GAODENG SHUXUE TONGBU JIE XI

高等数学同步解析

主编◎阎慧臻 徐鹏春 宋福贵

大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

高等数学同步解析

主　编◎阎慧臻　徐鹏春　宋福贵
编　者◎于　华　王玮莉　宋福贵
张玉杰　季　隽　徐鹏春
阎慧臻

大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步解析/阎慧臻,徐鹏春,宋福贵主编. 大连:大连理工大学出版社,2009.8(2010.7 重印)
ISBN 978-7-5611-5081-8

Ⅰ.高… Ⅱ.①阎…②徐…③宋… Ⅲ.高等数学—高等学校—解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 150780 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 传真:0411-84701466 邮购:0411-84703636
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm 印张:17.75 字数:510 千字
2009 年 8 月第 1 版 2010 年 7 月第 2 次印刷

责任编辑:王 伟 责任校对:王 飞
封面设计:季 强

ISBN 978-7-5611-5081-8 定 价:28.00 元

前 言

高等数学是高等院校一门重要的基础课,也是全国硕士研究生入学考试中许多专业的必考科目.我国高等院校连续十年扩招,高等教育已从“精英教育”走向“大众教育”.在这种新形势下,硕士研究生入学考试和各校组织的期末考试日趋规范化,试题的质量在逐年提高,重在考查学生能力和基本功的试题层出不穷,学生迫切需要一部切合当前学习实际的课外辅助教材.

为了帮助大学生深入理解和掌握高等数学教学大纲规定的内容,我们在同济大学第五版高等数学教材的基础上,结合硕士研究生入学考试数学考试大纲的要求,编写了本书.

我们希望本书能够引导学生系统地学习高等数学的基本概念、基本理论和基本方法,使他们重视基本训练,练好基本功,逐步掌握一些方法和技巧,从而提高高等数学的推导能力、演算能力和实际应用能力.

我们本着由易到难的原则,结合教学,同步选取了填空题、单项选择题、各类典型题和考研真题.在每章的后面,给出两套自测题,并附有各节和自测题的答案和提示.本书的附录汇编了大连工业大学近几年的期中、期末考题.

本书可作为本科生学习数学的辅导用书,也可作为考研学生的参考书.

本书由大连工业大学数学系组织编写,参加编写工作的有阎慧

臻(第 1、2 章,附录),宋福贵(第 3、4 章),于华(第 5、6 章),徐鹏春(第 7、8 章),张玉杰(第 9、10 章),季隽(第 11 章),王玮莉(第 12 章),全书由阎慧臻统稿并最后定稿.

由于时间和水平所限,疏漏之处在所难免,希望得到各位读者的批评指正.

编　者

2009 年 8 月于大连

目　录

第 1 章　函数与极限

极限概念是高等数学的重要概念，极限方法是高等数学贯穿始终的一种基本方法，极限运算是学习高等数学必须熟练掌握的第一种运算方法. 高等数学的研究对象是连续变量，所以对函数的连续性也要有深入的了解，并掌握连续函数的一些基本性质.

一、本章概要

（一）函数

1. 函数的定义

设有两个变量 x 和 y，x 的变化范围为 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照一定的规律都有一个确定的 y 值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作：

$$y=f(x)$$

并称 x 为自变量，y 为因变量，D 为函数的定义域，y 的全体取值组成的集合称为函数的值域.

函数概念的两个要素：定义域和对应关系.

两个函数当且仅当定义域和对应关系均相同时才表示同一函数，否则，它们表示两个不同的函数.

2. 函数的定义域

(1)定义域

根据实际问题建立的函数的定义域，就是具有实际意义的实自变量值的集合；由解析式子表示的函数的定义域，就是使运算有意义的实自变量值的集合.

(2)定义域的求法

首先要熟悉下列简单函数的定义域：

$y=\dfrac{1}{x}$，定义域为 $x\neq 0$；

$y=\sqrt[2n]{x}$，定义域为 $x\geqslant 0$；

$y=a^x$，定义域为$(-\infty,+\infty)$；

$y=\log_a x$，定义域为 $x>0$；

$y=\sin x$ 或 $\cos x$，定义域为$(-\infty,+\infty)$；

$y=\tan x$，定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$；

$y=\cot x$，定义域为 $x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$；

$y=\arcsin x$ 或 $y=\arccos x$，定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$；

$y=\arctan x$ 或 $y=\mathrm{arccot}\,x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

求复杂函数的定义域，就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组的解集.

3. 反函数的定义

设给定一个函数 $y=f(x)$，其值域为 $\mathbf{R}$，如果对于一个 $y\in\mathbf{R}$，由方程 $y=f(x)$ 可惟一确定一个 x 值，则称变量 x 为变量 y 的函数，记作

$$x=\varphi(y)$$

称为 $y=f(x)$ 的反函数.

习惯上，$y=f(x)$ 的反函数通常记作

$$y=\varphi(x)\text{或 }y=f^{-1}(x)$$

注 (1) $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的图像重合；而 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(2) 只有一一对应的函数才有反函数. 例如 $y=x^2$ 没有反函数；但当 $x\geqslant 0$ 时，$y=x^2$ 有反函数 $y=\sqrt{x}$.

反函数的求解步骤：

第一步：把 x 从方程 $y=f(x)$ 中解出；

第二步：把从第一步得到的表达式中的 x 与 y 对换，所得结果就是要求的 $y=f(x)$ 的反函数.

4. 分段函数的定义

在定义域内，如果对应于不同的区间，函数有着不同的表达式，则称这样的函数为分段函数. 一般来讲，分段函数不是初等函数，但也有个别例外，例如

$$y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

既可看作分段函数，又可看作初等函数.

常见的几个分段函数：

(1) y 是 x 的最大整数部分，记为 $y=[x]$.

(2) 符号函数 $$y=\mathrm{sgn}\,x=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

(3)狄利克莱函数 $y=f(x)=\begin{cases}1 & 当\ x\ 为有理数时 \\ 0 & 当\ x\ 为无理数时\end{cases}$

狄利克莱函数具有如下特征:

①它为偶函数;

②任何有理数 l 皆为其周期.

5. 复合函数的定义

设函数 $y=f(u)$,其定义域为 U,而 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 X,值域为 D,若 $D\cap U\neq\varnothing$,则 y 通过 u 的联系也是 x 的函数,此函数称作是由 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,记作

$$y=f(\varphi(x))$$

注 (1)如果 $y=f(u)$ 的定义域与 $u=\varphi(x)$ 的值域的交集非空,则这两个函数可以复合成一个新的函数,否则,就不能复合成一个新的函数.

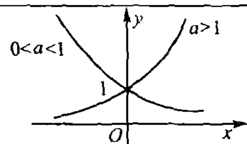
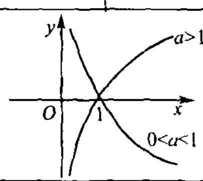
例如,$y=\sqrt{u-2}$ 与 $u=\sin x$ 就不能构成复合函数,因为 u 的值 $[-1,1]$ 与 $y=\sqrt{u-2}$ 的定义域 $[2,+\infty)$ 的交集为空集.

(2)复合函数的定义域是使 $\varphi(x)$ 的值不超出 $f(u)$ 的定义域的 x 的全体. 对于具体函数,求复合函数的定义域就是求使得这个复合函数有意义的点的全体.

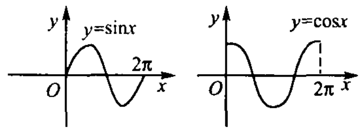
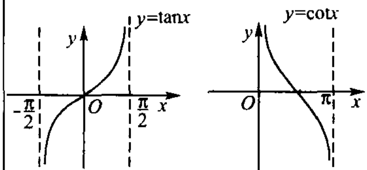
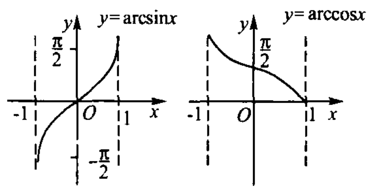
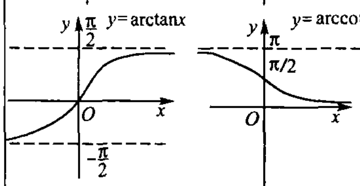
6. 五个基本初等函数

基本初等函数见表 1-1.

表 1-1

函数名称	定义域	值 域	图 像
幂函数 $y=x^{\mu}$	随 μ 的不同而不同	随 μ 的不同而不同	
指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	

（续表）

函数名称	定义域	值　域	图　像
三角函数			
$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	
$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	
$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$	$(-\infty,+\infty)$	
$y=\cot x$	$x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$	$(-\infty,+\infty)$	
反三角函数			
$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	
$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	
$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	
$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$	

7. 初等函数的定义

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

我们所遇到的函数大多数都是初等函数.

8. 函数的四种特性

函数的有界性、单调性、奇偶性与周期性统称为函数的四种特性.

注　函数 $f(x)$ 的有界与无界是相对于某个区间而言的. 例如，$y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上是无界的，而在 $[0.001,2]$ 上却是有界的.

（二）极限与连续性

1. 基本概念

（1）数列极限的定义

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 一个正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

若数列没有极限，则称该数列发散.

注 ①ε 是任意小的正数，否则不足以说明 x_n 与 a 接近的程度；

②定义中没有要求正整数 N 是最小的一个，只要存在即可. 显然，如果证明了 N 合乎要求，则比 N 大的正整数也一定可使 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立；

③一般来说，N 的大小与给定的 ε 有关，ε 越小，正整数 N 通常越大.

(2)函数极限的定义

①$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

类似地可定义：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

②$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

注 ①$\varepsilon>0$ 为任意小，否则不足以说明 $f(x)$ 与 A 接近的程度；

②一般来说，$\delta>0$ 与 ε 有关，ε 越小，δ 也越小；

③不要求最大的 δ，只要求 δ 存在即可；

④$|x-x_0|>0$ 意味着求极限的过程中不必考虑 $x=x_0$ 时 $f(x)$ 是否有定义及取何值的问题.

左极限的定义：$f_-(x_0)=f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<x_0-x<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

右极限的定义：$f_+(x_0)=f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3)无穷小与无穷大的定义

定义 1　如果函数 $f(x)$（或数列 $\{x_n\}$）的极限等于零，则称函数 $f(x)$（或数列 $\{x_n\}$）为无穷小. 用“ε-N”，“ε-δ”语言可叙述为：

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n|<\varepsilon$；

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)|<\varepsilon$；

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|<\varepsilon$.

定义 2　用“M-N”、“M-X”、“M-δ”语言叙述无穷大的定义更简单、确切.

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty\Leftrightarrow\forall M>0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n|>M$.

$\lim\limits_{x\to x_0}x_n=\infty\Leftrightarrow\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|>M$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty\Leftrightarrow\forall M>0,\exists X>0$,当$|x|>X$时,恒有$|f(x)|>M$.

同样可定义:

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$$

注 ①无穷小(或无穷大)是同自变量的变化过程密切联系着的.同一函数在自变量的这一变化过程中是无穷小(或无穷大),在自变量的另一变化过程中可以不是无穷小(或无穷大).

②常数"零"是无穷小,但是,无论多么小的正数都不是无穷小.

③无穷大实际上是变量不存在极限的一种形式.

(4)无穷小的阶

设$\alpha(x)$,$\beta(x)$都是自变量x的同一变化过程中的无穷小.如果

$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,则称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小,记为$\alpha(x)=o(\beta(x))$;

$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$,则称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$低阶的无穷小;

$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq0$,则称$\alpha(x)$与$\beta(x)$是同阶无穷小;

$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,则称$\alpha(x)$与$\beta(x)$是等价无穷小,记为$\alpha(x)\sim\beta(x)$;

$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=c\neq0$,则称$\alpha(x)$是$\beta(x)$的$k$阶无穷小.

(5)函数的连续性

①函数在点x_0处连续的定义

定义3 设$f(x)$在x_0处的某一邻域内有定义,$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,若$\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$,则称函数$f(x)$在点$x=x_0$处连续.

定义4 若函数$f(x)$满足如下条件:

Ⅰ.$f(x)$在x_0的某个邻域内有定义;

Ⅱ.$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在;

Ⅲ.$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

则称$f(x)$在点$x=x_0$处连续.

定义5 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,则称$f(x)$在点$x_0$处连续.

②函数$f(x)$在点x_0处左(或右)连续的定义

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处左连续；

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处右连续.

③函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续的定义

如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内任一点均连续，在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

(6)间断点

如果 $f(x)$ 在 $x=a$ 处出现下列三种情况之一：

Ⅰ. $f(x)$ 在 $x=a$ 处无定义；

Ⅱ. 虽有定义，但 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在；

Ⅲ. 有定义，且 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)$，则称 $f(x)$ 在 $x=a$ 处间断，$x=a$ 称为 $f(x)$ 的间断点.

设 $x=a$ 为 $f(x)$ 的间断点，其类型如下：

①第一类间断点　$f(x)$ 在 $x=a$ 处的左、右极限均存在，即 $f_-(a)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$，$f_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 均存在.

若 $f_-(a)=f_+(a)$，则 $x=a$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

若 $f_-(a)\neq f_+(a)$，则 $x=a$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

②第二类间断点　$f_-(a)$，$f_+(a)$ 中至少有一个不存在.

若 $f_-(a)$ 与 $f_+(a)$ 中至少有一个为无穷大，则 $x=a$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

2. 基本性质及重要定理和公式

(1)收敛数列的性质

①若 $\{x_n\}$ 收敛，则其极限惟一；

②若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 有界，其逆不真；

③设有两个数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，若存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $x_n\leqslant y_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

④若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=B$，且 $A\leqslant B$，则存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $x_n\leqslant y_n$.

(2)收敛数列的判别法

①单调有界准则：单调有界数列 $\{x_n\}$ 必有极限.

②夹逼定理：若存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=l$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=l$.

(3)有极限的函数的性质

①局部有界性：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则存在某个 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M(M>0)$.

②若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且 $A>B$，则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $f(x)>g(x)$.

③若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且存在一个 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$，则 $A\geqslant B$.

④若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，而 $A>B$（或 $A<B$），则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>B$（或 $f(x)<B$）.

⑤夹逼定理：若存在一个 $\delta_0>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_0$ 时，有 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$.

(4)闭区间上连续函数的性质

①设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

②最值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 至少取得它的最大值和最小值各一次.

③介值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，μ 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何一个数，则在 a,b 之间至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\mu(a\leqslant\xi\leqslant b)$.

④零点定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

(5)极限和连续性的运算法则

①无穷小的运算法则

Ⅰ. 有限个无穷小的和仍为无穷小；

Ⅱ. 有限个无穷小的乘积仍为无穷小；

Ⅲ. 有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小；

Ⅳ. 无穷小（不取零值）的倒数为无穷大，反之，无穷大的倒数为无穷小.

②极限运算法则

设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

Ⅰ. $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

Ⅱ. $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$；

特别地，有 $\lim[cf(x)]=c\cdot\lim f(x)$；

Ⅲ. $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

注 Ⅰ、Ⅱ可推广到有限个有极限的函数中去，无穷多个有极限的函数运算法则Ⅰ、Ⅱ不一定成立.