线性代数

探究性课题精编

■ 邱 森 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

线性代数

探究性课题精编

■ 邱森 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数探究性课题精编/邱森编著.—武汉：武汉大学出版社，2011.1
ISBN 978-7-307-08352-3

Ⅰ.线…　Ⅱ.邱…　Ⅲ.线性代数　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 236582 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:刘　欣　　版式设计:马　佳

出版发行：武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：cbs22@whu.edu.cn　网址：www.wdp.com.cn)
印刷:湖北民政印刷厂
开本：720×1000　1/16　印张:26　字数:465 千字　插页:1
版次:2011 年 1 月第 1 版　2011 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-08352-3/O·438　定价:36.00 元

前　言

国内外线性代数的探究和发现日就月将，新奇的问题层出不穷．本书含英咀华，取精用弘，编写了40个探究性课题，每一个课题中都有它独特的问题．有的课题可以让读者进行数学探究（是指围绕某个数学问题自主探究的过程，探究过程常常包括：观察分析数学事实，提出有意义的数学问题，特例探讨，联想类比，合情推理，猜想试探，失败更正，改进扩充等），初步尝试数学研究工作的过程．线性代数探究性题材是多样化的，可以是研究一些特殊的矩阵或线性方程组（如：三对角矩阵、带状矩阵、正规矩阵，以及核与值域正交的矩阵等）的特殊性质，可以是某些数学概念的推广（如：矩阵对的广义特征值与广义特征向量，伪逆矩阵与广义逆矩阵，以及哈密顿四元数等），可以是某些数学结果和数学方法的推广和深入或者换个角度的思考（如：行秩等于列秩的直接证明，矩阵的各种分解及其应用，若尔当基定理，以及多元二次函数的最小值与最小化原理等），也可以是各种算法在计算机上实现时的问题（如：算法的计算量、希尔伯特矩阵的病态性质和线性方程组迭代求解方法的收敛性等）．有的课题需要建立数学模型（如：电网络的平衡方程组、框架结构的平衡方程组、离散线性动态系统、马尔可夫链和样条函数等），它们的素材来源于电学、力学、生态学、遗传学、经济学和工程技术等各个领域，都具有一定的应用价值，有较强的真实性．

本书探究性强，应用性也强，为创新活动构筑了平台，为成功提供了更多的机会，同时本书起点低、意境高，各课题采用问题串的形式，围绕中心问题，由浅入深，给以启发、引导．许多课题在曲径通“幽”处，还会得到一些意想不到的有趣结果，引人入胜．课题中设置了探究题，供读者思考、探究，甚至还可以自己发现问题，提出不同的看法，进行自主研究，发挥自己的想象力和创造力．

本书结合课题介绍了一些新的现代内容（如：伪逆矩阵、离散线性动态系统和快速傅里叶变换等），从中可以了解它们朴素的数学思想和创造过程，接触到现代数学的脉搏，感觉它是在怎样跳动的．

路跑得远，地方看得多，确能增长见闻多得启发，但并不等于就开辟了

新路. 希望读者不要只是满足于看看而已. 每当遇到一个新的问题，自己可以想一想，这是一个什么性质的问题，如何来解决它？每当见到一种新的思想，可以想一想，这种思想的本质是什么，对你有没有启发？每当看到一种新的方法，也可以想一想，这种方法妙在哪里，你能用它来解决其他问题吗？有许多好的结果，就是从看上去很简单的问题开始的（如：快速傅里叶变换的思想就是尽量减少离散傅里叶变换计算中的乘法次数，从而大大降低运算时间），但是，一些好的想法也不是凭空出现的，是对数学探究或实际问题有了兴趣和经常性的思考才产生的必然结果. 我们鼓励读者自己寻找问题，自己做课题. 只要能解决几个重要问题，就是成功，在尽一切去做自己想做的问题的时候，就能达到更高的"见微知著，所思合道，出手得道"的境界. 其实人生中的每一次努力，都在为明天埋下优点和长处，在适当的时候是会得到回报的. 相信读者通过线性代数探究性课题学习，能拓广思路，激发思维，找到闪现灵感和顿悟时的快感，发展自己的天赋，实现自身的潜力.

在本书编写和出版的过程中，我们得到了武汉大学出版社的协助，在此深表谢意. 最后，本书只是为展开线性代数的探究性学习抛砖引玉，对书中的不妥之处我们也企盼同行、读者批评指正.

编　者

2010 年 8 月

目　　录

1. 行秩等于列秩的直接证明

设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，则 A 的每一行都可看做一个 n 维向量，而每一列又可看做一个 m 维向量，A 的行向量组的秩称为**行秩**，列向量组的秩称为**列秩**. 我们可以利用行(或列)初等变换的性质(矩阵 A 经行(或列)初等变换后，不改变它的行(或列)秩)和行列式的性质来证明 A 的行秩等于列秩. 本课题将探讨不用矩阵的初等变换，直接根据行秩和列秩的定义来证明它们相等的新方法.

中心问题 将问题归结为证明：如果 A 是行满秩(即 A 的行秩等于它的行数)且列满秩(即 A 的列秩等于它的列数)的，那么 A 的行秩等于列秩.

准备知识 向量的线性相关性，矩阵的秩

课题探究

问题 1.1 设 $m\times n$ 矩阵 A 为行满秩且列满秩矩阵，证明：它的行秩等于列秩，即 $m=n$.

设 $m\times n$ 矩阵 A 的行秩为 r，则

$$r\leqslant m.$$

如果 A 不是行满秩矩阵，则 $r<m$，于是 A 的行向量组线性相关，因而存在一个行向量可以由其他的行向量线性表示，我们把这样的向量称为**额外向量**. 实际上，A 的行向量组的一个极大线性无关组有 r 个行向量，而不属于这 r 个行向量的其他 $m-r$ 个行向量都可以由这个极大线性无关组线性表示，因此，这 $m-r$ 个行向量中的每一个都可以作为额外向量(也就是说，极大线性无关组外的向量是额外向量).

显然，我们删去一个矩阵的所有额外的行向量就可以得到一个行满秩的子矩阵. 现在的问题是，当一个矩阵被删去一个额外的行向量后，所得的矩阵的行秩和列秩会有什么变化?

问题 1.2 设 $m\times n$ 矩阵 A 的行向量为 $v_1,v_2,\cdots,v_m$，其中某个行向量 v_t 是额外的（即 $v_t=\sum\limits_{i\neq t}c_iv_i$）. 问：设矩阵 A 删去第 t 行（即 v_t）所得的矩阵为 A'，则 A' 的行秩和列秩有什么变化？

类似地，对矩阵 A 的列向量组也可以进行同样的讨论. 根据以上的讨论，我们就可以解决下述问题了.

问题 1.3 用删去 $m\times n$ 矩阵 A 的额外行和额外列的方法，证明：

$$\text{行秩}(A)=\text{列秩}(A).$$

据定义，矩阵 A 的秩就是 A 中非零子式的最大阶数①. 我们是否也可以不用矩阵的初等变换，用问题 1.3 的方法，来证明 A 的秩等于它的行秩也等于其列秩呢？

探究题 1.1 用删去 $m\times n$ 矩阵 A 的额外行和额外列的方法，证明：

$$A\text{ 的秩}=\text{行秩}(A)=\text{列秩}(A).$$

问题解答

问题 1.1 由于 $m\times n$ 矩阵 A 的行向量都是 n 维向量，而线性无关的 n 维向量组所含的向量个数至多为 n，所以行满秩矩阵 A 的行秩 $m\leqslant n$. 同理可证，由于 A 的列向量都是 m 维向量，故列满秩矩阵 A 的列秩 $n\leqslant m$. 因此，

$$m=n.$$

问题 1.2 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的列向量为 $w_1,w_2,\cdots,w_n$，A' 的列向量为 $w_1',w_2',\cdots,w_n'$，可以证明，这两个列向量组有相同的线性关系. 事实上，如果

$$k_1w_1+k_2w_2+\cdots+k_nw_n=\mathbf{0},$$

则由于 A' 的列向量都是由 A 的列向量删去第 t 个分量而得到的 $m-1$ 维向量，因而

$$k_1w_1'+k_2w_2'+\cdots+k_nw_n'=\mathbf{0}. \tag{1.1}$$

① "秩"这个名词是 1879 年由德国数学家弗罗贝尼乌斯(F. G. Frobenius，1849—1917)引入的，定义为在 A 中非零的行列式子式的最大阶数. 但是这概念早在 1851 年英国数学家西尔维斯特就已经使用了.

反之，如果(1.1)成立，则有

$$\sum_{j=1}^{n} k_j a_{ij} = 0, \quad 对\ i \neq t. \tag{1.2}$$

另一方面，由于 $\boldsymbol{v}_t = \sum_{i \neq t} c_i \boldsymbol{v}_i$，而 $\boldsymbol{v}_t = (a_{t1}, a_{t2}, \cdots, a_{tn})$，故有

$$a_{tj} = \sum_{i \neq t} c_i a_{ij}, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.3}$$

因而由(1.2)和(1.3)得

$$\sum_{j=1}^{n} k_j a_{tj} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \neq t} k_j c_i a_{ij} = \sum_{i \neq t} c_i \sum_{j=1}^{n} k_j a_{ij} = 0,$$

因此，

$$k_1 \boldsymbol{w}_1 + k_2 \boldsymbol{w}_2 + \cdots + k_n \boldsymbol{w}_n = \mathbf{0}.$$

这就证明了 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}'$ 的列向量组有相同的线性关系，也就是说，若 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的部分组线性相关(或无关)，则 $\boldsymbol{A}'$ 的列向量组中相应的部分组也线性相关(或无关)，因而 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}'$ 有相同的列秩.

显然，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}'$ 有相同的行秩. 因此，从矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中删去一个额外的行向量不改变矩阵的行秩和列秩.

问题 1.3 设将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 删去额外行和额外列所得的行满秩且列满秩的子矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的行秩和列秩. 而矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是行满秩且列满秩的，它的行秩等于列秩，因此 $\boldsymbol{A}$ 的行秩也等于列秩，即

$$行秩(\boldsymbol{A}) = 列秩(\boldsymbol{A}).$$

2. 商品市场均衡模型

任何经济理论都是对现实世界的必要抽象. 由于现实经济的极端复杂性，我们不可能一下子理解其全部内在联系，因此，只能根据我们的目的选择与我们研究问题相关的基本因素和基本关系，然后把研究集中于这些因素和关系上，所得的这种精心简化的分析结构称为**经济模型**. 一般地，经济模型只是现实经济的结构性的粗略表示，是一种理论框架，并没有必须采用数学形式的内在理由. 然而，如果模型是数学模型，那么它通常包括一组在分析假设下用以描述模型结构的方程，然后通过对这些方程进行数学计算，可以推导出一系列在逻辑上服从这些假设的结论，帮助我们理解所研究的特殊的经济现象. 本课题将建立以商品的需求量、供给量和价格为变量的商品市场均衡模型，并探讨其应用.

中心问题　建立某种离散时间的商品市场模型，并探讨其变化规律.

准备知识　线性方程组

课 题 探 究

下面探讨商品的一般市场均衡问题，并建立商品市场均衡模型.

一个经济社会是由若干成员组成的，其中一部分成员称为消费者，一部分成员称为生产者，当然也有些成员既是消费者又是生产者. 为了建立经济问题的数学模型，就有必要作一些假设，其中之一是经济社会中所有成员(不管是消费者还是生产者)的行为准则都是使自己得到尽可能大的效益. 一个经济模型是由属于此经济社会成员(消费者和生产者)的行为准则以及各种均衡关系构成的. 例如：考虑一个仅有一种商品的市场模型，它包括 3 个变量：商品的需求量(Q_d)、商品的供给量(Q_s)和商品的价格(P). 我们假设市场均衡条件是当且仅当超额需求(即 $Q_d - Q_s$) 为零时，也就是当且仅当市场出清时，市场就实现均衡. 现在的问题是供给与需求究竟怎样相互作用，使市场达到均衡. 一般地，当商品价格 P 上涨时，需求量 Q_d 会随之减少，而

供给量 Q_s 却随之增加. 于是，我们假设 Q_d 是 P 的单调递减连续函数，Q_s 是 P 的单调递增连续函数(图 2-1).

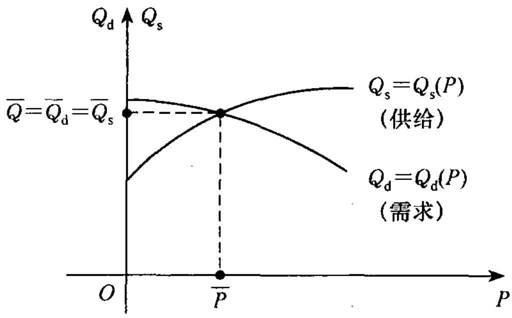

图 2-1

用数学语言表述，模型可以写成：

$$\begin{cases} Q_d = Q_s & \text{（市场均衡条件）}, \\ Q_d = Q_d(P) & \text{（反映消费者行为的需求函数）}, \\ Q_s = Q_s(P) & \text{（反映生产者行为的供给函数）}. \end{cases}$$

现在的问题归结为求解同时满足上述三式的 3 个变量 Q_d,Q_s 和 P 的值. 我们将解值分别以 $\bar{Q}_d$,$\bar{Q}_s$,$\bar{P}$ 表示. 我们看到，当价格为 $\bar{P}$ 时，市场达到均衡，市场上既没有剩余的商品，也没有短缺的商品. 这时的价格称为**均衡价格**. 如果其他条件没有变化，价格和供求数量将稳定在这个水平上，没有理由再发生变动，这时的供求数量称为**均衡数量**. 由于 $\bar{Q}_d=\bar{Q}_s$，我们也可将它记为 $\bar{Q}$. 当商品供不应求时，价格就将上涨. 当供过于求时，价格就将下降. 当需求量和供给量都为均衡数量 $\bar{Q}$ 时，价格处于均衡价格，市场达到均衡.

下面我们讨论一种只包含两种相互关联的商品的线性模型. 在这个模型中，我们用 Q_{di},Q_{si} 和 P_i 分别表示第 i 种商品的需求量、供给量和价格($i=1,2$)，并假设两种商品关于价格变量 P_1,P_2 的需求函数和供给函数均为线性的，即

$$Q_{d1} = a_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2, \tag{2.1}$$

$$Q_{s1} = b_0 + b_1 P_1 + b_2 P_2, \tag{2.2}$$

$$Q_{d2} = \alpha_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2, \tag{2.3}$$

$$Q_{s2} = \beta_0 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2, \tag{2.4}$$

其中系数 a_i 和 b_i($i=0,1,2$) 分别属于第 1 种商品的需求和供给函数，系数 α_i 和 β_i($i=0,1,2$) 分别属于第 2 种商品的需求和供给函数. 这些系数在实际问

题中均为具有经济意义的给定数值(在问题 2.1 中将予以说明).

按照一般经济均衡思想,消费者追求其消费的最大效用,生产者追求其生产的最大利润,从而经过完全的市场价格竞争(完全竞争是指不存在丝毫垄断因素的市场结构),当 P_1 和 P_2 达到某特定价格(称为均衡价格) $\bar{P}_1$ 和 $\bar{P}_2$ 时,供需达到均衡,即需求等于供给:

$$Q_{d1} = Q_{s1}, \tag{2.5}$$

$$Q_{d2} = Q_{s2}. \tag{2.6}$$

上述6个方程(2.1) ~ (2.6)组合在一起,便构成完整的两种商品的市场均衡模型(线性模型). 如果方程组有解,就可以解得均衡价格 $\bar{P}_1$ 和 $\bar{P}_2$,然后再从需求函数或供给函数求出均衡数量 $\bar{Q}_1$ 和 $\bar{Q}_2$.

问题 2.1 假设两商品市场模型的需求和供给函数分别为

$$\left.\begin{aligned} Q_{d1} &= 10 - 2P_1 + P_2, \\ Q_{s1} &= -2 + 3P_1, \\ Q_{d2} &= 15 + P_1 - P_2, \\ Q_{s2} &= -1 + 2P_2, \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

求均衡价格 $\bar{P}_1$ 和 $\bar{P}_2$ 以及均衡数量 $\bar{Q}_1$ 和 $\bar{Q}_2$.

(在 Q_{d1} 中,P_1 的系数为负,说明第1种商品的价格上升,将使其需求量 Q_{d1} 减少,而 P_2 的系数为正,说明 P_2 上升使 Q_{d1} 增加,这意味着这两种商品互为替代品,在 Q_{d2} 中 P_1 的作用也有类似的解释.)

模型(2.1) ~ (2.6)是极为简单和粗糙的,但是许多更为复杂的市场均衡模型也可以用上述模型的原理加以建立和分析. 一般而言,具有 n 种商品的需求函数和供给函数可以表述为

$$Q_{di} = Q_{di}(P_1, P_2, \cdots, P_n),\ Q_{si} = Q_{si}(P_1, P_2, \cdots, P_n) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

(这些函数不必都是线性的),而均衡条件由 n 个方程组成:

$$Q_{di} - Q_{si} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

上述 $3n$ 个方程组合在一起,构成了 n 种商品的市场均衡模型. 如果联立方程组确实有解,就可解得均衡价格 $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \cdots, \bar{P}_n$,由此可得均衡数量 $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \cdots, \bar{Q}_n$.

一般经济均衡理论是19世纪70年代由法国经济学家瓦尔拉斯(Walras)首先提出的,瓦尔拉斯为他的一般经济均衡体系建立了数学模型,从而也使他成为对数理经济学影响最大的创始人之一.

下面介绍一般市场均衡存在的问题. 设

$$E_i = Q_{di} - Q_{si} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

表示第 i 种商品的超额需求. 按照一般经济均衡思想，经过完全的市场价格竞争，当 $P_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 达到均衡价格 $\overline{P}_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 时供需得到均衡. 在经济学中考虑市场供需平衡问题，就是求使供需保持平衡的均衡价格，这就是解下列方程组:

$$Q_{di}(P_1,P_2,\cdots,P_n) - Q_{si}(P_1,P_2,\cdots,P_n) = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n,$$

即

$$E_i(P_1,P_2,\cdots,P_n) = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{2.8}$$

我们把此方程组的解 $\overline{P}_1,\overline{P}_2,\cdots,\overline{P}_n$，称为市场的**均衡点**.

上述市场均衡解的存在问题，也可以转化为不动点的存在问题. 将方程组(2.8)改写为

$$\begin{cases} P_1 = P_1 + E_1(P_1,P_2,\cdots,P_n), \\ P_2 = P_2 + E_2(P_1,P_2,\cdots,P_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_n = P_n + E_n(P_1,P_2,\cdots,P_n), \end{cases} \tag{2.9}$$

再在 $\mathbf{R}^n$ 上定义变换 f 如下:

$$f: \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} P_1 + E_1(P_1,P_2,\cdots,P_n) \\ P_2 + E_2(P_1,P_2,\cdots,P_n) \\ \vdots \\ P_n + E_n(P_1,P_2,\cdots,P_n) \end{pmatrix},$$

并令 $\boldsymbol{p} = (P_1,P_2,\cdots,P_n)^{\mathrm{T}}$，那么(2.9)可以进一步改写为 $\boldsymbol{p} = f(\boldsymbol{p})$，即

$$f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}.$$

于是，解方程组(2.8)求均衡点的问题就转化为求变换 f 的不动点问题. 1954 年 Arrow (1972 年诺贝尔经济学奖获得者) 和 Debreu (1983 年诺贝尔经济学奖获得者) 第一次给出了一般经济均衡的严格叙述，并运用布劳威尔不动点定理①严格证明了均衡点的存在性，其中尤其是引进了集值映射、凸性、不动点定理等数学工具，使得一般经济均衡理论真正开始成为严格完整的理论体系.

当(2.8)是一个非线性方程组时，就不能简单地比较方程的个数与未知量的个数来断定方程组有解，即使方程组有解，也不能保证这些解在经济上

---

① **布劳威尔不动点定理** 令 $f: X \to X$ 是一个将紧凸集 X 映射到 X 的连续函数，则 f 在 X 中存在一个不动点，即至少存在一点 $x^* \in X$ 使得 $f(x^*) = x^*$.

有意义(即要保证所有价格都是非负的)，所以一般经济均衡理论在 1954 年 Arrow 和 Debreu 运用布劳威尔不动点定理严格证明均衡存在性以前，它的理论基础是存在缺陷的，其对均衡点的存在性并没有完全解决. 因此，一般经济均衡的 Arrow-Debreu 框架被认为是划时代的贡献.

下面利用上述一般经济均衡理论来建立一个离散时间(单位：年)的商品市场模型.

假设一个农场生产某种谷物，一年收获一次，该农场将根据今年的价格信息来计划明年该谷物的耕种面积. 如果今年收获以后谷物的价格是高的，明年将多种植一些. 当明年该谷物的产量高时，为了卖掉全部谷物，又得降低价格来提高需求量. 由于价格下降，来年人们的种植量会减少，产量也随之减少，同时市场的需求又使价格回升. 这是一个仅有一种商品的市场模型，它包括 3 个变量：商品的供给量 S，商品的需求量 D 和商品的价格 P. 按照一般经济均衡理论，市场均衡条件是当且仅当超额需求(即 $D-S$)为零时，也就是当且仅当市场出清时，市场就实现均衡，市场达到均衡时的价格就是均衡价格，这时的供求数量就是均衡数量. 一般地，当商品价格上涨(或下跌)时，需求量 D 会随之减少(或增加). 商品价格在上下波动中达到均衡价格时，市场就达到均衡. 然而，当商品供不应求时，价格就上涨；当供过于求时，价格就将下降；当需求量和供给量相等，都为均衡数量时，价格处于均衡价格，市场达到均衡.

设 $S(n)$,$D(n)$ 和 $P(n)$ 分别表示第 n 年该商品的供给量、需求量和价格，$n=1,2,\cdots$. 根据以上分析，对该模型可以作出下面三个假设：

1) 任一年的供给量正向地依赖于前一年的价格；
2) 任一年的需求量反向地依赖于目前的价格；
3) 每一年的价格被调整到使得需求量等于供给量.

下面先讨论一个实例，然后再分析更一般的情况.

问题 2.2 假设某种作物的供给量和价格之间的关系为

$$S(n+1)=0.8P(n)$$

(例如：若今年该作物的价格为每公斤 6 元，则来年的供给量为 4.8 单位)，需求量和价格之间的关系为

$$D(n)=-1.2P(n)+20$$

(例如：若价格为每公斤 6 元，则顾客将购买 12.8 单位该作物)，求 $\lim\limits_{k\to\infty}P(k)$，并对市场趋势作出分析.