国家级骨干教师通解

中学教材创新讲解

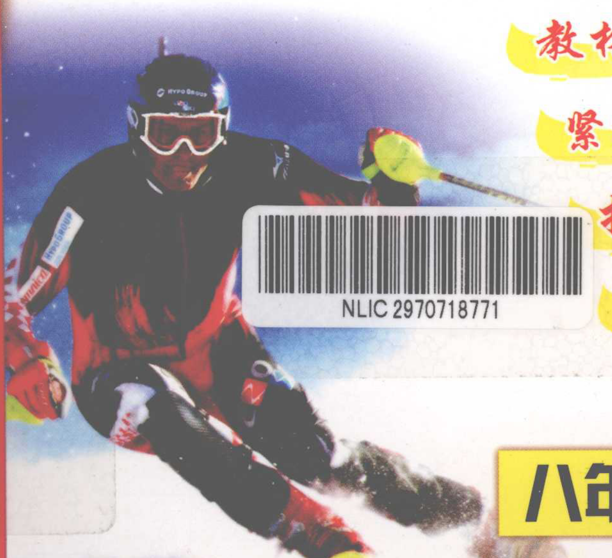
总主编：洪鸣远

教材全解全析

紧扣重难疑点

拓展探究提升

情景漫画释义



八年级数学 下

配人教版

吉林人民出版社

中学教材

创新讲解

八年级数学（下）

配人教版

本册主编：李英贵

吉林人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

创新讲解：人教版．八年级数学/洪鸣远主编．—2 版．
长春：吉林人民出版社，2008
ISBN 978－7－206－04244－7

Ⅰ．中…　Ⅱ．洪…　Ⅲ．数学课—初中—教学参考资料
Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 073207

创新讲解·八年级数学·下册（配人教版）

责任编辑　关铁宁　　　封面设计　王欣然
责任校对　陈洁美　　　版式设计　王欣然

出　　版　吉林人民出版社（中国·长春人民大街 7548 号　　邮编：130022）
网　　址　www.jlpph.com
发　　行　各地新华书店
制　　版　北京中创彩色印刷有限公司
印　　刷　北京市密东印刷有限公司

开　　本　880×1230　　1/32
总印张　28
总字数　850 千字
版　　次　2010 年 9 月第 3 版第 3 次印刷
印　　数　10000

标准书号　ISBN 978－7－206－04244－7
总定价　51.00 元

目录 CONTENTS

第十六章 分 式

第十七章 反比例函数

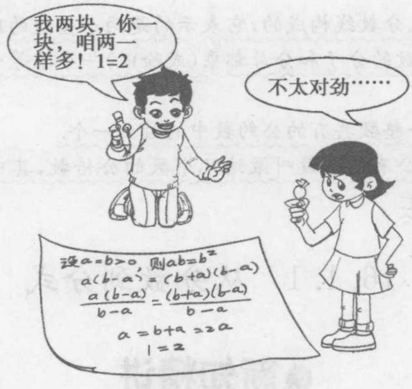
第十八章 勾股定理

第十九章 四边形

第二十章 数据的分析

第十六章 分式

画说教材



学海导航

整式是学习分式运算的基础，本节我们通过对分式与分数的类比，经历探究整式扩充到分式的过程，初步体验运用类比思想研究数学问题. 经历利用旧知探究新知的学习过程，学会观察、表达、类比、概括的方法，发展数学思维的深刻性、灵活性，在问题的讨论、探索过程中初步培养合作意识，发展我们的创造性，提高思维能力.

16.1 分式

新课指南

趣味数学　　数学奥秘 · 就在身边

一个长方形的面积为 25 平方米，长为 12 米，那么宽如何表示？若长为 y 米，则宽又如何表示呢？

学法先知　　方法过关 · 效率翻番

我们学过整式的加减及混合运算，对分数的加减运算也很熟悉，这一节我们利用分式与分数的类似之处，从分数入手，研究分式的有关概念，同时还要弄清分式与分

数的联系与区别，经过观察、探索、类比得出新知. 本节学习的难点是如何灵活应用分式的基本性质将分式变形. 我们采取的突破方法是通过类比分数的通分、约分及其基本性质，总结得出分式的基本性质，应用分式的基本性质导出通分、约分的概念，从而在理解的基础上灵活地将分式变形.

温故知新

以旧带新 · 注意关联

1. 分数是由分子、分母、分数线构成的，它表示的是两个整数的比的形式.
2. 分数的性质：如果分数的分子和分母都乘（或除以）一个不等于 0 的数，那么分数的值不变.
3. 最大公约数指某几个整数共有的公约数中的最大一个.
4. 最小公倍数：几个数公有的倍数叫做这几个数的公倍数，其中最小的一个，叫做这几个数的最小公倍数.

16.1.1 从分数到分式

新知精讲

基础讲解

知识要点 · 精心讲解

知识点一、分式的概念

式子$\frac{S}{a}$，$\frac{V}{S}$，$\frac{100}{20+v}$，$\frac{60}{20-v}$有什么共同点？它们与分数有什么相同点和不同点？

可以发现，这些式子与分数一样都是$\frac{A}{B}$（即 $A\div B$）的形式. 分数的分子 A 与分母 B 都是整数，而这些式子中的 A 与 B 都是整式，并且 B 中都含有字母.

一般地，如果 A、B 表示两个整式，并且 B 中含有字母，那么式子$\frac{A}{B}$叫做分式. 分式$\frac{A}{B}$中，A 叫做分子，B 叫做分母. 分式是不同于整式的另一类式子，由于字母可以表示不同的数，所以分式比分数更具有一般性.

注意 正确理解分式的概念，应把握以下三点：①分式$\frac{A}{B}$中，A、B 都必须是整式. ②分母 B 中必须含有字母，分数线并不是分式的本质特征，是否是分式关键是分母中是否含有字母，分子 A 中可以含有字母也可以不含有字母. ③当 $B\neq0$ 时，分式$\frac{A}{B}$才有意义，当 $B=0$ 时，分式$\frac{A}{B}$无意义，所以如果$\frac{A}{B}$是分式，则 $B\neq0$.

例题 下列各式中，哪些是整式？哪些是分式？

$\frac{2}{\pi},\frac{1}{x},\frac{x}{5},\frac{1}{3}x^2y+z,\frac{a^2}{a},\frac{x}{5}-\frac{7}{y}$.

解析　$\frac{2}{\pi}$中，π是常数，不是字母，故$\frac{2}{\pi}$是整式；$\frac{a^2}{a}$虽然化简之后结果为a，结果为整式，但$\frac{a^2}{a}$完全符合分式的定义，也是分式；$\frac{x}{5}-\frac{7}{x}$中，容易看出$\frac{x}{5}$为整式，$\frac{7}{y}$为分式，类比"一个整数减去一个分数，结果为分数"，得出$\frac{x}{5}-\frac{7}{y}$为分式.

解　整式有$\frac{2}{\pi},\frac{x}{5},\frac{1}{3}x^2y+z$；分式有$\frac{1}{x},\frac{a^2}{a},\frac{x}{5}-\frac{7}{y}$.

点拨　区分整式与分式的标准之一就是看分母中是否含有字母，分母中不含字母的是整式，含有字母的是分式. 注意π是常数，不要误认为是字母.

知识点二、分式有意义、无意义的条件

分式的分母表示除数，由于除数不能为0，所以分式的分母不能为0，即当$B\neq0$时，分式$\frac{A}{B}$才有意义.

分式有意义的条件：分式的分母不等于0；

分式无意义的条件：分式的分母等于0.

注意　分式有无意义与分母有关，与分子无关. 分式中分母是含字母的式子，它的值随着字母取值的不同而变化，当字母的取值使分母等于0时，分式就没有意义了. 因此要确定分式是否有意义，就要分析，讨论分母中字母的取值.

例题　当x取什么值时，下列分式有意义？

(1)$\frac{x}{4x+5}$；(2)$\frac{2x}{x^2+4}$.

解析　分母不等于0时，分式有意义，令(1)$4x+5\neq0$；(2)$x^2+4\neq0$，分别求出x的取值范围即可.

解　(1)由分母$4x+5\neq0$，得$x\neq-\frac{5}{4}$，所以当$x\neq-\frac{5}{4}$时，分式有意义；当$x=-\frac{5}{4}$时，分式无意义.

(2)无论x取什么数，x^2恒为非负数，x^2+4恒为正数，所以分母的值永远不等于零，所以x取任意实数都有意义.

点拨　判断分式有意义的条件与分母有关，当分母不等于0时，分式有意义.

知识点三、分式的值为零的条件

当分式的分子等于0且分母不等于0时，分式的值为0.

注意　由于只有在分式有意义的条件下，才能讨论分式的值的问题，因此，要使分式的值为零，需要同时满足两个条件：①分式的分母的值不等于零；②分子的值等

于零，即若$\frac{A}{B}=0$，则有$A=0$且$B\neq0$.

例题 当x取何值时，分式$\frac{|x|-1}{x+1}$的值为0？

解析 分式的值为0，分子等于0，且分母不等于0.

解 由$|x|-1=0$得，$x=\pm1$，再由$x+1\neq0$得，$x\neq-1$，故$x=1$.

所以当$x=1$时，分式$\frac{|x|-1}{x+1}$的值为0.

点拨 分式的值为0的条件，分子等于0，分母不等于0，二者缺一不可. 可先求出使分子为0的字母的值，再检验这个字母的值是否使分母等于0.

一般情况下所给的分式，都包含分母不为零这一条件；分式是两个整式相除的商，分子就是被除式，分母就是除式，分数线具有括号作用，如$\frac{m+n}{a+b}$表示$(m+n)\div(a+b)$；分式$\frac{A}{B}$中，分子A既可以是数，也可以是字母，还可是多项式，总之，可以是任何整式.

综合创新

疑难透析 深度分析·化解疑难

疑难点一、在什么条件下，分式无意义

例题 当x取何值时，下列分式有意义.

(1)$\frac{x+1}{x^2-1}$；(2)$\frac{3mn}{2m-n}$.

解析 分式有意义的条件是分式的分母不为0，只要求出分母不等于0时x的取值范围即可.

解 (1)由分母$x^2-1=0$，得$x=\pm1$，所以当$x=\pm1$时，分式$\frac{x+1}{x^2-1}$无意义.

(2)由分母$2m-n=0$，得$2m=n$，所以当$2m=n$时，分式$\frac{3mn}{2m-n}$无意义.

点拨 判断分式有意义的条件只与分母有关，当分母不为零时，分式有意义.

疑难点二、分式的值为0时，分母不能为0

例题 当m为何值时，下列分式的值为0？

(1)$\frac{m}{m-1}$；(2)$\frac{m-2}{m+3}$；(3)$\frac{m^2-1}{m+1}$.

解析 分式的值为0时，分子一定要为0，分母一定不能为0. 求出的m的解集中

的公共部分,就是这类题目的解.

解 (1)当 $m=0$ 且 $m-1\neq0$ 时,分式$\frac{m}{m-1}$的值为零,所以 $m=0$;

(2)当 $m-2=0$ 且 $m+3\neq0$ 时,分式$\frac{m-2}{m+3}$的值为零,所以 $m=2$;

(3)当 $m^2-1=0$ 且 $m+1\neq0$,即 $m=1$ 时,$\frac{m^2-1}{m+1}$的值为零.

点拨 分式的值为 0 的条件,是分子等于 0 且分母不等于 0.

应用提高

触类旁通 举一反三

例题 代数式 $1+\frac{2}{x}$是分式,还是整式?

解析 判断代数式是否为分式,就看其是否满足分式的基本形式,分式$\frac{A}{B}$中,B 中含有字母.

解 因为 $1+\frac{2}{x}=\frac{x+2}{x}$,分母中含有字母 x,所以原代数式是分式.

点拨 整式和分式的和仍为分式,因为它可以转化成$\frac{A}{B}$的形式.

例题 当 x 取何值时,分式$\frac{6-2|x|}{(x+3)(x-1)}$,(1)值为零;(2)无意义;(3)有意义.

解析 (1)可先令分子为零,求出 x 的值后,再逐一代入分母验证是否为零,不为零者即为使分式值为 0 的 x 取值;(2)当分式的分母为 0 时,分式无意义.(3)分母不为零时,分式才有意义.

解 (1)因为当$(x+3)(x-1)\neq0$ 时,分式有意义,所以当 $x\neq-3$ 且 $x\neq1$ 时,分式有意义.

又因为当$6-2|x|=0$ 时,分式值为零,则 $3-|x|=0$,所以$|x|=3$,所以 $x=\pm3$.

所以$\begin{cases}x\neq-3,\\x=\pm3,\end{cases}$且 $x\neq1$,

所以当 $x=3$ 时,分式值为零.

(2)因为$(x+3)(x-1)=0$ 时分式无意义,即 $x=-3$ 或 $x=1$ 时分式无意义.

(3)因为$(x+3)(x-1)\neq0$ 时分式有意义,所以 $x+3\neq0$ 且 $x-1\neq0$ 时,即 $x\neq-3$ 且 $x\neq1$ 时分式有意义.

点拨 分母不为零,分式有意义,分母为零,分式无意义;分式的值为 0,分式的分子为零且分母为零.

例题 要使分式$\frac{x+1}{x^2-y^2}$的值为零,x 和 y 的取值范围是什么?

解析 分式$\frac{x+1}{x^2-y^2}$的值为零,则 $x+1=0$ 且 $x^2-y^2\neq0$,解方程即可求得.

解　要使分式$\frac{x+1}{x^2-y^2}$的值为零，则有$\begin{cases}x+1=0,\\x^2-y^2\neq 0,\end{cases}$

解得$x=-1$且$y\neq\pm 1$.

点拨　分式的值等于零的两个条件：①分式的分母的值不等于零；②分子的值等于零.两者缺一不可.

例题　若$x^2-9=0$，则$\frac{x^2-5x+6}{x-3}$的值是多少？

解　由$x^2-9=0$，得$x^2=9$，所以$x=3$或$x=-3$.

当$x=3$时，分式$\frac{x^2-5x+6}{x-3}$的分母为0，故分式无意义.

当$x=-3$时，分式$\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\frac{9-5\times(-3)+6}{-3-3}=\frac{30}{-6}=-5$.

点拨　求分式的值，要注意分式的分母不能为0，否则分式无意义.

例题　若$(m+n)$人完成一项工程需要m天，那么n个人完成这项工程需要多少天？假定每个人的工作效率相同，你能求出来吗？

解析　可以把整个工程量看作整体“1”，则每人每天完成的工作量为$\frac{1}{m(m+2)}$.

解　由题中知，$(m+n)$个人完成一项工程需要m天，则每人每天工作量为$\frac{1}{m(m+2)}$，n个人每天的工作量为$\frac{n}{m(m+n)}$.

所以共需要的天数为$1\div\frac{n}{m(m+n)}=\frac{m(m+n)}{n}$（天）.

点拨　正确的理解分式的概念，有助于解决此类问题，在工程问题中，我们一般把整个工程设为整体“1”，进行列式解答.

中考链接

考场再现·轻松过关

例题　（2008年，宜宾）若分式$\frac{x-2}{x^2-1}$的值为0，则x的值为________.

解析　由于$\frac{x-2}{x^2-1}$的值为0，所以$x-2=0$且$x^2-1\neq 0$，所以$x=2$.

解　2

点拨　分式的值为0的条件是分子等于0，分母不等于0，二者缺一不可.

例题　（2009年，宜昌）当$x=$________时，分式$\frac{2}{x-3}$没有意义.

解析　当$x-3=0$，即$x=3$时，分式没有意义.

解　3

点拨　分式的分母等于0时，分式没有意义.

新题演练

※基础巩固※

1. 列式表示下列数量关系，并指出哪些是整式？哪些是分式？

(1)梯形的面积为 S，上底是 a，下底是 b，则高可表示为________.

(2)甲每小时做 x 个零件，则他 8 小时做零件____个，做 80 个零件需____小时.

(3)轮船在静水中每小时走 a 千米，水流的速度是 b 千米/时，轮船的顺流速度是________千米/时，顺流行驶 s 千米需要________小时.

2. 判断下列有理式中哪些是整式，哪些是分式？

$\frac{x}{3}$，$\frac{15}{2x}$，$\frac{7}{2}y^2-4x$，$\frac{7e}{\pi}$，$\frac{2a}{7x-5y}$.

3. 当 x 取何值时，分式 $\frac{x^2+1}{3x-2}$ 无意义？

※能力提升※

4. 当 x 为何值时，下列分式的值为 0？

(1) $\frac{x+7}{5x}$；(2) $\frac{7x}{21-3x}$；(3) $\frac{x^2-1}{x^2-x}$；(4) $\frac{|x|-1}{x^2-x}$.

有错必纠

及时纠错◎总结提高

1	(1) $\frac{2S}{a+b}$；(2) $8x$，$\frac{80}{x}$；(3) $(a+b)$，$\frac{s}{a+b}$. 整式有 $8x$，$a+b$；分式有 $\frac{2S}{a+b}$，$\frac{80}{x}$，$\frac{s}{a+b}$.
2	整式有 $\frac{x}{3}$，$\frac{7}{2}y^2-4x$，$\frac{7e}{\pi}$，分式有 $\frac{15}{2x}$，$\frac{2a}{7x-5y}$.
3	$x=\frac{2}{3}$　点拨：判断一个分式有无意义，看其分母是否为零.
4	(1) $x=-7$；(2) $x=0$；(3) $x=-1$；(4) $x=-1$.

学习管理

自我管理◎培养习惯

	错误题目	知识点	错因分析	纠正方案
反馈学习记录单				

16.1.2 分式的基本性质

新知精讲

基础讲解 知识要点·精心讲解

知识点一、分式的基本性质

分数的基本性质：一个分数的分子、分母同乘（或除以）一个不为0的数，分数的值不变.

由分数的基本性质可知，如果数 $c\neq0$，那么 $\frac{2}{3}=\frac{2c}{3c}$，$\frac{4c}{5c}=\frac{4}{5}$.

一般地，对于任意一个分数 $\frac{a}{b}$ 有 $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}$，$\frac{a}{b}=\frac{a\div c}{b\div c}(c\neq0)$，其中 a,b,c 是实数.

类比分数的基本性质，我们得到分式的基本性如下：

分式的基本性质：分式的分子与分母同乘（或除以）一个不等于0的整式，分式的值不变.

用式子表示为 $\frac{A}{B}=\frac{A\cdot M}{B\cdot M}$，$\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}$，其中 M 是不等于0的整式.

注意 ①“M 是一个不等于0的整式”是分式基本性质的一个制约条件. 就是说分式的分子、分母同乘（或除以）的这个整式不能为零；②应用分式基本性质时，避免犯只乘分子（或分母）的错误. 若分式的分子或分母是多项式，运用分式的性质时，要先用括号把分子或分母括上，再乘或除以同一整式 M. 分式的基本性质是分式进行约分、通分和符号变化的依据.

例题 写出下列等式中的未知分子或未知分母.

(1) $\frac{a-b}{ab^2}=\frac{(\quad)}{a^2b^3}$；(2) $\frac{a^2+2a+1}{a^2-1}=\frac{a+1}{(\quad)}$.

解析 (1)式中等号两边的分母都已知的，所以从观察分母入手，显然 a^2b^3 是由 ab^2 乘 ab 得到的，且 $ab\neq0$，由分式的基本性质，$a-b$ 也要乘 ab，所以括号内应填 $(a-b)\cdot ab$. (2)式中等号两边分子都已知，所以先观察分子，$a^2+2a+1=(a+1)^2$，除以 $(a+1)$ 得到等号右边分式的分子 $a+1$，按照分式的基本性质，$(a^2-1)\div(a+1)=a-1$，故括号内应填 $a-1$.

解 (1) $\frac{a-b}{ab^2}=\frac{(a-b)ab}{ab^2\cdot ab}=\frac{(a-b)ab}{a^2b^3}$；

(2) $\frac{a^2+2a+b}{a^2-1}=\frac{(a-1)(a+1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{a+1}{a-1}$.

点拨 一看分子如何变化，二想分母该如何变化.

知识点二、约分

从上例我们看出，与分数的约分类似，我们利用分式的基本性质，约去$\frac{a^2+2a+1}{a^2-1}$的分子和分母的公因式$(a+1)$，不改变分式的值，使$\frac{a^2+2a+1}{a^2-1}$化为$\frac{a+1}{a-1}$，这样的分式变形叫做分式的约分.经过约分后的分式，其分子与分母没有公因式.像这样分子与分母没有公因式的分式，叫做最简分式.

约分的关键是正确找出分子与分母的公因式.其一般方法如下：

(1)当分子和分母都是单项式时，先找分子、分母系数的最大公约数，再找相同字母的最低次幂；

(2)当分子和分母都是多项式时，首先要对分子、分母进行分解因式，把分子、分母变为几个因式的积后，再找分子、分母的公因式.

注意 ①约分的依据是分式的基本性质，约分前后分式的值不变.由于原分式有意义，可知分子与分母的公因式一定不为零，所以约分时不必强调公因式不为零.②要牢记分子、分母都是乘积形式时，才能进行约分；③分式的约分，一般要约去分子和分母所有的公因式，使所得结果成为最简分式或者整式.

例题　约分：(1)$\frac{24a^3b^2c^5}{-10abc^6}$；(2)$\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$.

解析 (1)分子、分母都是单项式，可先确定分子、分母的公因式，然后约分，也可系数和系数约分，相同字母为底的幂进行约分；(2)分子、分母都是多项式，应先把多项式因式分解，再约分.

解 (1)$\frac{24a^3b^2c^5}{-10abc^6}$　(先找分子、分母的公因式)

$=-\frac{12a^2b\cdot 2abc^5}{5c\cdot 2abc^5}$　(写成公因式与另一因式积的形式)

$=-\frac{12a^2b}{5c}$；　(约去公因式)

(2)$\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$　(先分解因式，才能约分)

$=\frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-2)}$　(确定公因式)

$=\frac{x+2}{x-2}$.　(约去分子、分母的公因式)

点拨 约分时，首先应确定出分子、分母的公因式，若分式的分子(或分母)能分解因式应先分解因式.

知识点三、最简公分母

为通分要先确定各分式的公分母，一般取各分母的所有因式的最高次幂的积作公分母，它叫做最简公分母.

确定最简公分母的一般步骤如下：

(1)取各分母系数的最小公倍数；

(2)凡是在分母中出现的字母为底的幂的因式都要取；

(3)相同底的幂的因式取指数最大的.当各分母是多项式时，先把各项式分解因式，再按上面的方法求出各分母的最简公分母.

例题 确定下列各组分式的最简公分母：(1)$\frac{2}{3a^2}$，$\frac{a+1}{-2ac}$；(2)$\frac{1}{x^2-4}$，$\frac{x}{4-2x}$.

解析 (1)$3a^2$，$-2ac$都是单项式，系数3，-2的最小公倍数为-6，则最简公分母的系数为-6.两分母中一共出现了a、c两个字母，故最简公分母里一定含有a、c，且相同字母的指数取最高次幂，所以最简公分母为$-6a^2c$.(2)因为两分式的分母为多项式，所以需先把分母进行因式分解并恰当变形，再按(1)中方法确定最简公分母.

解 (1)分式$\frac{2}{3a^2}$与$\frac{a+1}{-2ac}$的最简公分母是$-6a^2c$，或者是$6a^2c$；

(2)$\frac{1}{x^2-4}$与$\frac{x}{4-2x}$的最简公分母是$2(x-2)(x+2)$，或者是$2x^2-8$.

点拨 找最简公分母时，系数应取各分母系数的最小公倍数，相同字母取最高次幂，分母是多项式时，应先把分母分解因式.

知识点四、通分

分式通分与分数的通分类似，利用分式的基本性质，使分子和分母同乘适当的整式，不改变分式的值，把异分母分式化成相同分母的分式，这样的分式变形叫做分式的通分.

通分的一般步骤：①确定各分式的最简公分母；②利用分式的基本性质把异分母的分式化为同分母的分式.

注意 ①通分是利用分式基本性质的变形，分式的值不变；②通分中分母提出的负号，要移到分数线上，公分母前不要带负号.

例题 通分：(1)$\frac{1}{2x^2y}$，$\frac{4}{3xy}$；(2)$\frac{m+1}{m^2-2m+1}$，$\frac{6}{1-m^2}$.

解析 (1)中两分式的最简公分母为$6x^2y^4$，(2)中的两个分式的分母为多项式要先分解因式才能确定出它们的最简公分母.

解 (1)$\frac{1}{2x^2y}=\frac{1\cdot 3y^2}{2x^2y\cdot 3y^3}=\frac{3y^3}{6x^2y^4}$，$\frac{4}{3xy^4}=\frac{4\cdot 2x}{3xy^4\cdot 2x}=\frac{8x}{6x^2y^4}$；

(2)$\frac{m+1}{m^2-2m+1}=\frac{m+1}{(m-1)^2}=\frac{(m+1)(1+m)}{(1-m)^2(1+m)}=\frac{m^2+2m+1}{(1-m)^2(m+1)}$，

$\frac{6}{1-m^2}=\frac{6}{(1+m)(1-m)}=\frac{6(1-m)}{(1+m)(1-m)^2}=\frac{6-6m}{(1-m)^2(m+1)}$.

点拨 通分的目的是将异分母分式化用同分母分式，将分式的分母进行因式分解时一定要分解彻底，这样才能准确地找出最简公分母.

综合创新

疑难透析

深度分析 化解疑难

疑难点一、用分式的基本性质变形时,分子分母同乘(或除以)的整式不能为0

例题 下列分式从左到右的变形是否正确?

(1)$\frac{1}{x-3}=\frac{x}{x^2-3x}$;(2)$\frac{1}{x^2-3x}=\frac{1}{x-3}$.

解析 分式变形的依据是分式的基本性质,前提是不改变分式的值.

解 (1)中从左到右的变形是分子、分母同乘x,因为x有可能是0.因此变形错误;

(2)中表面上看似是将(1)的变形倒过来,从左到右分子、分母同除以x,$\frac{1}{x^2-3x}$是已知分式,即$x^2-3x\neq0$.因而$x\neq0$,符合分式的基本性质,是正确的.

点拨 分式变形的依据是分式的基本性质,但要注意变形时同乘(或除以)的整式不能为0.

疑难点二、如何使分式中分子与分母的最高次项的系数变为正数

例题 不改变分式的值,使分式$\frac{1-x-x^2}{1+x^2+x^3}$的分子与分母的最高次项的系数变为正数.

解析 先将分子和分母的多项式作降幂排列,再看最高次项的系数是正还是负,根据分式的基本性质,使分式中分子、分母与分式本身改变两处符号即可.

解 原式$=\frac{-x^2-x+1}{x^3+x^2+1}=\frac{-(x^2+x-1)}{x^3+x^2+1}=-\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2+1}$.

点拨 分子、分母和分式本身的符号,改变其中任何两个,分式的值不变.

疑难点三、如果分式的分子或分母是多项式不能直接约分

例题 约分:(1)$\frac{a^2+6a-1}{a^2-4a+3}$;(2)$\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$.

解析 这两个小题的分子和分母都是多项式,不能直接约分,要先将分子和分母分解因式后才能约分.

解 (1)$\frac{a^2+6a-7}{a^2-4a+3}=\frac{(a-1)(a+7)}{(a-3)(a-1)}=\frac{a+7}{a-3}$.

(2)$\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}=\frac{x^2(x-1)+(x-1)}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+1)}{x-1}=\frac{x^2+1}{1}=x^2+1$.

点拨 分子、分母是多项式时,通常先将分子、分母分解因式,然后再约分.

疑难点四、分式的分母是多项式时,如何求最简公分母

例题 求分式$\frac{1}{4x-2x^2}$与$\frac{1}{x^2-4}$的最简公分母.

解析 先把这两个分式的分母分解因式，最简公分母的系数为多项式系数的最小公倍数，相同字母或因式取最高次幂.

解 $4x-2x^2=2x(2-x)=-2x(x-2)$，$x^2-4=(x+2)(x-2)$，所以最简公分母为 $2x(x+2)(x-2)$.

点拨 分母是多项式的分式找最简公分母，需先分解因式，再找最简公分母.

应用提高

触类旁通·举一反三

例题 不改变分式的值，把分式$\frac{0.3a+0.5b}{0.2a-b}$的分子与分母中各项的系数都化为整数.

解析 分式的分子和分母中含有一位小数，可考虑在分子、分母上同时乘以10.

解 $\frac{0.3a+0.5b}{0.2a-b}=\frac{(0.3a+0.5b)\times10}{(0.2a-b)\times10}=\frac{3a+5b}{2a-10b}$.

点拨 利用分式的基本性质对分式进行变形，在保证分式前后的值不变的前提下，力求所化的分式是最简的.

例题 约分：$\frac{-3m^2n(m-3)}{9mn^2(3-m)}$.

解析 $m-3$ 与 $3-m$ 互为相反数，要先作变形，找出公因式后，再约分.

解 $\frac{-3m^2n(m-3)}{9mn^2(3-m)}=\frac{3mn(m-3)\cdot m}{9mn(m-3)\cdot n}=\frac{m}{3n}$.

点拨 要注意区分约分前后符号的变化，约分时也可先确定分式的符号.

例题 若分式$\frac{3a-3}{a^2-1}$的值为整数，求整数 a 的值.

解析 先化简分式$\frac{3a-3}{a^2-1}$为$\frac{3}{a+1}$，$a+1$ 应为 3 的约数，再讨论求 a.

解 因为$\frac{3a-3}{a^2-1}=\frac{3}{a+1}$，所以 $a+1$ 是 3 的约数，所以 $a+1=1$，或 -1，或 3，或 -3.

①当 $a+1=1$ 时，得，$a=0$；②当 $a+1=-1$ 时，得 $a=-2$；③当 $a+1=3$ 时，得 $a=2$；④当 $a+1=-3$ 时，得 $a=-4$.

所以对于 a 的这四个值，使原分式$\frac{3a-3}{a^2-1}$总有意义.

点拨 要使一个分式的值为整数，必须在使分式有意义的条件下，使分母能整除分子.

例题 通分：$\frac{4}{x^2-1}$，$\frac{1}{2(x^2+x)}$.

解析 两个分式的分母为多项式，先分解因式后，然后找出最简公分母 $2x(x+1)(x-1)$，再通分.