华中科技大学数学创新教材

解析几何与线性代数

◎文志雄 编

科学出版社

www.sciencep.com

华中科技大学数学创新教材

解析几何与线性代数

文志雄 编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是大学数学系列创新教材之一，内容主要包括：空间的平面与直线，空间的曲线、曲面，向量空间与矩阵运算、行列式，向量的线性关系与线性方程组，矩阵代数，特征值与矩阵的相似及对角化，实二次型与实对称矩阵的对角化，线性空间与线性变换.

本书适合高等院校非数学专业相应课程选用，亦可供学习该课程的各专业本科生和研究生参考.

图书在版编目(CIP)数据

解析几何与线性代数/文志雄编 —北京：科学出版社，2010 10

华中科技大学数学创新教材

ISBN 978-7-03-028877-6

Ⅰ. ①解… Ⅱ. ①文… Ⅲ. Ⅲ. ①解析几何－高等学校－教材②线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O182②O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第173888号

责任编辑：房 阳 杨瑰玉/责任校对：李 影

责任印制：彭 超/封面设计：苏 波

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码 100717

http //www sciencep com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社编务公司排版制作

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年9月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)

2010年9月第一次印刷 印张：15 3/4

印数：1—3 000 字数：297 000

定价：27.00元

《华中科技大学数学创新教材》

丛书编委会

丛 书 序

随着教学实践的深入进行，现行大学数学教育体系已呈现诸多弊病. 一方面，一些学生反映：数学太抽象，学习数学太枯燥，学完之后仅记得几个数学符号和概念，难以做到学以致用；另一方面，一些高年级本科生和研究生反映：本科阶段所学的数学远远不能满足其专业需求，学懂了的数学用不上，要用的数学没学过. 这一切都说明，现行的“教”与“学”、“学”与“用”严重脱节，现行的数学教学已远远不能满足现代教育及高速发展的科学技术的需要，改革与创新势在必行.

我国的大学数学教育长期以来沿用了前苏联的模式：从课程设置来说，着重于近代数学而较少融入现代数学；从教材内容来说，重理论及其推导而轻知识拓展及其应用. 众所周知，数学是自然科学与工程技术的基础，它已渗透到当代社会科学的众多领域，对于培养和开发学生潜能起着重要作用. 如何构建当代大学数学知识体系，使学生乐而学之、学以致用，是摆在我们每位大学数学教师面前的艰巨任务.

对于非数学专业的数学课程设置问题，我们对国内外高校及我校的开课现状进行了全面调研. 从国外高校情况来看，其课程设置各不相同，没有统一模式，而且他们的非数学专业与数学专业、本科生与研究生的大部分课程是相通的，即非数学专业的学生可修数学专业各层次课程. 对于我们来说，这点是没有可参照性的，因为我国高校的各专业、各层次课程基本上是各自为阵，教育管理部门也有相关规定予以制约. 但从其最基本的数学课程所涵盖的知识内容来看，则大致相同，主要涵盖：微积分、代数、几何、复分析、概率论、微分方程理论、统计学及数值计算等课程. 这些数学课程不但可以给学生以数学、统计、计算等方面知识，而且可以开发学生的逻辑思维能力、空间想象能力及知识应用能力. 因此，基于改革与创新的宗旨，我们拟将大学数学的主体知识内容分解为下列课程：《一元分析学》、《多元分析学》、《解析几何与线性代数》、《应用复分析》、《应用概率统计》、《应用偏微分方程》、《科学计算引论》.

鉴于目前非数学专业教材内容不足以满足专业的需求，且部分内容已经老化，因此我们拟在各科教材中适当更换和增加新的内容. 如以往的《计算方法》教材仅有多项式插值、线性方程组的古典迭代法、数值积分、标量非线性方程数值解及常微分方程初值问题数值解的内容，而当今各专业用于计算机仿真的数值算法

有广泛需求，其教材内容显然难以满足诸专业需要，本次改革拟增加线性方程组的 Krylov 子空间法、非线性方程组数值解、常微分方程边值问题数值解及偏微分方程数值解等重要内容. 此外，在教材整体架构方面，《一元分析学》、《多元分析学》、《解析几何与线性代数》、《应用复分析》将偏重于数学理论以训练和开发学生的逻辑思维能力、空间想象能力；而《应用概率统计》、《应用偏微分方程》、《科学计算引论》则力求理论与应用二者兼顾，以开发学生应用知识的能力. 由上可知我们的教学内容改革不仅仅是名称上的变化，也不只是知识的重新排列组合，而是一次由表及里的实质性改革.

本套大学数学系列创新教材是由十余位教学经验丰富、科研基础好的专班教师的编写的，他们对大学数学课程的改革问题进行了深入研究和探讨，制定出了科学的编写计划. 本套教材特别注重教学内容各部分知识的系统性和逻辑性，体现其由浅入深、由易到难、由简单到复杂，按照逻辑系统和认知理论相结合的思想组织整套书出版工作.力求突出学生的主体地位，以学生的发展为本，充分体现数学知识的趣味性、时代性、可实践性及有用性.

大学数学教材的改革与创新是一项长期而艰巨的任务，我们愿以本套教材的编写为起点和契机，继续深入开展教学内容的变革，以使我们的教书育人工作充分适应时代发展的要求.

由于编者水平所限, 仓促付梓, 书中必有疏漏之处, 诚望读者指正.

编委会

2010 年 5 月 20 日

前　言

我们在编写本书时，一方面考虑了数学本身抽象的逻辑性，又考虑了数学作为应用工具的实用性. 作为非数学专业的数学教材，既要满足教学大纲的要求，也应给出提高学生理论水平的空间，我们综合处理了这些方面的需要.

传统上，解析几何放在了高等数学中处理多元分析之前. 但这样的缺点也是显而易见的. 实际上，线性代数不论处理的对象还是进一步的推广都与解析几何是密不可分的，它们是有机结合的两个部分. 教材内容的重点米在线性代数的基础理论体系上，在保证其内容的严密逻辑性和较完整的自洽性的同时，利用几何的直观，处理了代数较为抽象的困难；反过来，又利用代数来处理几何中较为困难的问题. 我们也充分注意了学生初学代数的抽象概念较为困难的特点，也考虑了为学生继续学习高等代数的理论作准备，由简入难，使本书从学生熟悉的线性方程组和空间点、线、面的相互位置关系出发，逐步引入处理行列式、矩阵、向量空间等的概念、运算方法和相应的理论推演，突出初等变换和分块处理对矩阵问题的作用，进而解决二次曲面的分类. 结合大量的习题，让学生在循序渐进地掌握基本概念和基本理论的基础上，更加得心应手地处理相关代数问题和几何问题. 在知识的提高方面,我们预留了让教师和学生选择的内容. 对一些较为困难的理论推导，我们亦尽可能在书中给出，以备有兴趣的学生参考以利提高自己的数学水平. 另外，在数学记号和术语上与现代数学通行的符号和描述尽可能保持一致，使学生在进一步阅读数学相关文献时，不致产生疏离感. 这样的课程和教材对于提高学生的素质，深化教学改革是大有裨益的.

本书适合 40 ~ 72 学时的课程，除去加*号的部分，几何部分 8 ~ 12 学时，代数部分 40 ~ 60 学时. 超出学时的部分，可考虑先讲述第 8 章的主要内容，如果学时充裕，可讲对加*号的证明和例，以加深学生的理解和处理实际问题的能力. 应用部分可针对具体需要增减.

每节后的练习着重于加深对基本知识的理解和运用，每章后的习题则着重于知识体系的深化和提高. 习题的设置考虑到考研大纲，因此也适合这方面的需求.

希望使用本书的老师和同学提出宝贵的意见和建议.

编　者

2010 年 5 月

记号、术语及相关预备知识

$A := B$（或$B =: A$）表示以表达式B来定义A.

如果从命题P_1能推出命题P_2（也叫P_1蕴涵P_2），则称P_1为P_2的充分条件，记作$P_1 \Rightarrow P_2$，也可叫P_2是P_1的必要条件. 如果P_1是P_2的充分必要条件，则称P_1与P_2是等价的命题（也称P_2当且仅当P_1），记作$P_1 \Leftrightarrow P_2$（或P_1 iff P_2）.

记号“$\forall$”表示“对所有的”，记号“$\exists$”表示“存在”.

具有某种属性的对象全体我们称它为**集合**，其中的对象叫做这个 集合的**元素**. 不含任何元素的集合叫做**空集**，记作$\varnothing$. 如果a 是集合S的元素，我们记作$a \in S$. 如果集合T的元素也都是集合S的元素，则叫T是S的**子集**，记作$T \subset S$（或$S \supset T$，也叫做S包含T）. 于是，

$$(T \subset S) \text{ iff } (\forall a,\ a \in T \Rightarrow a \in S)$$

如果$T \subset S$并且$S \supset T$，则叫S与T相等，记作$S = T$. 于是

$$(T = S) \text{ iff } (\forall a,\ a \in S \Leftrightarrow a \in T)$$

如果一个集合所含元素的个数是有限的，则叫这集合是有限集，否则叫无限集. 集合S所含元素的个数记作$\#S$.

令A与B都是集合S的子集.

- A与B的**并集**$A \bigcup B := \{s \mid s \in A$或$s \in B\}$.
- A与B的**交集**$A \bigcap B := \{s \mid s \in A$并且$s \in B\}$.

设A与B是两个集合. 如果对集合A的每个元素a，都有一个法则f，使集合B中有唯一的元素b与a对应，则称f是集合A到集合B的一个**映射**，记作$f\colon A \to B$，这个对应也记作$f(a) = b$（或$a \to b$），元素b叫做元素a的**象**，a叫做b的一个**原象**. 对A的子集X，f关于X的象集$f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$；对$B$的子集$Y$，$f$关于$Y$的象源（原象）集$f^{-1}(Y) .= \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$.

- 如果$\forall s, t \in A$，$f(s) = f(t) \Rightarrow s = t$，则叫$f$是**单射**；
- 如果$\forall b \in B$，$\exists a \in A$，使得$f(a) = b$，即$f(A) = B$，则叫f是**满射**；
- 如果f既是单射，又是满射，则叫f是**双射**.
- 将集合S中每个元素s对应到自身s的S到S的映射叫做 **恒等映射**，记作id_S. 容易看到id_S是双射.
- **复合映射**：令$f\cdot A \to B$，$g\colon B \to C$是两个映射. 那么对每个$a \in A$，通过$a \to g(f(a))$ 定义的A到C映射叫f与g的复合映射，记作$g \circ f$.
- **可逆映射**：令f是A到B的映射，如果存在B到A的映射g，使得$g \circ f = \mathrm{id}_A$，$f \circ g = \mathrm{id}_B$，则叫$f$是可逆映射，$g$叫做$f$**逆**（映射）. 可以证明，$f$是可逆的当且仅

当f是双射，并且f的逆g是唯一的，因此也记作f^{-1}. 容易看到，如果$f(a)=b$，那么$f^{-1}(b)=a$.

本书中我们以$\mathbf{R}$表示实数集合. 习惯上，把映射$f\colon A\to\mathbf{R}$叫做定义在A上的函数；集合到自身的映射叫变换.

运算 设S与T是集合. 由S与T中所有的有序元素对(s,t)（$s\in S$, $t\in T$）构成的集合叫做S与T的直积集合，记作$S\times T$. 又记$S^n:=\underbrace{S\times\cdots\times S}_{n个}$. 集合$S$上的一个运算是映射$p\colon S^2\to S$，即集合$S$中的任意一对元素$(a,b)$可通过“运算”得到集合$S$唯一确定的一个元素$p(a,b)$. 如整数集合的加法$p(a,b)=a+b$，乘法$p(a,b)=a\cdot b$.

求和号及乘积号

$\sum\limits_P a$及$\prod\limits_P a$分别表示对所有具有属性P的数a求和及乘积. 例如

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant 10\\ n是素数}} n=2+3+5+7,$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant 100\\ n是偶数}} n=2+4+6+\cdots+100=\sum_{i=1}^{50}2i,$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

$$\prod_{k=1}^{n}k=1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n=n!,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots.$$

注意到数关于加法的结合律与交换律，有

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} a_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\Big)=\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\Big)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}.$$

特别地，

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_ib_j&=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant n}a_ib_j\Big)\\&=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}a_i\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant n}b_j\Big)=\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant n}a_i\Big)\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant n}b_j\Big).\end{aligned}$$

复数及其运算 设i是满足关系$\mathrm{i}^2=-1$的形式符号. 复数具有形式$z=a+b\mathrm{i}$，其中a和b是实数，分别叫做z的实部和虚部，i也叫虚单位. 令$z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$，$z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$.

按如下方式在全体复数集合$\mathbf{C}$上定义加法和乘法：

$$z_1 + z_2 := (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathrm{i}, \quad z_1 \cdot z_2 := (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\mathrm{i}.$$

记$0 = 0+0\mathrm{i}$，$1 = 1+0\mathrm{i}$. 对于加法，又定义$-z = (-a)+(-b)\mathrm{i}$；对于乘法，如果$z \neq 0$，定义z的倒数$z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+b\mathrm{i}} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{-b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$. 容易验证：$z + (-z) = 0 = (-z) + z$，$zz^{-1} = 1 = z^{-1}z$. 不难验证，加法和乘法都满足结合律，交换律，乘法对加法满足分配律. 进一步，我们可以定义加法和乘法的逆运算减法和除法：

$$z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2), \quad z_1/z_2 := z_1z_2^{-1}.$$

带有这样运算的集合$\mathbf{C}$叫做复数域. 复数$z = a + b\mathrm{i}$的复共轭$\bar{z}$定义为$a - b\mathrm{i}$. 容易验证$z\bar{z} = a^2 + b^2$. $\sqrt{z\bar{z}}$（记作$|z|$）叫做z的绝对值（或模）. 关于复数共轭，有

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2.$$

数域 设F是$\mathbf{C}$的子集，如果满足

(1) $0, 1 \in F$;

(2) 对所有$a, b \in F$，都有$a - b \in F$，$ab^{-1} \in F (b \neq 0)$.

则叫F是一个数域.

简言之，F中任意两个数经过$+$、$-$、$\times$、$\div$都还在F中. 不难验证，有理数集合$\mathbf{Q}$，实数集合$\mathbf{R}$，复数集合$\mathbf{C}$都是数域. 而自然数集合$\mathbf{N}$，整数集合$\mathbf{Z}$都不是数域.

代数基本定理 次数至少是1的任一复数系数的多项式在复数域中至少有一个零点z（即z是方程$p(x) = a_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$的一个根，$n \geqslant 1$，$a_0 \neq 0$）.

目　　录

第 1 章　空间的平面与直线

在平面解析几何中，通过建立坐标系，把平面上的点和实数偶对应，就可以用代数方法来研究几何，反过来，几何的直观又可用来描述和处理代数问题.

本章把这样的方法推广到空间上去，主要讨论空间的直线与平面.

1.1　空间向量及其线性运算

具有**大小和方向**的量称为向量. 例如,物理学中的力、位移、速度和加速度等都是向量. 设$\boldsymbol{\alpha}$是一个向量，以$|\boldsymbol{\alpha}|$ 表示它的长度（也叫做模）. 两个向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的长度和方向都相同，则称为相等，记作$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$. 长度为零的向量叫做零向量，记作$\mathbf{0}$. 零向量是个特殊的向量，它没有方向，也可说有任何方向. 与向量$\boldsymbol{\alpha}$大小相同，方向相反的向量叫做$\boldsymbol{\alpha}$的负向量，记作$-\boldsymbol{\alpha}$.

空间中以点A为起点以B为终点的有向线段确定的向量记作$\overrightarrow{AB}$.

根据上述向量的定义，如果CD与AB平行，并且大小方向相同，那么$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$. 这种不计起始点的向量通常又叫做自由向量. 如图1.1.1所示，在平行四边形$ABDC$中，除了$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$之外，还有$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$. 特别地，$\overrightarrow{AA}=\mathbf{0}$，$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

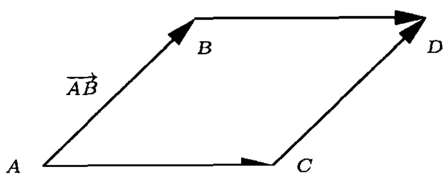

图 1.1.1　向量

根据物理学中有关力的合成等背景，给出如下向量的基本运算.

1.1.1　向量的加法

平行四边形法则和三角形法则　如图1.1.2所示. 向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$有相同的起始点，则$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$是以该点为起始点，以$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$为边的平行四边形对角线；如果$\boldsymbol{\beta}$的起始点为$\boldsymbol{\alpha}$的终点，则$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$的起始点为$\boldsymbol{\alpha}$的起始点，终点为$\boldsymbol{\beta}$的终点.

1.1.2　向量的数乘

实数k与向量$\boldsymbol{\alpha}$的数乘$k\cdot\boldsymbol{\alpha}$仍为向量，它的长度$|k\cdot\boldsymbol{\alpha}|$为$|k||\boldsymbol{\alpha}|$，方向当$k>0$时与$\boldsymbol{\alpha}$同向，当$k<0$时与$\boldsymbol{\alpha}$反向，而当$k=0$时为零向量.

上述的两种运算叫做向量的**线性运算**. 由定义，可以直接验证向量的线性运算有如下基本性质（如下$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$是任意向量，k, l是任意实数）.

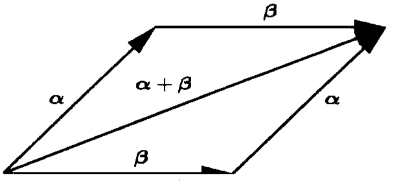

图 1.1.2 向量的加法. 这里可以看到加法满足交换律

(1) 加法满足结合律：$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$（图1.1.3）;
(2) 零向量的运算满足：$\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}$;
(3) 负向量的运算满足：$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}=(-\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha}$;
(4) 加法满足交换律：$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$（图1.1.1）;
(5) 数乘的结合律：$k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$;
(6) 数乘对向量的加法有分配律：$k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$（图1.1.3）;
(7) 数乘对数的加法满足分配律：$(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$;
(8) $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

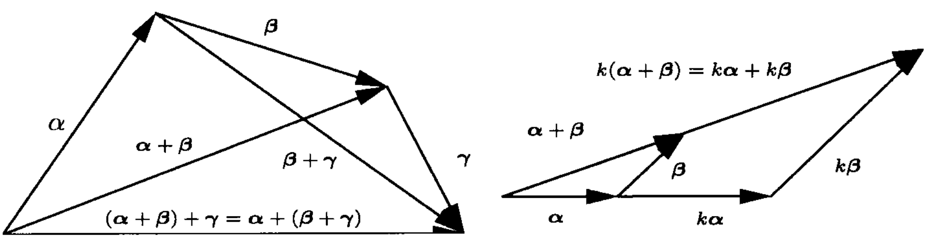

图 1.1.3 加法的结合律；数乘对向量加法的分配律($k>0$)

此外，利用负向量，我们定义向量的减法$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}:=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$. 如图1.1.4所示.

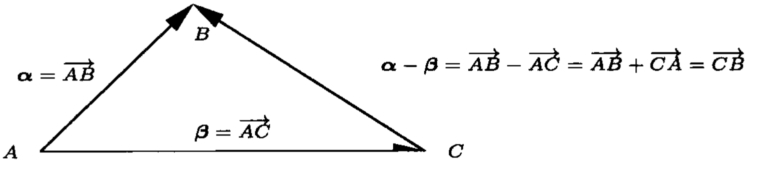

图 1.1.4 向量的减法

注意到$|k\boldsymbol{\alpha}|=|k||\boldsymbol{\alpha}|$，容易证明如下（留作练习）.

命题 1.1.1 设k是实数，$\boldsymbol{\alpha}$是向量.
(1) $k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$当且仅当$k=0$或$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$;
(2) $(-k)\boldsymbol{\alpha}=-k\boldsymbol{\alpha}=k(-\boldsymbol{\alpha})$, $(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$, $-(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}$. □

例 1.1.1 证明对角形互相平分的四边形是平行四边形.

证明 如图1.1.5所示.

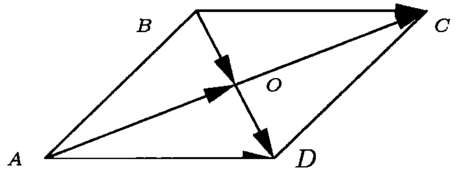

图 1.1.5 对角线互相平分的四边形

四边形$ABCD$的对角线AC与BD交与点O且互相平分. 有

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BC}$$

从而$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{BC}$是相同的向量，故AD与BC平行并且相等，即$ABCD$是平行四边形. □

1.1.3 向量的共线与共面——线性关系

如果几个向量的起始点重合时它们在一条直线上（相应地：在一个平面上），则称它们是共线的（相应地：是共面的）. 于是两个向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$共线，它们作为有向线段一定是平行的，因此也被记作$\boldsymbol{\alpha}//\boldsymbol{\beta}$.

显然，零向量与任何向量共线、共面；共线的向量一定是共面的. 由数乘的定义，向量$\boldsymbol{\alpha}$ 与$k\boldsymbol{\alpha}$共线. 反之，如果向量$\boldsymbol{\alpha}\neq 0$，并且$\boldsymbol{\beta}$与$\boldsymbol{\alpha}$共线，设$k=|\boldsymbol{\beta}|/|\boldsymbol{\alpha}|$ 是$\boldsymbol{\beta}$的长度与$\boldsymbol{\alpha}$的长度之比，那么

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{cases} k\boldsymbol{\alpha}, & \text{当}\boldsymbol{\beta}\text{与}\boldsymbol{\alpha}\text{同向;}\\ -k\boldsymbol{\alpha}, & \text{当}\boldsymbol{\beta}\text{与}\boldsymbol{\alpha}\text{反向.}\end{cases}$$

故存在实数c，使得$\boldsymbol{\beta}=c\boldsymbol{\alpha}$. 因此有

命题 1.1.2 设向量$\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$. 如果向量$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$共线，那么存在实数$c$使得$\boldsymbol{\beta}=c\boldsymbol{\alpha}$. □

推论 1.1.1 向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$共线当且仅当存在不全为零的实数k，l使得

$$k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}.$$

证明 若$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$共线，并且$\boldsymbol{\alpha}=0$，这时取$k=1$，$l=0$，有$k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$；若$\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，则由命题1.1.2，$\boldsymbol{\beta}=c\boldsymbol{\alpha}$，这时取$k=c$，$l=-1$，也有不全为零的$k$，$l$使得$k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.

反之，若有不全为零的k，l使得$k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，不妨假定$l\neq 0$，那么$\boldsymbol{\beta}=-\dfrac{k}{l}\boldsymbol{\alpha}$，得知$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$共线. □

类似地，根据数乘和加法的定义，向量$k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}$与向量$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$共面. 反之，有