经全国中小学教材审定委员会2007年初审通过

数学

普通高中课程标准实验教科书

选修 3-4

对称与群

	e	f	g	h
e	e	f	g	h
f	f	e	h	g
g	g	h	e	f
h	h	g	f	e

凤凰出版传媒集团

凤凰国标教材

江蘇教育出版社

JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

经全国中小学教材审定委员会2007年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学

对称与群

duicheng yu qun

主　编：单　墫
副主编：李善良　陈永高　王巧林

选修 3-4

	e	f	g	h
e	e	f	g	h
f	f	e	h	g
e	e	f	g	h
f	f	e	h	g

凤凰国标教材
凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

普通高中课程标准实验教科书·数学
书　　名　对称与群(选修3－4)
作　　者　本书编写组
责任编辑　蔡　立
出版发行　凤凰出版传媒集团
　　　　　江苏教育出版社(南京市湖南路1号A楼　邮编210009)
网　　址　http://www.1088.com.cn
集团网址　凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
经　　销　江苏新华发行集团有限公司
照　　排　南京展望文化发展有限公司
印　　刷　南京爱新印务有限公司
厂　　址　南京雨花东路152号(邮编210012)
电　　话　025－52417550
开　　本　1000×1400毫米　1/32
印　　张　2.25
字　　数　226 000
版　　次　2007年7月第1版
　　　　　2009年12月第5次印刷
书　　号　ISBN　978－7－5343－8245－1
定　　价　2.67元
批发电话　025－83657708,83658558,83658511
邮购电话　025－85400774,8008289797
短信咨询　02585420909
E-mail　jsep@vip.163.com
盗版举报　025－83658551

说　　明

江苏教育出版社出版的《普通高中课程标准实验教科书·数学》是根据2003年教育部制订的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的.

该套教科书充分体现数学课程标准的基本理念,使学生通过高中阶段的学习,能获得适应现代生活和未来发展所必需的数学素养,满足他们个人发展与社会进步的需要.

教科书力图使学生在丰富的、现实的、与他们经验紧密联系的背景中感受数学、建立数学、运用数学,做到"入口浅,寓意深".通过创设恰当的问题情境,引导学生进行操作、观察、探究和运用等活动,感悟并获得数学知识与思想方法.在知识的发生、发展与运用过程中,培养学生的思维能力、创新意识和应用意识.

教科书按知识发展、背景问题、思想方法三条主线,通过问题将全书贯通.每个模块围绕中心教育目标展开,每章围绕核心概念或原理展开.教科书充分关注数学与自然、生活、科技、文化、各门学科的联系,让学生感受到数学与外部世界是息息相通、紧密相连的.

教科书充分考虑学生的不同需求,为所有学生的发展提供帮助,为学生的不同发展提供较大的选择空间.整个教科书设计为:一个核心(基本教学要求),多个层次,多种选择.学好核心内容后,根据需要,学生有多种选择,每一个人都能获得必备的数学素养与最佳发展.

众多的数学家、心理学家、学科教育专家、特级教师参加了本套教科书的编写工作,在此向他们深表感谢!

本书编写组
2007年7月

主　　编　单　墫

副 主 编　李善良　陈永高　王巧林

编写人员　蒋　声

责任编辑　蔡　立

目　　录

4.1 轴对称 ······ 1

4.1.1 点的轴对称变换 ······ 1

4.1.2 图形的轴对称变换 ······ 2

4.1.3 轴对称图形 ······ 3

4.1.4 找对称轴 ······ 4

4.2 旋转对称 ······ 7

4.2.1 旋转变换 ······ 7

4.2.2 中心对称图形 ······ 10

4.2.3 旋转对称图形 ······ 11

4.3 平移对称 ······ 16

4.3.1 平移变换 ······ 16

4.3.2 平移对称 ······ 18

4.4	**对称与群**	23
4.4.1	一变再变	23
4.4.2	变换相乘	26
4.4.3	变换群	31
4.5	**空间中的对称**	40
4.5.1	空间几何变换	40
4.5.2	空间运动群和对称性	44
4.6	**对称的应用**	50
4.6.1	分子的对称性	50
4.6.2	晶体的分类	52
4.6.3	抽象群初步	54
4.6.4	代数中的对称和群	55
4.6.5	高次方程的根式解	58
	学习总结报告	63

4.1 轴对称

用墨水笔在一张矩形白纸的左半部写上号码“008”，趁墨迹未干，立刻将纸片左右对折，抹平，然后将纸重新展开，铺平. 这时就会发现，原号码“008”仍在纸的左半部，不过它的墨迹已经对称地映到纸片右半部，成为新号码“800”(图 4－1－1).

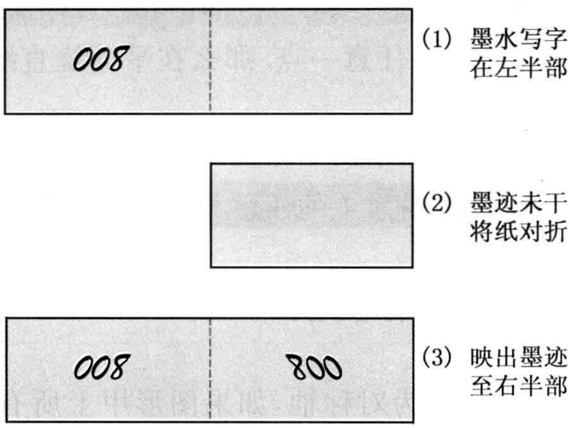

图 4－1－1

这种折纸映墨迹的常见现象，隐含着一种重要几何变换，叫做“轴对称变换”.

4.1.1 点的轴对称变换

如图 4－1－2，设在平面内有一条定直线 l. 又设 A 是这平面内的任意一点. 将这平面绕直线 l 翻转 $180°$，并将点 A 翻转后的位置记为 B，那么从点 A 到点 B 的变换叫做“关于直线 l 的轴对称变换”，简称为“轴对称变换”.

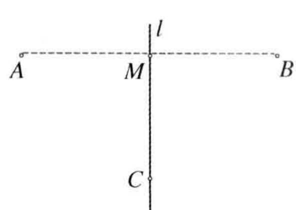

图 4－1－2

其中，定直线 l 叫做对称轴，变换所得点 B

叫做 A 的对称点.

将平面绕对称轴 l 翻转 180° 以后，点 A 和它的对称点 B 互相交换位置. 不但点 A 变换到 B 的位置，同时点 B 也变换到 A 的位置.

这就表明，在轴对称变换下，如果 A 的对称点是 B，那么 B 的对称点是 A. 可见这两点地位平等，若无必要，可以不强调谁先谁后，只是简单地说：A 和 B 是轴对称变换下的一双对应点.

如果点 A 不在对称轴 l 上，B 是 A 的对称点，那么 A，B 分居直线 l 两侧，并且 $AB \perp l$；又若 AB 与 l 的交点为 M，则 $AM = MB$（图 4-1-2）.

以上性质可简述为：

在轴对称变换下，任意一双对应点的连线被对称轴垂直平分.

设 C 是对称轴 l 上的任意一点. 那么在平面绕直线 l 翻转 180° 以后，点 C 保持不动.

由此可见：

在轴对称变换下，对称轴上的任意点变成它自己.

4.1.2 图形的轴对称变换

在平面内，以直线 l 为对称轴，如果图形甲上所有各点的对称点组成图形乙，那么关于 l 的轴对称变换把图形甲变到图形乙. 所以，图形乙是图形甲在轴对称变换下的对应图形，简称为图形甲的对称图形.

例如，在前面的图 4-1-1 中，以纸片中间的折痕为对称轴，原号码 008 的对称图形是墨迹映出的新号码 800.

又如，在图 4-1-3 中，以直线 l 为对称轴，点 C 的对称图形是点

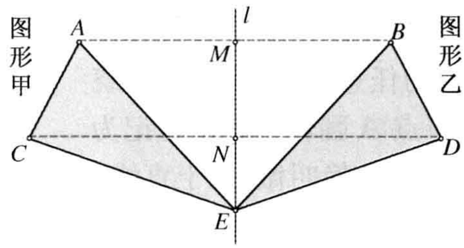

图 4-1-3

D,线段 AC 的对称图形是线段 BD,$\triangle ACE$ 的对称图形是$\triangle BDE$,等等.

将平面绕对称轴 l 翻转 $180°$以后,得到的对称图形乙与原图形甲相比,任意两点间的距离保持不变.

例如,在图 4－1－3 中,线段 AC 与它的对应线段 BD 相等.

保持任意两点间距离不变的平面几何变换,叫做平面运动,简称为运动.

在轴对称变换下,对称轴上每一点仍变为自己.在运动下变成自己的点叫做不动点.轴对称变换是具有无穷多个不动点的平面运动.

4.1.3 轴对称图形

在图 4－1－4 所示的蝴蝶图形中,考虑通过蝶身中央的直线,将画面绕这直线翻转 $180°$以后,蝴蝶图形的左右两半换位,但是整个图形的外观保持不变.

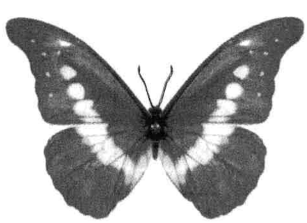

图 4－1－4

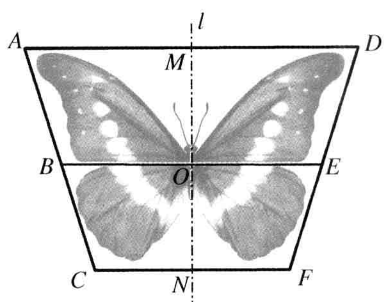

图 4－1－5

蝴蝶种类繁多,形状千变万化.但各种蝴蝶双翅展平以后,大致轮廓都是一个等腰梯形(图 4－1－5).

在图 4－1－5 所示的等腰梯形 $ACFD$ 中,设通过上、下两底中点的直线为 l.以 l 为对称轴,作轴对称变换,那么顶点 A 与 D 交换位置,C 与 F 交换位置,整个等腰梯形仍变为它自己,不过左右换位而已.

如果一个图形关于直线 l 的轴对称变换所得到的对称图形与原图形完全重合,就说这个图形是轴对称图形,直线 l 叫做它的对称轴.或者简单地说,这个图形具有轴对称性.

例如,等腰梯形是轴对称图形,它的对称轴是连接两底中点的直线.也就是说,等腰梯形具有轴对称性.

数学里的轴对称性,来源于日常生活中所说的“左右对称”.蝴蝶、飞机等等都是常见的左右对称实例.

4.1.4 找对称轴

考虑一个图形的轴对称性,首要环节是观察它有没有对称轴,有几条对称轴.

例1 如图 4-1-6,等腰三角形是轴对称图形,它的对称轴是底边上的高.

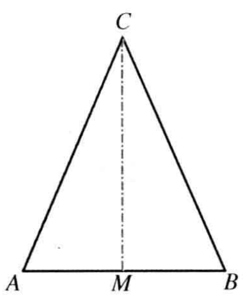

图 4-1-6

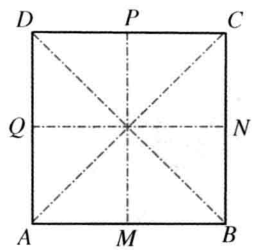

图 4-1-7

例2 如图 4-1-7,正方形是轴对称图形,它有 4 条对称轴:两条对角线,以及两双对边中点的连线.

例3 如图 4-1-8,正五边形是轴对称图形,它有 5 条对称轴,分别是从每个顶点所作对边的垂线.

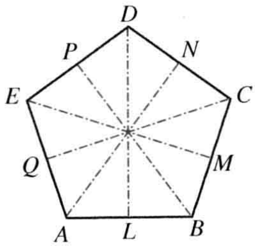

图 4-1-8

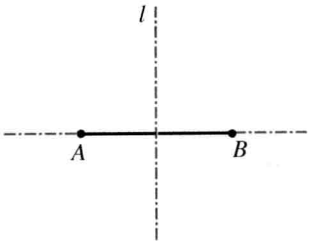

图 4-1-9

例 4 如图 4-1-9，线段 AB 是轴对称图形，它有两条对称轴：一条是这线段的垂直平分线 l，另一条是线段自己所在的直线 AB.

例 5 如图 4-1-10，单独一个点 O 是轴对称图形，每条通过点 O 的直线，例如图 4-1-10 中的 a, b, c 等等，都是点 O 的对称轴. 所以一个点有无穷多条对称轴.

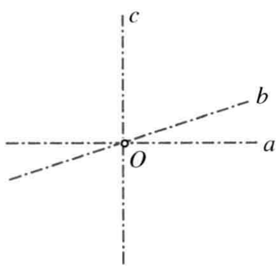

图 4-1-10

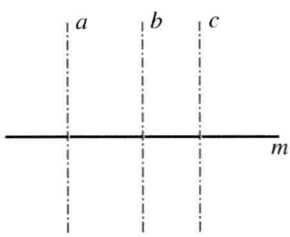

图 4-1-11

例 6 如图 4-1-11，直线 m 是轴对称图形. 首先，直线 m 是它自己的一条对称轴. 而且，由于直线 m 向两侧无限延伸，任何一条垂直于 m 的直线，例如图 4-1-11 中的 a, b, c 等等，也都是 m 的对称轴. 所以一条直线有无穷多条对称轴.

例 7 直角梯形不是轴对称图形，因为它没有对称轴.

习题 4.1

1. 从自己熟悉的事物中,列举三个左右对称的实际例子.

2. 画一个正三角形,并且画出它的所有各条对称轴.

3. 正六边形有几条对称轴? 其中,有几条通过顶点? 几条是边的垂直平分线?

4. 画一个几何图形,使它恰好有两条对称轴.

5. 画一个几何图形,使它没有对称轴.

探 索

1. 如果一个正多边形的边数是偶数 $2k$(k 是大于 1 的整数),那么它有多少条对称轴? 其中,有多少条通过顶点? 多少条是边的垂直平分线?

2. 如果一个正多边形的边数是奇数 $2k+1$(k 是正整数),那么它有多少条对称轴? 其中,有多少条通过顶点? 多少条是边的垂直平分线?

4.2 旋转对称

闷热的夏天，人们会打开电风扇，通过风扇叶片的旋转运动，制造凉风，驱赶热气(图 4-2-1).

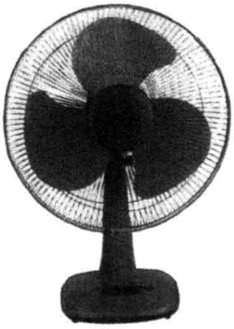

图 4-2-1

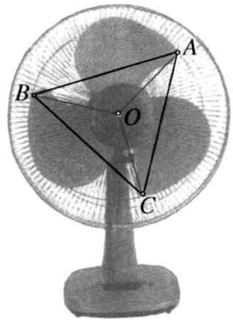

图 4-2-2

旋转运动是一种常见运动形式，值得注意. 旋转的电风扇叶片能否给数学带来启发呢?

如图 4-2-2，设想在电风扇的一个叶片上标记一个代表点 A，在另外两个叶片的同样位置上分别取点 B 和 C，我们可以通过仔细观察这三点 A, B, C 的运动变化情况，寻找隐藏的数学规律.

设风扇叶的旋转中心为 O. 那么 $\triangle ABC$ 是正三角形，点 O 是这个正三角形的中心. 这样一来，就把电风扇叶片的旋转运动归结成正三角形 ABC 绕中心 O 的旋转变换，从生活中的旋转引出数学中的旋转.

4.2.1 旋转变换

1. 点的旋转变换

在电风扇叶片旋转送风的过程中，在一段确定的时间间隔里，叶片

上所有各点都沿同一方向转过相等的角.

用数学语言描述这种旋转现象,就形成了下面的旋转变换概念:

设在平面内有一个定点 O、定角 α 和一个确定的旋转方向(顺时针或逆时针方向),如果平面内任意点 X 绕点 O 沿指定方向转过角 α,变为点 Y,那么从点 X 到点 Y 的变换叫做旋转变换(简称为旋转),点 O 叫做旋转中心,角 α 叫做旋转角(规定逆时针旋转为正,顺时针旋转为负).

如图 4-2-3,设 A 是平面内的任意一点,但不是旋转中心 O. 如果将 A 通过旋转变换到点 B,那么

$$OA = OB, \angle AOB = \alpha.$$

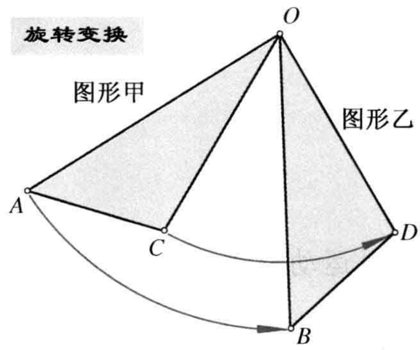

图 4-2-3

又若点 C 变到点 D,那么同样有

$$OC = OD, \angle COD = \alpha.$$

不管旋转角是多大,旋转中心 O 总是变到它自己.

数学中的旋转概念,只注意新旧位置的对应关系,不考虑从旧位置到达新位置的运动过程. 这样处理,既保留了从生活实际获得启发的渠道,又便于用数学方法进行研究.

2. 图形的旋转变换

在旋转变换下,如果图形甲中所有各点的对应点组成图形乙,那么这个变换就把图形甲变成图形乙.

旋转变换是一种运动.

3. 恒等变换

现在考虑旋转变换的一种常见特殊情形.

如果将图形绕定点 O 旋转 $360°$，那么刚好旋转一周，因而图形中的每一点都返回原地，新位置与旧位置重合. 这样就使每一点都变成自己.

把每一点都变成自己的几何变换，叫做恒等变换.

在周而复始、持续旋转的过程中，每旋转一周，都会经历一次恒等变换. 由此可见，恒等变换虽然貌似平凡，却是一个来源于生活的必不可少的概念.

如果一个旋转变换不是恒等变换，就叫做非平凡旋转变换.

研究旋转变换，通常主要关心非平凡旋转. 在非平凡旋转变换下，除去旋转中心保持不动，平面内其余各点全都改变位置.

4. 中心对称变换

旋转变换的另外一种常见特殊情形，在生活里和数学里都扮演着重要角色.

如图 4－2－4，设 O 是旋转中心，旋转角 $\alpha = 180°$. 这时，如果 A 是平面内的任意一点，B 是 A 的对应点，那么 $OA = OB$，$\angle AOB = 180°$.

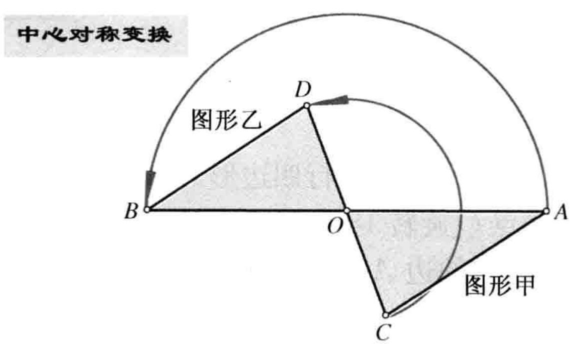

图 4－2－4

换句话说，这时的变换将任意点A变为OA的反向延长线上的一点B，使得$OB=OA$.

这种在反向延长线上截取相等线段的变换方式，叫做中心对称变换，其中的定点O叫做对称中心.

由此可见：

旋转角为180°的旋转变换就是中心对称变换，这时的旋转中心成为对称中心.

例如，早晨6时出门，闹钟的时针指在数字“6”上；中午12时回家，时针指着数字“12”. 时针位置恰好旋转了180°，经历了一个中心对称变换.

4.2.2 中心对称图形

如图4－2－5，设线段AB的中点为O. 将这条线段绕点O旋转180°，结果端点A旋转到B的位置，端点B旋转到A的位置，整条线段依旧落在A与B之间，与原线段重合. 图形外貌未改，只不过转了一个身，线段内部各点左右成对地交换场地.

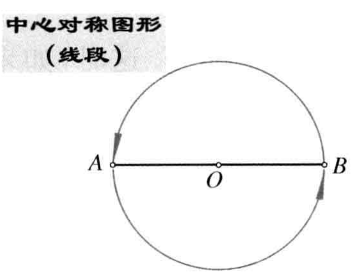

图4－2－5

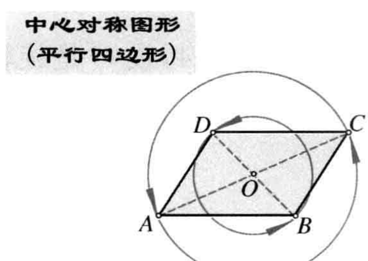

图4－2－6

又如，在图4－2－6中，设平行四边形$ABCD$的对角线交点为O. 将这个平行四边形绕点O旋转180°，结果与原平行四边形重合. 平行四边形外貌依旧，只不过它的边AB与CD交换了位置，BC与DA交换了位置.

一般地，在平面内，如果某个图形绕定点旋转180°以后，得到的新图形与原图形重合，就说原图形是一个中心对称图形，定点是它的对称中