经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修4-4）

坐标系与参数方程

SHUXUE

北京师范大学出版社

SHUXUE 4-4

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4-4 坐标系与参数方程

ISBN 978-7-303-08182-0

9 787303 081820 >

定价:3.70元

京发改［2007］1043号－033

全国价格举报电话：12358

经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修4-4）

坐标系与参数方程

SHUXUE

主　编　严士健　王尚志
副主编　张饴慈　李延林　张思明
本册主编　李延林　李慧民
编写人员　（按姓氏笔画排序）
王尚志　张饴慈　李延林
李慧民

北京师范大学出版社
·北京·

营销中心电话	010-58802783
服务中心电话	010-58802795
邮购科电话	010-58808083
传　　　　真	010-58802838
学科编辑电话	010-58802811　58802790
电子邮箱	shuxue3@bnup.com.cn
通信地址	北京师范大学出版社基础教育分社（100875）

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：北京京师印务有限公司
装　　订：三河达文装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：210 mm × 297 mm
印　　张：4
字　　数：100 千字
版　　次：2007 年 5 月第 2 版
印　　次：2009 年 11 月第 6 次印刷
定　　价：3.70 元
ISBN 978-7-303-08182-0

责任编辑：焦继红　邢自兴　　装帧设计：高　霞
责任校对：陈　民　　　　　　责任印制：吕少波　吴祖义

前　言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用.

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展．要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限，选择能力是很重要的，你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼.

在高中阶段，学习内容是很有限的．中国古代有这样的说法："授之以鱼，不如授之以渔"，学会打鱼的方法比得到鱼更重要．希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识．数学是提高"自学能力"最好的载体之一.

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）？20世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题．大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics）．问题是思考的结果，是深入思考的开始，"有问题"也是创造的开始．在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成"问题意识"和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的．不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣.

本套教材由26册书组成：必修教材有5册；选修系列1有2册，选修系列2有3册，它们体现了发展的基本方向；选修系列3有6册，选修系列4有10册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题．习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的"练习"；一类是课后的"习题"，分为A，B两组；还有一类是复习题，分为A，B，C三组.

研究性学习是我们特别提倡的．在教材中强调了问题提出，抽象概括，分析理

解，思考交流等研究性学习过程．另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”．

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分．

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动，在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作．

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”．它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想．教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解．在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解．教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考．

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值．

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功，请将你们成功的经验告诉我们，以便让更多的朋友分享你们成功的喜悦．

我们的联系方式是：北京师范大学出版社基础教育分社（100875），010-58802811．

目　录

第一章 坐标系

坐标系的思想是17世纪著名数学家笛卡儿(R. Descartes,1596—1650)提出的,它是解析几何的基础,是联系几何与代数的桥梁,是现代数学最重要的基本思想之一.

坐标系的建立为确定物体的位置、研究物体运动的轨迹、探讨曲线的几何性质、分析函数的变化等提供了方便.

在现实生活中,人们经常需要确定物体的位置.

例如,一名到北京的游客,他想借助于地图来确定颐和园相对于天安门的位置.通常可以用两种方法:一种方法是确定从天安门向西多少千米,再向北多少千米就可以到达颐和园;另一种方法是确定颐和园在天安门北偏西多少度,距离多少千米.显然,确定颐和园的位置只需要两个数就可以了,即东西和南北两个方向的垂直距离,或者是方位角和距离.

又如,一位观众到某歌剧院观看演出,如何找到自己的座位呢?根据入场券,首先确定座位是在楼上还是楼下,然后找到座位所在的排数,最后在这一排找到相应的座位.显然,只要知道三个维度就可以找到自己的座位了.

再如,北京位于地球的北纬40°、东经116°,即通常用经度和纬度这两个维度来确定北京的位置.

我们可以根据确定的对象所需要的维度来建立适当的坐标系,用坐标刻画所研究的对象,用代数方法解决几何问题.

本章将通过对几种常见坐标系的讨论来体会坐标思想的作用.

§1 平面直角坐标系

1.1 平面直角坐标系与曲线方程

在平面直角坐标系中，对于任意一点，都有唯一的有序实数对 (x,y) 与之对应；反之，对于任意的一个有序实数对 (x,y)，都有唯一的点与之对应. 即在平面直角坐标系中，点和有序实数对是一一对应的. 曲线可看作是满足某些条件的点的集合或轨迹，由此我们可借助坐标系，研究曲线与方程间的关系.

例如，圆是平面内到定点的距离等于定长的点的集合. 对于半径等于 5 的圆 O，以它的圆心为原点、互相垂直的两条半径所在的直线为 x 轴和 y 轴建立平面直角坐标系，如图 1-1.

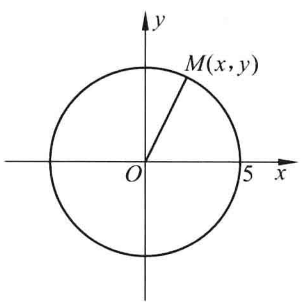


图 1-1

在圆上任意选取一点 $M(x,y)$，根据圆的定义可知：

$$|OM|=5.$$

由两点间距离公式可得：

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=5,$$

即
$$x^2+y^2=25.$$

由此可见，以原点为圆心、5 为半径的圆上的点的坐标都是方程 $x^2+y^2=25$ 的解.

反之，设 x_1，y_1 是方程 $x^2+y^2=25$ 的任意一组解，则有

$$x_1^2+y_1^2=25,$$

即
$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}=5.$$

这表明以 (x_1,y_1) 为坐标的点到原点的距离等于 5，即这个点在以原点为圆心、5 为半径的圆上.

这样，我们就可以用 $x^2+y^2=25$ 来表示以原点为圆心、5 为半径的圆，并且称 $x^2+y^2=25$ 是以原点为圆心、5 为半径的圆的方程.

思考交流

1. 在平面直角坐标系中，圆心坐标为 $(2,3)$、5 为半径的圆的方程是什么？

2. 在平面直角坐标系中，以 (a,b) 为圆心、r 为半径的圆的方程

是什么?

抽象概括

在平面直角坐标系中,如果某曲线 C 上的点与一个二元方程 $f(x,y)=0$ 的实数解建立了如下的关系:

1. 曲线 C 上的点的坐标都是方程 $f(x,y)=0$ 的解;

2. 以方程 $f(x,y)=0$ 的解为坐标的点都在曲线 C 上.

那么,方程 $f(x,y)=0$ 叫作曲线 C 的方程,曲线 C 叫作方程 $f(x,y)=0$的曲线.

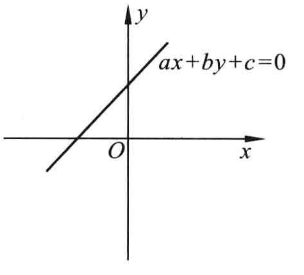


图 1-2

这样,我们就可以通过建立适当的平面直角坐标系,应用方程来表示许多常见的曲线,在必修课和选修系列 1,2 中我们学习过如下一些曲线的方程:

直线的方程(如图 1-2):$ax+by+c=0$;

圆的方程(如图 1-3):$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,其中(a,b)为圆心,r 为半径.

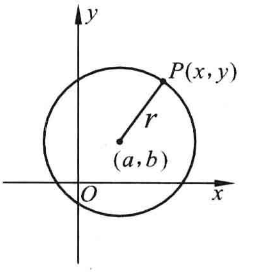


图 1-3

椭圆的方程(如图 1-4):$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,其中椭圆的中心在原点,焦点在 x 轴上,长轴长为 $2a$,短轴长为 $2b$.

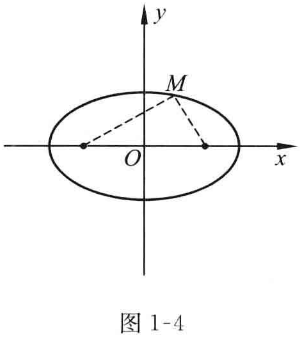


图 1-4

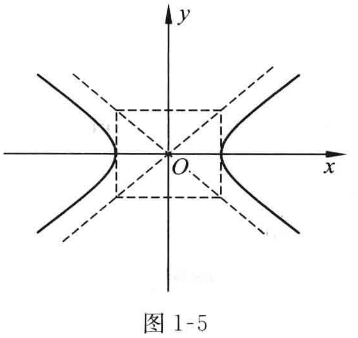


图 1-5

双曲线的方程(如图 1-5):$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,其中双曲线的中心在原点,焦点在 x 轴上,实轴长为 $2a$,虚轴长为 $2b$.

抛物线的方程(如图 1-6):$y^2=2px(p>0)$,其中抛物线的顶点在原点,以 x 轴为对称轴,开口向右.

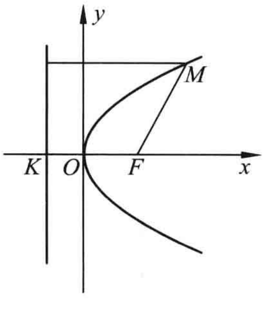


图 1-6

练 习

1. 已知等腰三角形 ABC 的底边 BC 长为 6,腰长为 5,建立两个不同的直角坐标系,分别求出三边所在直线的方程.

2. 画出下列方程所表示的曲线.

(1) $(x-2)^2+(y+7)^2=0$;

(2) $(x-1)^2=8-(y+2)^2$;

(3) $y=\sqrt{2-x^2}$.

1.2 平面直角坐标轴中的伸缩变换

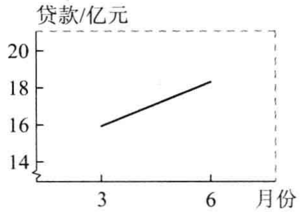


图 1-7

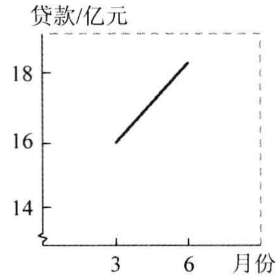


图 1-8

在现实生活和生产实际中，需要处理大量数据和资料，统计图是重要工具. 一般情况下，绘制统计图都需要借助平面直角坐标系，当绘制者在 x 轴与 y 轴上选择不同的单位长度时，统计图就会产生不同的效果，如果选择适当，可以清晰地反映出事物的特征，如果选择不好，会使人产生误解. 例如，某银行信用卡贷款由 1995 年 3 月的 15.924亿元上升到 1995 年 6 月的18.281亿元，可以用图 1-7 和图 1-8来表示增长幅度.

在这两个图中所表示的数据是相同的，但是给我们的感觉是图 1-8显示的增长幅度要大，产生这种误解的原因是两图中坐标轴选择的单位长度不一样.

在平面直角坐标系中进行伸缩变换，即改变 x 轴或 y 轴的单位长度，将会对图形产生影响.

例 1 在下列平面直角坐标系中，分别作出以原点为圆心，6 为半径的圆：

(1) x 轴与 y 轴具有相同的单位长度；

(2) x 轴上的单位长度为 y 轴上单位长度的 2 倍；

(3) x 轴上的单位长度为 y 轴上单位长度的$\frac{1}{2}$倍.

解 以原点为圆心，6 为半径的圆的方程为 $x^2+y^2=36$.

列表(如表 1-1).

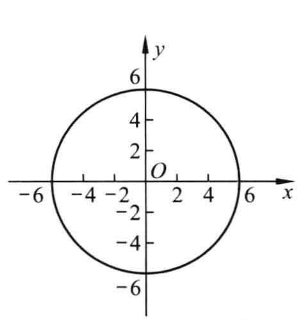


图 1-9

表 1-1

x	0	1	2	3	4	5	6
y	6	5.92	5.66	5.20	4.47	3.32	0

(1) 建立平面直角坐标系使 x 轴与 y 轴具有相同的单位长度，根据点的坐标描点，将这些点光滑连接，再由对称性即可得到圆 $x^2+y^2=36$的图形为图 1-9；

(2) 如果 x 轴的单位长度保持不变，y 轴的单位长度缩小为原来

的$\frac{1}{2}$，圆 $x^2+y^2=36$ 的图形为图 1-10；

(3) 如果 y 轴的单位长度保持不变，x 轴的单位长度缩小为原来的$\frac{1}{2}$，圆 $x^2+y^2=36$ 的图形为图 1-11.

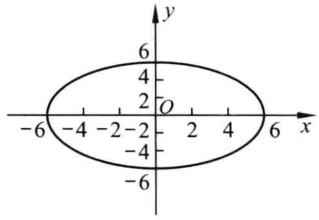


图 1-10

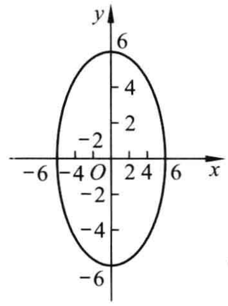


图 1-11

思考交流

我国 1990 年至 2000 年的国内生产总值如表 1-2(单位:亿元).

表 1-2

年　份	1994	1995	1996	1997	1998
生产总值	43 800	57 733	67 795	74 772	79 553
年　份	1999	2000	2001	2002	2003
生产总值	82 054	89 404	95 933	102 398	116 694

选择适当的平面直角坐标系，根据表 1-2 画出统计图，与同学交流，观察各自的特点.

例 2　在下列平面直角坐标系中，分别作出$|x|+|y|=1$的图形：

(1) x 轴与 y 轴具有相同的单位长度；

(2) x 轴上的单位长度为 y 轴上单位长度的 2 倍；

(3) x 轴上的单位长度为 y 轴上单位长度的$\frac{1}{2}$倍.

解　(1) 建立平面直角坐标系使 x 轴与 y 轴具有相同的单位长度，$|x|+|y|=1$ 的图形为图 1-12；

(2) 如果 x 轴上的单位长度保持不变，y 轴上的单位长度缩小为原来的$\frac{1}{2}$，$|x|+|y|=1$ 的图形为图 1-13；

(3) 如果 y 轴上的单位长度保持不变，x 轴上的单位长度缩小为原来的$\frac{1}{2}$，$|x|+|y|=1$ 的图形为图 1-14.

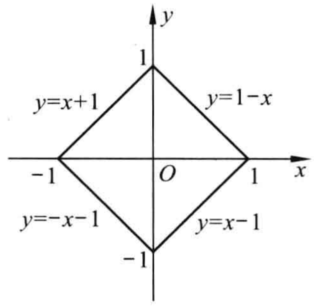


图 1-12

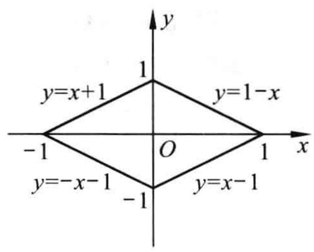


图 1-13

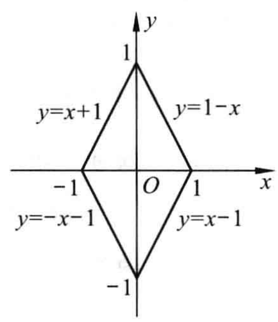


图 1-14

为了揭示做简谐振动物体的位移 s 与时间 t 的关系，交流电中电流 I 与时间 t 的关系，都要用到形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的函数. 在必修课中阐明了在同一个坐标系中，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$与 $y=\sin x$ 图像间的关系. 这里我们来讨论改变坐标轴的单位长度，函数 $y=\sin x$ 的图像会发生什么变化.

***例 3**　(1)在 x 轴与 y 轴具有相同单位长度的直角坐标系中分别作出 $y=\sin x$，$y=2\sin 3x$ 的图像；

(2)将上述坐标系 x 轴的单位长度缩短为原来的$\frac{1}{3}$倍、y 轴的单位长度伸长为原来的 2 倍再作出 $y=\sin x$ 的图像.

解 (1)画出 x 轴与 y 轴具有相同单位长度的直角坐标系，经过描点连线分别作出 $y=\sin x$，$y=2\sin 3x$ 的图像，即图 1-15.

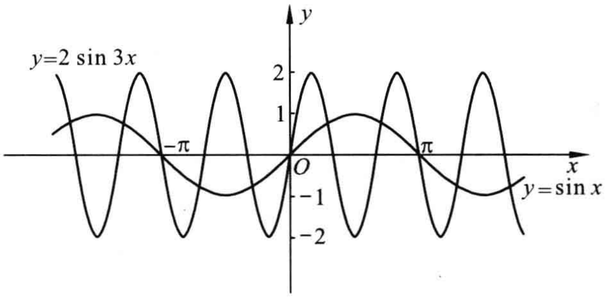


图 1-15

(2)建立坐标系，把 x 轴的单位长度缩短为(1)中 x 轴单位长度的$\frac{1}{3}$倍，y 轴的单位长度伸长为(1)中 y 轴单位长度的 2 倍，再经过描点连线作出$y=\sin x$ 的图像，即图 1-16.

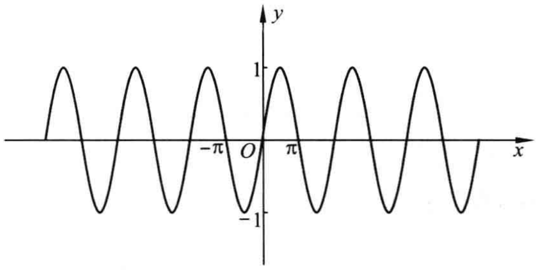


图 1-16

信息技术建议

用几何画板或其他数学软件验证思考交流 2 的结果.

* **思考交流**

1. 观察例 3(2)中 $y=\sin x$ 的图像与(1)中 $y=2\sin 3x$ 的图像，讨论它们的关系.

2. 试将上述讨论引申为坐标轴单位长度任意伸缩的情况.

练 习

在下列平面直角坐标系中，分别作出椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$：

(1) x 轴与 y 轴具有相同的单位长度；

(2) x 轴上的单位长度为 y 轴上单位长度的 2 倍；

(3) x 轴上的单位长度为 y 轴上单位长度的$\frac{1}{2}$倍.

习 题 1—1

A 组

1. 已知两点 $A\left(1,\frac{1}{6}\right)$，$B(-5,6)$，写出经过这两点的直线方程.

2. 已知直线方程为 $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=-2$，写出直线与 x 轴和 y 轴的交点坐标以及直线的斜率.

3. 已知$\triangle ABC$ 的顶点坐标是 $A(2,3)$，$B(5,3)$，$C(2,7)$，求$\angle A$ 的平分线长及其所在直线的方程.

4. 试用两种方法证明：三点 $A(-2,12)$，$B(1,3)$，$C(4,-6)$在同一条直线上.

5. 求直线 $2x-5y-10=0$ 与坐标轴所围成的三角形的面积.

6. 建立平面直角坐标系证明：矩形的两条对角线长相等.

7. 求下列各圆的标准方程，并画出它们的图形：

   (1) 过点 $C(-1,1)$和 $D(1,3)$，圆心在 x 轴上；

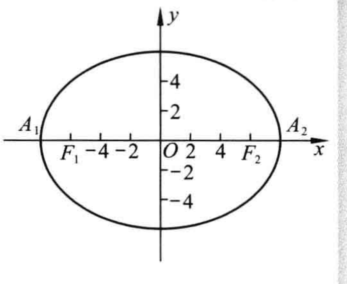
   (2) 半径是 5，圆心在 y 轴上，且与直线 $y=6$ 相切；

   (3) 过点 $A(5,2)$和 $B(3,-2)$，圆心在直线 $2x-y=3$ 上；

   (4) 过点 $A(3,2)$，圆心在直线 $y=2x$ 上，且与直线 $y=2x+5$ 相切.

8. 一个等腰三角形的底边长是 8，底边上的高等于 5. 建立适当的平面直角坐标系，求出它的外接圆的方程.

9. 如图，椭圆上的点中，A_1 与焦点 F_1 的距离最近，且$|A_1F_1|=2$，A_2 与焦点 F_1 的距离最远，且$|A_2F_1|=14$. 求椭圆的标准方程.



（第 9 题）

10. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

    (1) 经过两点 $P(-2\sqrt{2},0)$，$Q(0,\sqrt{5})$；

    (2) 长轴长是短轴长的 3 倍，且经过点 $P(3,0)$；

    (3) 焦点坐标是$(-2\sqrt{3},0)$和$(2\sqrt{3},0)$，并且经过点 $P(\sqrt{5},-\sqrt{6})$.

11. 在下列平面直角坐标系中，分别作出 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的图形：

    (1) x 轴与 y 轴具有相同的单位长度；　　(2) x 轴上的单位长度为 y 轴上单位长度的 2 倍；

    (3) x 轴上的单位长度为 y 轴上单位长度的 $\frac{1}{2}$ 倍.

B 组

1. 已知一个圆直径的端点是 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 证明：圆的方程是 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

2. 已知圆 $(x-3)^2+(y-5)^2=4$ 和圆 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-5)^2=1$. 求过这两个圆交点的直线方程.

3. 我国发射的一颗科学实验人造地球卫星的运行轨道是以地球球心为一个焦点的椭圆，椭圆上的点与地面的最近距离是 266 km，最远距离是 1 826 km. 求这颗卫星运行轨道的方程.（地球半径约为6 370 km）

§2 极坐标系

2.1 极坐标系的概念

平面直角坐标系是常用的一种坐标系. 为了更方便地刻画点和曲线,有时,我们还引入其他形式的坐标系. 例如,在航海、航空中,常用方位角和距离来描述雷达搜索到的目标位置.

注

n mile 为海里.(只用于航程)

1 n mile=1 852 m.

例如,在海岸 A 处,发现北偏东 45°方向、距 A 为 0.7 n mile的 B 处有一艘走私船,在 A 北偏西 75°方向、距 A 为 2 n mile的 C 处的缉私船奉命以 17 n mile/h的速度追截走私船,此时走私船正以 10 n mile/h的速度从 B 处向北偏东 30°的方向逃窜,最终缉私船在 D 点将走私船截获(如图 1-17).

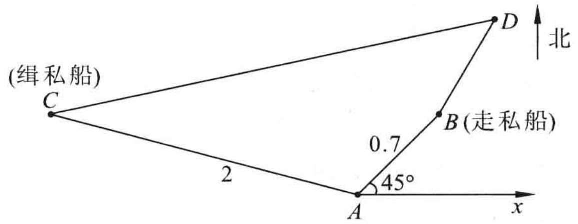


图 1-17

如果从 A 点向正东方向引射线 Ax,选取合适的长度单位表示 1 n mile、逆时针方向为角的正方向,则点 B 就可以用一组数值 $\left(0.7,\frac{\pi}{4}\right)$来表示了,其中,0.7 表示 AB 距离的长度,$\frac{\pi}{4}$表示射线 AB 与 Ax 夹角的度数. 同理,点 C 可以表示为$\left(2,\frac{11\pi}{12}\right)$.

按照这样的方法,我们就可以给出平面内用距离和角来表示点的位置的坐标系——极坐标系.

如图 1-18,在平面内取一个定点 O,叫作**极点**,从 O 点引一条射线 Ox,叫作**极轴**,选定一个单位长度和角的正方向(通常取逆时针方向). 这样就确定了一个**平面极坐标系**,简称为**极坐标系**.

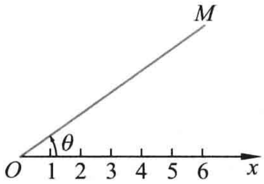


图 1-18

对于平面内任意一点 M,用 ρ 表示线段 OM 的长,θ 表示以 Ox 为始边、OM 为终边的角度,ρ 叫作点 M 的**极径**,θ 叫作点 M 的**极角**,有序实数对(ρ,θ)叫作点 M 的**极坐标**,记作 $M(\rho,\theta)$.

当点 M 在极点时,它的极径 $\rho=0$,极角 θ 可以取任意值.

例 1　在极坐标系中描出下列各点：

(1) $A(4,0)$；　(2) $B\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$；　(3) $C\left(6,\frac{4\pi}{3}\right)$.

解　如图 1-19.

(1) 因为点 A 的极角为 0，所以点 A 就在极轴 Ox 上，又因为点 A 的极径为 4，所以在 Ox 轴上取 $OA=4$，则 A 就是我们要画出的点 $(4,0)$；

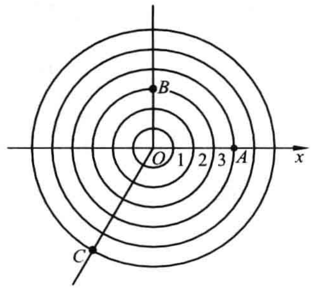


图 1-19

(2) 把极轴 Ox 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$，在角 $\frac{\pi}{2}$ 的终边上取 $OB=3$，则点 B 就是我们要画出的点 $\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$；

(3) 把极轴 Ox 逆时针旋转 $\frac{4\pi}{3}$，在角 $\frac{4\pi}{3}$ 的终边上取 $OC=6$，则点 C 就是我们要画出的点 $\left(6,\frac{4\pi}{3}\right)$.

若极角取负值，则上例中点 A,B,C 的极坐标又可以表示为

$$A(4,-2\pi), B\left(3,-\frac{3\pi}{2}\right), C\left(6,-\frac{2\pi}{3}\right).$$

为了研究问题方便，极径 ρ 也允许取负值.

当 $\rho<0$ 时，点 $M(\rho,\theta)$ 的位置可以按下列规则确定：作射线 OP，使 $\angle xOP=\theta$，在 OP 的反向延长线上取一点 M，使 $|OM|=|\rho|$，这样点 M 的坐标就是 (ρ,θ)，如图 1-20.

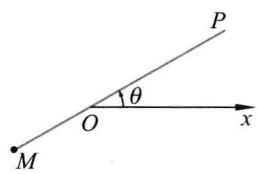


图 1-20

在上例中，当极径取负值时，各点的极坐标可表示为

$$A(-4,\pi), B\left(-3,\frac{3\pi}{2}\right), C\left(-6,\frac{\pi}{3}\right).$$

抽象概括

显然，平面内一点的极坐标可以有无数对. 当 $k\in\mathbf{Z}$ 时，(ρ,θ)，$(\rho,\theta+2k\pi)$，$(-\rho,\theta+(2k+1)\pi)$ 表示同一个点，而用平面直角坐标表示点时，每一个点的坐标是唯一的. 但是，建立了极坐标系后，如果规定 $\rho>0$，$0\leqslant\theta<2\pi$ 或者 $-\pi<\theta\leqslant\pi$，那么除极点外，平面内的点和极坐标就一一对应了.

建立了极坐标系后，对于给定的 ρ 和 θ，就可以在平面内确定唯一的点 M；反过来，对于给定的平面内的一点 M，也可以写出它的极坐标 (ρ,θ).

练 习

1. 在极坐标系中，作出下列各点：

(1) $A\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$，　$B(6,-120°)$，　$C\left(1,\frac{\pi}{3}\right)$，

$D\left(4,-\frac{3\pi}{4}\right)$，　$E(4,0)$，　$F(2.5,180°)$；

(2) $A\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$，$B\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$，$C\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$，$D(3,\pi)$，$E\left(3,\frac{3\pi}{2}\right)$，并说明这 5 个点有什么关系；

(3) $A\left(-2,\frac{\pi}{6}\right)$，$B\left(-1,\frac{\pi}{6}\right)$，$C\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$，$D\left(4.5,\frac{\pi}{6}\right)$，$E\left(4.55,\frac{\pi}{6}\right)$，并说明这 5 个点有什么关系.

2. 在极坐标中，点(ρ,θ)与$(-\rho,\pi-\theta)$有什么关系？

2.2 点的极坐标与直角坐标的互化

极坐标系和平面直角坐标系是两种不同的坐标系. 同一个点在不同的坐标系中，要用不同的数对来表示. 下面我们讨论点的极坐标与直角坐标的互化.

分析理解

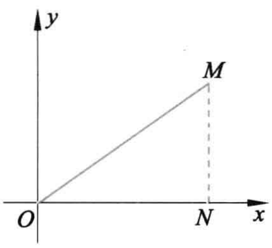


图 1-21

如图 1-21，建立一个平面直角坐标系，把平面直角坐标系的原点作为极点，x 轴的正半轴作为极轴，建立极坐标系，并在两种坐标系中取相同的单位长度.

设 M 是平面内的任意一点，它的直角坐标是(x,y)，极坐标是(ρ,θ). 如果限定 ρ 取正值，$\theta\in[0,2\pi)$，那么除原点外，平面内点的直角坐标与极坐标之间就是一一对应的.

过点 M 作 $MN\perp Ox$，垂足为 N，于是，由三角函数定义，我们得到将点 M 的极坐标(ρ,θ)化为直角坐标(x,y)的关系式为

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta.\end{cases} \quad ①$$

由关系式①，可以得到：

将点的直角坐标(x,y)化为极坐标(ρ,θ)的关系式为

$$\begin{cases}\rho^2=x^2+y^2,\\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}(x\neq0).\end{cases}$$

例 2 把下列点的极坐标化成直角坐标：