°$的二面角域,凸多面角域,带域,球,凸多面体等。

定理 1　任何多个凸集的交为凸集;特别地,两个凸集的交仍是凸集。

定义 2　包含点集(图形)F 的最小凸集(凸图形)称为点集(图形)F 的凸包。这里的"最小",是指凸包能包含于任何其他的包含 F 的凸集之中。

定理 2　有限 n 点组有且只有一个凸包。

证明参见《竞赛数学教程》(陈传理等主编,高教出版社,P343)。

定义 3 平面图形 F 的点位于直线 l 的一侧且与 l 有公共点,则称 l 为图形 F 的承托直线。

定理 3(Helly 定理) (1) 平面上已给有限个凸集(或无穷多个有界闭凸集),如果其中每 3 个有公共点,那么它们全体有公共点;

(2) 如果空间中的凸集(或无穷多个有界闭凸集),其中每 4 个有公共点,那么它们全体有公共点。

三、整点问题

整点又称格点,即平面直角坐标系的点 $P(x,y)$,如果 x 与 y 同为整数,称 P 为整点。此概念可推广到三维空间乃至 n 维空间,也可推广到"有理点"等。整点问题可以说是数论与解析几何相结合的产物,近几年来又结合组合数学、图论以及整数规划等新型学科,而成为中学数学竞赛的良好材料。

定义 多边形(凸的或凹的,但不是折的或有洞的)各个顶点均为整数,称为整点多边形;多面体(要求同上)各个顶点均为整点,称为整点多面体。

下面是关于整点多边形与整点多面体的性质:

定理 1 (1) 若整点三角形 $A_1A_2A_3$[坐标为 $A_i(x_i,y_i)(i=1,2,3)$]的面积为

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

则 S_Δ 为整数或半整数,且 $S_\Delta=0 \Leftrightarrow A_1,A_2,A_3$ 三点共线。

(2) 若整点 n 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$[坐标为 $A_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$]的面积为

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right|.$$

则 S 为整数或半整数,且 $S=0 \Leftrightarrow A_1,A_2,\cdots A_n$ n 点共线。

定理 2 若整点四面体 $A_1A_2A_3A_4$,[$A_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3,4)$]的体积为

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

则 $6V$ 必为整数,且 $V=0 \Leftrightarrow A_1,A_2,A_3,A_4$ 四点共面。

定理 3(Picard 定理) 若整点多边形的边界上共有 M 个整点(包括顶点),内部共有 N 个整点,则多边形的面积 $S=\frac{1}{2}M+N-1$。

证明参见《数学中的智巧》(亨斯贝尔格著,北京大学出版社)。

下面是图形覆盖整点方面的两个著名定理。

定理 4(Blichfeldt 定理) 若坐标系中的图形 F 面积大于 n,则可使 F 适当平移,使它内部至少包含 $n+1$ 个整点。

定理 5(Minkowsky 定理) 若关于坐标原点中心对称的平面凸图形 F 的面积大于 4,则 F