


华中科技大学数学创新教材

# 解析几何与线性代数

◎文志雄 编

 科学出版社  
[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

华中科技大学数学创新教材

# 解析几何与线性代数

文志雄 编

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书是大学数学系列创新教材之一,内容主要包括:空间的平面与直线,空间的曲线、曲面,向量空间与矩阵运算、行列式,向量的线性关系与线性方程组,矩阵代数,特征值与矩阵的相似及对角化,实二次型与实对称矩阵的对角化,线性空间与线性变换.

本书适合高等院校非数学专业相应课程选用,亦可供学习该课程的专业本科生和研究生参考.

### 图书在版编目(CIP)数据

解析几何与线性代数/文志雄编 —北京:科学出版社,2010 10

华中科技大学数学创新教材

ISBN 978-7-03-028877-6

I. ①解… II. ①文… III. ①解析几何—高等学校—

教材②线性代数—高等学校—教材 IV. ①O182②O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第173888号

责任编辑:房 阳 杨瑰玉/责任校对:李 影

责任印制:彭 超/封面设计:苏 波

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码 100717

<http://www.sciencep.com>

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社编务公司排版制作

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2010年9月第一版 开本: B5 (720 × 1000)

2010年9月第一次印刷 印张: 15 3/4

印数: 1—3 000 字数: 297 000

定价: 27.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

# 《华中科技大学数学创新教材》

## 丛书编委会

主 编 张诚坚

编 委 (按姓氏笔画排序)

文志雄 刘 斌 汤燕斌 李 萍

张诚坚 张显文 黄永忠

## 丛 书 序

随着教学实践的深入进行,现行大学数学教育体系已呈现诸多弊病.一方面,一些学生反映:数学太抽象,学习数学太枯燥,学完之后仅记得几个数学符号和概念,难以做到学以致用;另一方面,一些高年级本科生和研究生反映:本科阶段所学的数学远远不能满足其专业需求,学懂了的数学用不上,要用的数学没学过.这一切都说明,现行的“教”与“学”、“学”与“用”严重脱节,现行的数学教学已远远不能满足现代教育及高速发展的科学技术的需要,改革与创新势在必行.

我国的大学数学教育长期以来沿用了前苏联的模式:从课程设置来说,着重于近代数学而较少融入现代数学;从教材内容来说,重理论及其推导而轻知识拓展及其应用.众所周知,数学是自然科学与工程技术的基础,它已渗透到当代社会科学的众多领域,对于培养和开发学生潜能起着重要作用.如何构建当代大学数学知识体系,使学生乐而学之、学以致用,是摆在我们每位大学数学教师面前的艰巨任务.

对于非数学专业的数学课程设置问题,我们对国内外高校及我校的开课现状进行了全面调研.从国外高校情况来看,其课程设置各不相同,没有统一模式,而且他们的非数学专业与数学专业、本科生与研究生的大部分课程是相通的,即非数学专业的学生可修数学专业各层次课程.对于我们来说,这点是没有可参照性的,因为我国高校的各专业、各层次课程基本上是各自为阵,教育管理部门也有相关规定予以制约.但从其最基本的数学课程所涵盖的知识内容来看,则大致相同,主要涵盖:微积分、代数、几何、复分析、概率论、微分方程理论、统计学及数值计算等课程.这些数学课程不但可以给学生以数学、统计、计算等方面知识,而且可以开发学生的逻辑思维能力、空间想象能力及知识应用能力.因此,基于改革与创新的宗旨,我们拟将大学数学的主体知识内容分解为下列课程:《一元分析学》、《多元分析学》、《解析几何与线性代数》、《应用复分析》、《应用概率统计》、《应用偏微分方程》、《科学计算引论》.

鉴于目前非数学专业教材内容不足以满足专业的需求,且部分内容已经老化,因此我们拟在各科教材中适当更换和增加新的内容.如以往的《计算方法》教材仅有多项式插值、线性方程组的古典迭代法、数值积分、标量非线性方程数值解及常微分方程初值问题数值解的内容,而当今各专业用于计算机仿真的数值算法

有广泛需求,其教材内容显然难以满足诸专业需要,本次改革拟增加线性方程组的 Krylov 子空间法、非线性方程组数值解、常微分方程边值问题数值解及偏微分方程数值解等重要内容.此外,在教材整体架构方面,《一元分析学》、《多元分析学》、《解析几何与线性代数》、《应用复分析》将偏重于数学理论以训练和开发学生的逻辑思维能力、空间想象能力;而《应用概率统计》、《应用偏微分方程》、《科学计算引论》则力求理论与应用二者兼顾,以开发学生应用知识的能力.由上可知我们的教学内容改革不仅仅是名称上的变化,也不只是知识的重新排列组合,而是一次由表及里的实质性改革.

本套大学数学系列创新教材是由十余位教学经验丰富、科研基础好的专班教师的编写的,他们对大学数学课程的改革问题进行了深入研究和探讨,制定出了科学的编写计划.本套教材特别注重教学内容各部分知识的系统性和逻辑性,体现其由浅入深、由易到难、由简单到复杂,按照逻辑系统和认知理论相结合的思想组织整套书出版工作.力求突出学生的主体地位,以学生的发展为本,充分体现数学知识的趣味性、时代性、可实践性及有用性.

大学数学教材的改革与创新是一项长期而艰巨的任务,我们愿以本套教材的编写为起点和契机,继续深入开展教学内容的变革,以使我们的教书育人工作充分适应时代发展的要求.

由于编者水平所限,仓促付梓,书中必有疏漏之处,诚望读者指正.

编委会

2010年5月20日

# 前 言

我们在编写本书时，一方面考虑了数学本身抽象的逻辑性，又考虑了数学作为应用工具的实用性。作为非数学专业的数学教材，既要满足教学大纲的要求，也应给出提高学生理论水平的空间，我们综合处理了这些方面的需要。

传统上，解析几何放在了高等数学中处理多元分析之前。但这样的缺点也是显而易见的。实际上，线性代数不论处理的对象还是进一步的推广都与解析几何是密不可分的，它们是有机结合的两个部分。教材内容的重点米在线性代数的基础理论体系上，在保证其内容的严密逻辑性和较完整的自治性的同时，利用几何的直观，处理了代数较为抽象的困难；反过来，又利用代数来处理几何中较为困难的问题。我们也充分注意了学生初学代数的抽象概念较为困难的特点，也考虑了为学生继续学习高等代数的理论作准备，由简入难，使本书从学生熟悉的线性方程组和空间点、线、面的相互位置关系出发，逐步引入处理行列式、矩阵、向量空间等的概念、运算方法和相应的理论推演，突出初等变换和分块处理对矩阵问题的作用，进而解决二次曲面的分类。结合大量的习题，让学生在循序渐进地掌握基本概念和基本理论的基础上，更加得心应手地处理相关代数问题和几何问题。在知识的提高方面，我们预留了让教师和学生选择的内容。对一些较为困难的理论推导，我们亦尽可能在书中给出，以备有兴趣的学生参考以利提高自己的数学水平。另外，在数学记号和术语上与现代数学通行的符号和描述尽可能保持一致，使学生在进一步阅读数学相关文献时，不致产生疏离感。这样的课程和教材对于提高学生的素质，深化教学改革是大有裨益的。

本书适合 40~72 学时的课程，除去加\*号的部分，几何部分 8~12 学时，代数部分 40~60 学时。超出学时的部分，可考虑先讲述第 8 章的主要内容，如果学时充裕，可讲对加\*号的证明和例，以加深学生的理解和处理实际问题的能力。应用部分可针对具体需要增减。

每节后的练习着重于加深对基本知识的理解和运用，每章后的习题则着重于知识体系的深化和提高。习题的设置考虑到考研大纲，因此也适合这方面的需求。希望使用本书的老师和同学提出宝贵的意见和建议。

编 者

2010 年 5 月

# 记号、术语及相关预备知识

$A := B$  (或  $B =: A$ ) 表示以表达式  $B$  来定义  $A$ .

如果从命题  $P_1$  能推出命题  $P_2$  (也叫  $P_1$  蕴涵  $P_2$ ), 则称  $P_1$  为  $P_2$  的充分条件, 记作  $P_1 \Rightarrow P_2$ , 也可叫  $P_2$  是  $P_1$  的必要条件. 如果  $P_1$  是  $P_2$  的充分必要条件, 则称  $P_1$  与  $P_2$  是等价的命题 (也称  $P_2$  当且仅当  $P_1$ ), 记作  $P_1 \Leftrightarrow P_2$  (或  $P_1$  iff  $P_2$ ).

记号“ $\forall$ ”表示“对所有的”, 记号“ $\exists$ ”表示“存在”.

具有某种属性的对象全体我们称它为**集合**, 其中的对象叫做这个集合的元素. 不含任何元素的集合叫做**空集**, 记作  $\emptyset$ . 如果  $a$  是集合  $S$  的元素, 我们记作  $a \in S$ . 如果集合  $T$  的元素也都是集合  $S$  的元素, 则叫  $T$  是  $S$  的**子集**, 记作  $T \subset S$  (或  $S \supset T$ , 也叫做  $S$  包含  $T$ ). 于是,

$$(T \subset S) \text{ iff } (\forall a, a \in T \Rightarrow a \in S)$$

如果  $T \subset S$  并且  $S \supset T$ , 则叫  $S$  与  $T$  相等, 记作  $S = T$ . 于是

$$(T = S) \text{ iff } (\forall a, a \in S \Leftrightarrow a \in T)$$

如果一个集合所含元素的个数是有限的, 则叫这集合是有限集, 否则叫无限集. 集合  $S$  所含元素的个数记作  $\#S$ .

令  $A$  与  $B$  都是集合  $S$  的子集.

- $A$  与  $B$  的**并集**  $A \cup B := \{s \mid s \in A \text{ 或 } s \in B\}$ .
- $A$  与  $B$  的**交集**  $A \cap B := \{s \mid s \in A \text{ 并且 } s \in B\}$ .

设  $A$  与  $B$  是两个集合. 如果对集合  $A$  的每个元素  $a$ , 都有一个法则  $f$ , 使集合  $B$  中有唯一的元素  $b$  与  $a$  对应, 则称  $f$  是集合  $A$  到集合  $B$  的一个**映射**, 记作  $f: A \rightarrow B$ , 这个对应也记作  $f(a) = b$  (或  $a \rightarrow b$ ), 元素  $b$  叫做元素  $a$  的**象**,  $a$  叫做  $b$  的一个**原象**. 对  $A$  的子集  $X$ ,  $f$  关于  $X$  的**象集**  $f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$ ; 对  $B$  的子集  $Y$ ,  $f$  关于  $Y$  的**象源** (原象) 集  $f^{-1}(Y) := \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$ .

- 如果  $\forall s, t \in A, f(s) = f(t) \Rightarrow s = t$ , 则叫  $f$  是**单射**;
- 如果  $\forall b \in B, \exists a \in A$ , 使得  $f(a) = b$ , 即  $f(A) = B$ , 则叫  $f$  是**满射**;
- 如果  $f$  既是单射, 又是满射, 则叫  $f$  是**双射**.
- 将集合  $S$  中每个元素  $s$  对应到自身  $s$  的  $S$  到  $S$  的映射叫做**恒等映射**, 记作  $\text{id}_S$ . 容易看到  $\text{id}_S$  是双射.

• **复合映射**: 令  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$  是两个映射. 那么对每个  $a \in A$ , 通过  $a \rightarrow g(f(a))$  定义的  $A$  到  $C$  映射叫  $f$  与  $g$  的**复合映射**, 记作  $g \circ f$ .

• **可逆映射**: 令  $f$  是  $A$  到  $B$  的映射, 如果存在  $B$  到  $A$  的映射  $g$ , 使得  $g \circ f = \text{id}_A, f \circ g = \text{id}_B$ , 则叫  $f$  是可逆映射,  $g$  叫做  $f$  的**逆** (映射). 可以证明,  $f$  是可逆的当且仅



当 $f$ 是双射, 并且 $f$ 的逆 $g$ 是唯一的, 因此也记作 $f^{-1}$ . 容易看到, 如果 $f(a) = b$ , 那么 $f^{-1}(b) = a$ .

本书中我们以 $\mathbf{R}$ 表示实数集合. 习惯上, 把映射 $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ 叫做定义在 $A$ 上的函数; 集合到自身的映射叫变换.

**运算** 设 $S$ 与 $T$ 是集合. 由 $S$ 与 $T$ 中所有的有序元素对 $(s, t)$  ( $s \in S, t \in T$ ) 构成的集合叫做 $S$ 与 $T$ 的直积集合, 记作 $S \times T$ . 又记 $S^n := \underbrace{S \times \cdots \times S}_n$ . 集合 $S$ 上的一个运算是映射 $p: S^2 \rightarrow S$ , 即集合 $S$ 中的任意一对元素 $(a, b)$ 可通过“运算”得到集合 $S$ 唯一确定的一个元素 $p(a, b)$ . 如整数集合的加法 $p(a, b) = a + b$ , 乘法 $p(a, b) = a \cdot b$ .

### 求和号及乘积号

$\sum_P a$ 及 $\prod_P a$ 分别表示对所有具有属性 $P$ 的数 $a$ 求和及乘积. 例如

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq n \leq 10 \\ n \text{ 是素数}}} n &= 2 + 3 + 5 + 7, \\ \sum_{\substack{1 \leq n \leq 100 \\ n \text{ 是偶数}}} n &= 2 + 4 + 6 + \cdots + 100 = \sum_{i=1}^{50} 2i, \\ \sum_{i=1}^n a_i &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \\ \prod_{k=1}^n k &= 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n = n!, \\ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \end{aligned}$$

注意到数关于加法的结合律与交换律, 有

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}.$$

特别地,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i b_j &= \sum_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{1 \leq j \leq n} a_i b_j \right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \left( \sum_{1 \leq j \leq n} b_j \right) = \left( \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \right) \left( \sum_{1 \leq j \leq n} b_j \right). \end{aligned}$$

**复数及其运算** 设 $i$ 是满足关系 $i^2 = -1$ 的形式符号. 复数具有形式 $z = a + bi$ , 其中 $a$ 和 $b$ 是实数, 分别叫做 $z$ 的实部和虚部,  $i$ 也叫虚单位. 令 $z_1 = a_1 + b_1 i$ ,  $z_2 = a_2 + b_2 i$ .

按如下方式在全体复数集合 $\mathbf{C}$ 上定义加法和乘法:

$$z_1 + z_2 := (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i, \quad z_1 \cdot z_2 := (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

记 $0 = 0 + 0i$ ,  $1 = 1 + 0i$ . 对于加法, 又定义 $-z = (-a) + (-b)i$ ; 对于乘法, 如果 $z \neq 0$ , 定义 $z$ 的倒数 $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i$ . 容易验证:  $z + (-z) = 0 = (-z) + z$ ,  $zz^{-1} = 1 = z^{-1}z$ . 不难验证, 加法和乘法都满足结合律, 交换律, 乘法对加法满足分配律. 进一步, 我们可以定义加法和乘法的逆运算减法和除法:

$$z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2), \quad z_1 / z_2 := z_1 z_2^{-1}.$$

带有这样运算的集合 $\mathbf{C}$ 叫做复数域. 复数 $z = a + bi$ 的复共轭 $\bar{z}$ 定义为 $a - bi$ . 容易验证 $z\bar{z} = a^2 + b^2$ .  $\sqrt{z\bar{z}}$  (记作 $|z|$ ) 叫做 $z$ 的绝对值 (或模). 关于复数共轭, 有

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

**数域** 设 $F$ 是 $\mathbf{C}$ 的子集, 如果满足

(1)  $0, 1 \in F$ ;

(2) 对所有 $a, b \in F$ , 都有 $a - b \in F$ ,  $ab^{-1} \in F (b \neq 0)$ .

则叫 $F$ 是一个数域.

简言之,  $F$ 中任意两个数经过 $+$ 、 $-$ 、 $\times$ 、 $\div$ 都还在 $F$ 中. 不难验证, 有理数集合 $\mathbf{Q}$ , 实数集合 $\mathbf{R}$ , 复数集合 $\mathbf{C}$ 都是数域. 而自然数集合 $\mathbf{N}$ , 整数集合 $\mathbf{Z}$ 都不是数域.

**代数基本定理** 次数至少是1的任一复数系数的多项式在复数域中至少有一个零点 $z$  (即 $z$ 是方程 $p(x) = a_0 x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ 的一个根,  $n \geq 1$ ,  $a_0 \neq 0$ ).

# 目 录

记号、术语及相关预备知识

第 1 章 空间的平面与直线	1
1.1 空间向量及其线性运算	1
1.1.1 向量的加法	1
1.1.2 向量的数乘	1
1.1.3 向量的共线与共面——线性关系	3
1.2 向量的坐标, 坐标系	6
1.3 内积和外积	9
1.3.1 内积的概念	9
1.3.2 直角坐标系	10
1.3.3 内积的特征性质	11
1.4 外积与混和积	14
1.4.1 外积	14
1.4.2 混和积	15
1.4.3 混和积的性质	16
1.4.4 用直角坐标系的坐标计算混和积	16
1.4.5 外积的运算律, 用直角坐标系的坐标计算外积	18
1.5 空间的直线	22
1.5.1 空间直线	22
1.5.2 直线的参数式方程	23
1.5.3 直线的点向式方程	23
1.5.4 直线的两点式方程	23
1.5.5 点到直线的距离	24
1.6 平面	25
1.6.1 平面的一般方程	25
1.6.2 平面的参数式方程	25
1.6.3 平面的点法式方程	26
1.6.4 点到平面的距离	27

1.7 空间直线与平面的位置关系 .....	28
1.7.1 两个平面的位置关系 .....	28
1.7.2 直线与平面的位置关系 .....	30
1.7.3 直线与直线间的位置关系 .....	31
习题 1 .....	33
<b>第 2 章 空间的曲线、曲面 .....</b>	<b>35</b>
2.1 空间曲面, 球面坐标以及柱面坐标 .....	35
2.2 几类特殊曲面 .....	38
2.2.1 旋转面 .....	38
2.2.2 柱面 .....	41
2.2.3 锥面 .....	43
2.2.4 空间曲线在坐标面上的投影及曲面围成的区域 .....	45
2.3 二次曲面 .....	50
2.3.1 椭球面 .....	50
2.3.2 单叶双曲面 .....	51
2.3.3 双叶双曲面 .....	52
*2.3.4 双曲面的渐近锥面 .....	52
2.3.5 椭圆抛物面 .....	53
2.3.6 双曲抛物面 .....	54
*2.3.7 直纹面 .....	55
习题 2 .....	57
<b>第 3 章 向量空间与矩阵运算、行列式 .....</b>	<b>59</b>
3.1 向量与矩阵的概念, 线性运算 .....	59
3.2 行列式的概念与定义 .....	63
3.3 行列式的性质 .....	67
3.4 行列式的按行(列)展开 .....	74
*3.5 拉普拉斯定理 .....	78
3.6 行列式的计算 .....	81
3.7 线性方程组的克拉默定理 .....	85
习题 3 .....	88
<b>第 4 章 向量的线性关系与线性方程组 .....</b>	<b>91</b>
4.1 向量的线性关系 .....	91
4.2 向量组的秩 .....	98
4.3 向量子空间 .....	101
4.4 矩阵的秩与初等变换 .....	103

4.5 线性方程组的解及解的结构	109
4.5.1 齐次线性方程组	109
4.5.2 非齐次线性方程组	114
习题 4	116
<b>第 5 章 矩阵代数</b>	<b>119</b>
5.1 矩阵的乘法	119
5.1.1 定义及例	119
5.1.2 矩阵乘法的特殊性	121
5.1.3 运算律	122
5.2 矩阵的分块及其运算	125
5.2.1 加法	126
5.2.2 数乘	127
5.2.3 乘法	127
5.2.4 转置	127
5.3 可逆矩阵	130
5.4 初等变换、初等矩阵和逆矩阵的计算	135
5.4.1 初等矩阵	135
5.4.2 用初等变换计算矩阵的逆	136
*5.5 简单的投入产出经济模型	143
习题 5	144
<b>第 6 章 特征值与矩阵的相似及对角化</b>	<b>146</b>
6.1 矩阵相似的概念	146
6.2 特征值、特征多项式与特征向量	148
6.2.1 特征多项式	148
6.2.2 代数重数与几何重数	149
6.3 矩阵可对角化的条件	152
6.3.1 主要定理	152
6.3.2 几个例子	153
6.4 进一步的讨论	156
6.4.1 矩阵的相似三角形与特征值	156
*6.4.2 多项式矩阵的特征值	158
*6.4.3 矩阵的零化多项式与可对角化矩阵	159
*6.4.4 矩阵的若尔当标准形简介	160
*6.4.5 生长模型与线性递归	161
*6.5 矩阵序列与级数	163

习题 6	164
<b>第 7 章 实二次型与实对称矩阵的对角化</b>	<b>166</b>
7.1 二次型与对称矩阵	166
7.1.1 对称矩阵	166
7.1.2 二次型与对称矩阵	167
7.1.3 用配方法化二次型为平方和	168
7.1.4 用合同变换化对称矩阵为对角形	171
7.2 正交矩阵及用正交变换化实对称矩阵为对角形	174
7.2.1 内积与向量组的正交化	175
7.2.2 正交矩阵	178
7.2.3 用正交变换化实对称矩阵为对角形	179
7.3 实二次型的惯性定理	183
7.4 正(负)定的实二次型	185
*7.5 平面二次曲线与空间二次曲面的分类	190
7.5.1 平面二次曲线	190
7.5.2 空间二次曲面	193
习题 7	197
<b>*第 8 章 线性空间与线性变换</b>	<b>200</b>
8.1 线性空间	200
8.1.1 线性空间的概念	200
8.1.2 基、坐标与维数, 子空间	202
8.1.3 基变换与坐标变换	203
8.2 线性映射与线性变换及其矩阵	206
8.2.1 基本定理	206
8.2.2 线性映射和线性变换的矩阵	208
8.2.3 线性变换关于不同基的矩阵	210
8.3 欧几里得空间和正交变换	212
8.3.1 内积的概念与基本性质	212
8.3.2 标准正交基	214
8.3.3 正交变换	216
习题 8	218
习题参考答案	220
索引	233

# 第 1 章 空间的平面与直线

在平面解析几何中,通过建立坐标系,把平面上的点和实数偶对应,就可以用代数方法来研究几何,反过来,几何的直观又可用于描述和处理代数问题.

本章把这样的方法推广到空间上去,主要讨论空间的直线与平面.

## 1.1 空间向量及其线性运算

具有大小和方向的量称为向量.例如,物理学中的力、位移、速度和加速度等都是向量.设 $\alpha$ 是一个向量,以 $|\alpha|$ 表示它的长度(也叫做模).两个向量 $\alpha$ 与 $\beta$ 的长度和方向都相同,则称为相等,记作 $\alpha = \beta$ .长度为零的向量叫做零向量,记作 $0$ .零向量是个特殊的向量,它没有方向,也可说有任意方向.与向量 $\alpha$ 大小相同,方向相反的向量叫做 $\alpha$ 的负向量,记作 $-\alpha$ .

空间中以点 $A$ 为起点以 $B$ 为终点的有向线段确定的向量记作 $\overrightarrow{AB}$ .

根据上述向量的定义,如果 $CD$ 与 $AB$ 平行,并且大小方向相同,那么 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ .这种不计起始点的向量通常又叫做自由向量.如图1.1.1所示,在平行四边形 $ABDC$ 中,除了 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ 之外,还有 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ .特别地, $\overrightarrow{AA} = 0$ , $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ .

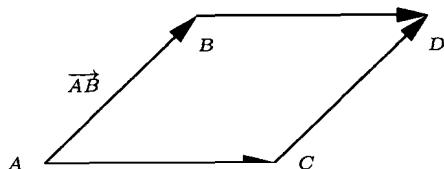


图 1.1.1 向量

根据物理学中有关力的合成等背景,给出如下向量的基本运算.

### 1.1.1 向量的加法

**平行四边形法则和三角形法则** 如图1.1.2所示.向量 $\alpha$ 与 $\beta$ 有相同的起始点,则 $\alpha + \beta$ 是以该点为起始点,以 $\alpha, \beta$ 为边的平行四边形对角线;如果 $\beta$ 的起始点为 $\alpha$ 的终点,则 $\alpha + \beta$ 的起始点为 $\alpha$ 的起始点,终点为 $\beta$ 的终点.

### 1.1.2 向量的数乘

实数 $k$ 与向量 $\alpha$ 的数乘 $k \cdot \alpha$ 仍为向量,它的长度 $|k \cdot \alpha|$ 为 $|k||\alpha|$ ,方向当 $k > 0$ 时与 $\alpha$ 同向,当 $k < 0$ 时与 $\alpha$ 反向,而当 $k = 0$ 时为零向量.

上述的两种运算叫做向量的**线性运算**.由定义,可以直接验证向量的线性运算有如下基本性质(如下 $\alpha, \beta, \gamma$ 是任意向量, $k, l$ 是任意实数).

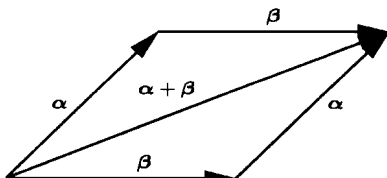
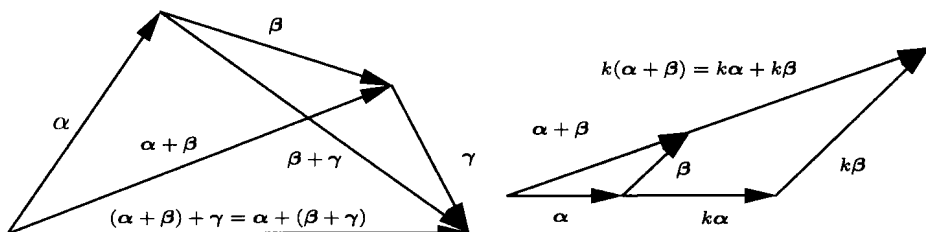


图 1.1.2 向量的加法. 这里可以看到加法满足交换律

- (1) 加法满足结合律:  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$  (图1.1.3);
- (2) 零向量的运算满足:  $\mathbf{0} + \alpha = \alpha = \alpha + \mathbf{0}$ ;
- (3) 负向量的运算满足:  $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0} = (-\alpha) + \alpha$ ;
- (4) 加法满足交换律:  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$  (图1.1.1);
- (5) 数乘的结合律:  $k(l\alpha) = (kl)\alpha$ ;
- (6) 数乘对向量的加法有分配律:  $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$  (图1.1.3);
- (7) 数乘对数的加法满足分配律:  $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$ ;
- (8)  $1 \cdot \alpha = \alpha$ .

图 1.1.3 加法的结合律; 数乘对向量加法的分配律( $k > 0$ )

此外, 利用负向量, 我们定义向量的减法  $\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$ . 如图1.1.4所示.

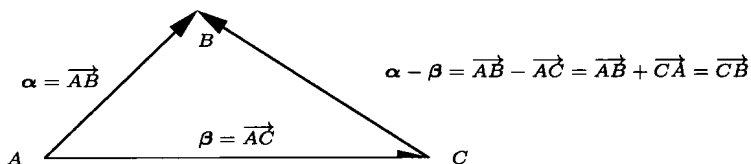


图 1.1.4 向量的减法

注意到  $|k\alpha| = |k||\alpha|$ , 容易证明如下 (留作练习).

**命题 1.1.1** 设  $k$  是实数,  $\alpha$  是向量.

- (1)  $k\alpha = \mathbf{0}$  当且仅当  $k = 0$  或  $\alpha = \mathbf{0}$ ;
- (2)  $(-k)\alpha = -k\alpha = k(-\alpha)$ ,  $(-1)\alpha = -\alpha$ ,  $-(-\alpha) = \alpha$ . □



**例 1.1.1** 证明对角线互相平分的四边形是平行四边形.

**证明** 如图1.1.5所示.

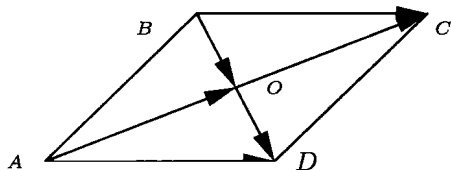


图 1.1.5 对角线互相平分的四边形

四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC$ 与 $BD$ 交于点 $O$ 且互相平分. 有

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BC}$$

从而 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 是相同的向量, 故 $AD$ 与 $BC$ 平行并且相等, 即 $ABCD$ 是平行四边形.

□

### 1.1.3 向量的共线与共面——线性关系

如果几个向量的起始点重合时它们在一条直线上(相应地: 在一个平面上), 则称它们是共线的(相应地: 是共面的). 于是两个向量 $\alpha$ 与 $\beta$ 共线, 它们作为有向线段一定是平行的, 因此也被记作 $\alpha // \beta$ .

显然, 零向量与任何向量共线、共面; 共线的向量一定是共面的. 由数乘的定义, 向量 $\alpha$ 与 $k\alpha$ 共线. 反之, 如果向量 $\alpha \neq 0$ , 并且 $\beta$ 与 $\alpha$ 共线, 设 $k = |\beta|/|\alpha|$ 是 $\beta$ 的长度与 $\alpha$ 的长度之比, 那么

$$\beta = \begin{cases} k\alpha, & \text{当}\beta\text{与}\alpha\text{同向;} \\ -k\alpha, & \text{当}\beta\text{与}\alpha\text{反向.} \end{cases}$$

故存在实数 $c$ , 使得 $\beta = c\alpha$ . 因此有

**命题 1.1.2** 设向量 $\alpha \neq 0$ . 如果向量 $\alpha, \beta$ 共线, 那么存在实数 $c$ 使得 $\beta = c\alpha$ .

□

**推论 1.1.1** 向量 $\alpha$ 与 $\beta$ 共线当且仅当存在不全为零的实数 $k, l$ 使得

$$k\alpha + l\beta = 0.$$

**证明** 若 $\alpha$ 与 $\beta$ 共线, 并且 $\alpha = 0$ , 这时取 $k = 1, l = 0$ , 有 $k\alpha + l\beta = 0$ ; 若 $\alpha \neq 0$ , 则由命题1.1.2,  $\beta = c\alpha$ , 这时取 $k = c, l = -1$ , 也有不全为零的 $k, l$ 使得 $k\alpha + l\beta = 0$ .

反之, 若有不全为零的 $k, l$ 使得 $k\alpha + l\beta = 0$ , 不妨假定 $l \neq 0$ , 那么 $\beta = -\frac{k}{l}\alpha$ , 得知 $\alpha$ 与 $\beta$ 共线. □

类似地, 根据数乘和加法的定义, 向量 $k\alpha + l\beta$ 与向量 $\alpha, \beta$ 共面. 反之, 有