全国硕士研究生入学考试辅导丛书

2011

全国硕士研究生入学考试
历年真题精解
数学一

全国硕士研究生入学考试命题研究组　编

- 原命题组成员、阅卷组组长亲自编写，融合北京大学、清华大学权威讯息
- 深度梳理命题轨迹，解析详尽、规避误区，培养最佳解题思路
- 以题型训练为核心，全面展现题型变换
- 凸显历年试题精华，明示命题原则与规律，把握命题脉搏
- 注重实战，讲求技巧，切实提升综合应试能力

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

全国硕士研究生入学考试辅导丛书

全国硕士研究生入学考试历年真题精解

数　学　一

全国硕士研究生入学考试命题研究组　编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学考试历年真题精解. 数学. 1/全国硕士研究生入学考试命题研究组编. —2版. —杭州：浙江大学出版社，2009.4(2010.3重印)
(全国硕士研究生入学考试辅导丛书)
ISBN 978-7-308-06678-5

Ⅰ. 全… Ⅱ. 全… Ⅲ. 高等数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ. G643-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第043165号

全国硕士研究生入学考试历年真题精解·数学一

全国硕士研究生入学考试命题研究组 编

丛书策划 樊晓燕 杨晓鸣
责任编辑 杜希武
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路148号 邮政编码310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排 版 杭州大漠照排印刷有限公司
印 刷 杭州浙大同力教育彩印有限公司
开 本 889mm×1194mm 1/16
印 张 13.5
字 数 345千
版 印 次 2010年3月第2版 2010年3月第2次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-06678-5
定 价 29.00元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88925591

第二版前言

全国报考 2010 年硕士研究生入学考试人数达到了 140 万人，较 2009 年增加 13%。参加人数的增多，录入率的有限，彰显了竞争的激烈程度。为了指导参加 2011 年全国硕士研究生入学统一考试的广大考生数学考试的复习，把握历年命题脉搏，了解出题动态，我们组织部分多年来参加考试大纲制订和修订工作及参加考前辅导的教授、专家在第一版的基础上，精心修订了这本《2011 年全国硕士研究生入学统一考试历年试题精解　数学一》，以供广大考生复习使用。

为了准备新的研究生入学考试，我们应当认真分析研究历届试题，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考题的特点以及命题的思路和规律。历年的考题是标准的复习题。自从实行研究生入学考试以来，也时有真题重现的现象发生，如 2006 年数学一的第一大题第(3)小题与 1993 年数学一第四大题、2003 年数学一的第一大题第(3)小题与 1993 年数学一的第一大题第(3)小题、2003 年数学一的第一大题第(5)小题与 1996 年数学三的第一大题第(5)小题、2003 年数学一的第三大题与 2001 年数学三的第六大题、2003 年数学四的第四大题与 2001 年数学一的第五大题是基本雷同的。英语与政治也有真题重复出现的情况，2003 年英语第 36 题与 1996 年英语第 43 题，2003 年英语第 37 题与 1995 年英语第 34 题，2003 年英语第 26 题与 1995 年英语第 21 题，2003 年英语第 29 题与 1996 年英语第 42 题，2003 年英语第 24 题与 1997 年英语第 42 题，1996 年英语第 46 题与 1995 年英语第 6 题等等，都是非常相似的。2003 年政治理论第 21 题与 2000 年文科政治第 31 题和 1993 年理科政治第 6 题，2003 年政治理论第 31 题与 1993 年理科政治第 32 题，2003 年政治理论第 36 题与 1995 年文科政治第 28 题和 1994 年文科政治第 29 题等等，都是相同或非常相似的。所以，对往年真题的研究是最有帮助的。循着命题人的思路，我们就可以把握考试的脉搏，明确考试的重点和难点所在。

本书汇集了1990年至2010年历届全国硕士研究生入学统一考试数学试题，这些试题是考研同学了解、分析和研究全国硕士研究生入学考试最直接、最宝贵的第一手资料，其中的每一道试题，既反映了考研数学考试大纲对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势。因此，对照考试大纲分析、研究这些试题，考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌，而且可以方便地了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出各部分内容的重点、难点，以及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，从而从容应考，轻取高分。

本书在对历年考研数学试题逐题解析的基础上，每题都给出了注释，不仅对每题所考的知识点和难点进行了分析，而且对试题的类型、每一种类型试题的解法进行了归纳总结，使考研同学能够举一反三，触类旁通。

本书对客观题尤其给予了高度的重视，总结了客观题的解题方法和技巧，同时对很多客观题给出了多种巧妙的解法，目的是让读者在解决客观题这个问题上有新的突破。

本书是考研应试者的良师益友，也是各类院校的学生自学数学、提高数学水平和教师进行教学辅导的一本极有价值的参考书。

由于时间仓促，书中疏漏之处在所难免，诚请专家和读者指正。

编者　于清华园

目　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第三部分　概率论与数理统计

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限、连续

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

考点 1.1　函数的概念及其特征

1. (1990 年试题) 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则函数 $f[f(x)]=$ ________.

【考点提示】 复合函数的定义.

【解题分析】 由 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ 知 $|f(x)|\leqslant 1$. 因此有 $f[f(x)]=1$.

故应填 1.

2. (1999 年试题) 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则 (　　)

A. 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必是偶函数

B. 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必是奇函数

C. 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必是周期函数

D. 当 $f(x)$ 是单调函数时，$F(x)$ 必是单调增函数

【考点提示】 原函数性质.

【解题分析】 首先将原函数 $F(x)$ 表示成 $f(x)$ 变上限的定积分，即

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C,$$

则 $F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C$，再令 $t=-u$，则 $F(-x)=-\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u+C$.

如果 $f(x)$ 是奇函数，则 $F(-x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+C=F(x)$，因此 $F(x)$ 是偶函数，从而知 A 是正确的.

下面分析 B,C,D 的错误之处.

若 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(-x)=-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+C$，不能保证 $F(-x)=F(x)$，B错误；关于 C,D，可通过举一些简单反例来说明，如设 $f(x)=\sin x+1$，则 $F(x)=x-\cos x+C$，并非周期函数，因此排除 C；又设 $f(x)=x$，则 $F(x)=\frac{1}{2}x^2+C$，并非单调增函数，D 也排除.

综上，选 A.

3.（2005 年试题）设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，“$M\Leftrightarrow N$”表示“M 的充分必要条件是 N”，则必有　　　　（　　）

A. $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数

B. $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

C. $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数

D. $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

【考点提示】 原函数，偶函数，奇函数.

【解题分析】 由题意可知

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

$f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数 $\Rightarrow f(x)$ 的全体原函数为偶函数.

$F(x)$ 为偶函数 $\Rightarrow F'(x)=f(x)$ 为奇函数，所以选 A.

考点 1.2　极限的概念与性质

一、利用左、右极限求函数极限

1.（1992 年试题）当 $x\to 1$ 时，函数 $\frac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限　　　　（　　）

A. 等于 2　　　　B. 等于 0

C. 为 ∞　　　　D. 不存在但不为 ∞

【考点提示】 极限.

【解题分析】 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$，而 $\lim\limits_{x\to 1^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=0$，$\lim\limits_{x\to 1^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，故有

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=0,\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=+\infty.$$

可见，$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在但不为 ∞，所以选 D.

2.（2000 年试题）求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

【考点提示】 极限.

【解题分析】 原式中两项单独的极限都不存在，但它们的左右极限都存在，只是不相等，因此应分别求原式的左极限与右极限，因为

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1.$$

所以原极限为 1.

二、求未定式$\left(\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,1^\infty,0^0,\infty^0\right)$的极限

1.（1990 年试题）设 a 为非零常数，则$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$ ________.

【考点提示】 指数函数求极限.

【解题分析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\dfrac{2a}{x-a}\right)\right]^{\frac{x-a}{2a}}\right\}^{\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}$.

故应填 e^{2a}.

2.（1991 年试题）求$\lim\limits_{x\to 0^-}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

【考点提示】 求极限.

【解题分析】 $\lim\limits_{x\to 0^-}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[1+\cos\sqrt{x}-1\right]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\pi(\cos\sqrt{x}-1)}{x}}=e^{\pi\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\cos\sqrt{x}-1)}{x}}=e^{-\frac{\pi}{2}}$.

3.（1992 年试题）求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

【考点提示】 等价无穷小，运用洛必达法则.

【解题分析】 分母有理化：

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-\sin x-1)(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{x^2}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{1}=1.$$

4.（1993 年试题）求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

【考点提示】 求极限.

【解题分析】 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x\xLeftrightarrow{\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to 0}(\sin 2t+\cos t)^{\frac{1}{t}}$

$$=\lim_{t\to 0}\{[1+(\sin 2t+\cos t-1)]^{\frac{1}{\sin 2t+\cos t-1}}\}^{\frac{\sin 2t+\cos t-1}{t}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 2t+\cos t-1}{t}}=e^2.$$

5.（1994 年试题）$\lim\limits_{x\to 0}$ 明扼要 $\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ ________.

【考点提示】 分式函数、无穷小量的等价代换、洛必达法则.

【解题分析】 $\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\cos x\cdot\dfrac{x-\sin x}{x\sin^2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

故应填$\dfrac{1}{6}$.

6.（1995 年试题）$\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ ________.

【考点提示】 第二类重要极限.

【解题分析】

$$\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim_{x\to0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\frac{6x}{\sin x}}=e^6.$$

故应填 e^6.

7.（1996 年试题）设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$,则 $a=$ ________.

【考点提示】 第二类重要极限.

【解题分析】 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3ax}{x-a}}=e^{3a}$,于是有 $e^{3a}=8$,解得 $a=\ln2$.

8.（1997 年试题）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ ________.

【考点提示】 等价无穷小,洛必达法则.

【解题分析】 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x}{2\ln(1+x)}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\cos\dfrac{1}{x}}{2\ln(1+x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3\cos x}{\dfrac{2}{1+x}}+\lim_{x\to0}\frac{x\cos\dfrac{1}{x}}{2}\frac{x}{\ln(1+x)}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to0}x\cos\frac{1}{x}=\frac{3}{2}.$$

9.（1998 年试题）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ ________.

【考点提示】 等价无穷小,洛必达法则.

【解题分析】 求极限有多种方法,应在分析表达式的基础上灵活选取,本题最直接的方法是采用洛必达法则,即

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{4}=-\frac{1}{4}.$$

其次，还可将原式变形为

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2-4}{4x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+1-x+2\sqrt{1-x^2}-4}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(-x^2)}{2x^2}=-\frac{1}{4}.$$

除此之外，将原表达式中的 $\sqrt{1+x}$ 和 $\sqrt{1-x}$ 进行麦克劳林级数展开，也可得出同样结果，即

$$\sqrt{1-x}=1+\frac{1}{2}x+\left(-\frac{1}{8}\right)x^2+o(x^2),\ \sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x+\left(-\frac{1}{8}\right)x^2+o(x^2),$$

则

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{4}.$$

10.（1999 年试题）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=$ ________.

【考点提示】 洛必达法则和等价无穷小.

【解题分析】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\tan x-x^2}{x^3\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}\cdot\frac{x}{\tan x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\sec^2 x=\frac{1}{3}.$$

11.（2003 年试题）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$ ________.

【考点提示】 极限，等价无穷小.

【解题分析】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}\right\}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

12.（2006 年试题）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$ ________.

【考点提示】 求极限.

【解题分析】 当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，利用等价无穷小替换得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{\frac{1}{2}x^2}=2.$$

13.（2008 年试题）求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

【考点提示】 求极限.

【解题分析】 这是"$\dfrac{0}{0}$"型不定式.

$$\lim_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\cos x\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)\cos x}{6x}$$

$$=\lim_{x\to0}\cos x\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$$

14.（2010 年试题）极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x$ 等于 （　　）

A. 1　　B. e　　C. e^{a-b}　　D. e^{b-a}

【考点提示】 函数的极限

【解题分析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1\right]}$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{(a-b)x^2-abx}{(x-a)(x+b)}}=e^{a-b}，故正确答案为 C.$$

15.（2010 年试题）（Ⅰ）比较 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t$ 与 $\int_0^1|\ln t|t^n\mathrm{d}t(n=1,2,\cdots)$ 的大小，说明理由.

（Ⅱ）设 $u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^x\mathrm{d}t(n=1,2,\ldots)$，求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}u_n$.

【考点提示】 函数的极限.

【解题分析】（Ⅰ）因为当 $0<x<1$ 时，$0<\ln(1+x)<x<1$.

所以当 $0<t<1$ 时，$0<\ln(1+t)<t<1$，故 $[\ln(1+t)]^n<t^n$，进而 $|\ln t|[\ln(1+t)]^n<|\ln t|t^n$ 根据定积分的性质可知，$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t<\int_0^1|\ln t|t^n\mathrm{d}t$.

（Ⅱ）因为 $\int_0^1|\ln t|t^n\mathrm{d}t=-\int_0^1\ln t\cdot t^n\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{n+1}\int_0^1\ln t\mathrm{d}(t^{n+1})=\dfrac{1}{n+1}\int_0^1t^n\mathrm{d}t=\dfrac{1}{(n+1)^2}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1|\ln t|t^n\mathrm{d}t=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}=0$.

由（Ⅰ）知，$0<u_n<\int_0^1|\ln t|t^n\mathrm{d}t$，根据夹逼准则可得 $0\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}u_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1|\ln t|t^n\mathrm{d}t=0$，由此可知，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

考点 1.3　无穷小量的比较

1.（1991 年试题）已知当 $x\to0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$________.

【考点提示】 无穷小量的比较.

【解题分析】 由题设有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=1$，而

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}(1+ax^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2ax}{-\sin x}$$

$$=-\frac{2a}{3}\lim_{x\to 0}(1+ax^2)^{-\frac{2}{3}}\frac{x}{\sin x}=-\frac{2a}{3},$$

即有 $-\frac{2a}{3}=1$，故 $a=-\frac{3}{2}$.

2.（1996 年试题）设 $f(x)$ 有连续的导数，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，$F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t$，且当 $x\to 0$ 时，$F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 k 等于　　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【考点提示】　无穷小量的比较.

【解题分析】　因为

$$F'(x)=\left[x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x t^2f(t)\mathrm{d}t\right]'$$

$$=2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^2f(x)-x^2f(x)=2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

又根据题设 $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小，且 $f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，于是有

$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)}{(k-1)x^{k-2}}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{(k-1)x^{k-3}}\cdot\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=2f'(0)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(k-1)x^{k-3}}\neq 0$$

可见应有 $k=3$. 故正确选项为 C.

3.（2004 年试题）把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是　　(　　)

A. α,β,γ　　B. α,γ,β　　C. β,α,γ　　D. β,γ,α

【考点提示】　高阶无穷小，变上限定积分求导，无穷小量的阶.

【解题分析】　由题设，可先求出 α,β,γ 的一阶导数如下：

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\cos(x^2),\quad \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x}=\tan x\cdot 2x,\quad \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}x}=\sin(x^{\frac{3}{2}})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

显然当 $x\to 0^+$ 时 $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}\to 1$，$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x}\sim 2x^2$，$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}x}\sim\frac{1}{2}x$，因此 $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}$ 不是无穷小量，$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x}$ 是二阶无穷小量，$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}x}$ 为一阶无穷小量，所以 α,β,γ 分别为一阶、三阶、二阶无穷小，则按无穷小量的阶排序为 α,γ,β 选 B.

4.（2007 年试题）当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是　　(　　)

A. $1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　D. $1-\cos\sqrt{x}$

【考点提示】　等价无穷小.

【解题分析】　常用的等价无穷小（当 $x\to 0$ 时）有：$\mathrm{e}^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$\sqrt{1+x}-$

$1 \sim \frac{x}{2}$，$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$，$\sin x \sim x$，…. 则对本题 A 选项 $1-e^{\sqrt{x}} \sim -\sqrt{x}$，B 选项 $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x}$，C 选项 $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1 \sim \frac{\sqrt{x}}{2}$，D 选项 $1-\cos\sqrt{x} \sim \frac{x}{2}$. 故应选 B.

5.（2009 年试题）当 $x \to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 等价无穷小，则（　）

A. $a=1, b=-\frac{1}{6}$　B. $a=1, b=\frac{1}{6}$　C. $a=-1, b=-\frac{1}{6}$　D. $a=-1, b=\frac{1}{6}$

【考点提示】 等价无穷小的运用.

【解题分析】 $f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 为等价无穷小，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\cdot(-bx)}\xleftrightarrow{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}\xleftrightarrow{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\cdot ax}{-6bx}=\frac{a^3}{-6b}=1\text{，即有 } a^3=-6b.$$

又 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}(1-a\cos ax)=1-a=0$，即 $a=1$，代入上式可得 $b=-\frac{1}{6}$. 故正确答案为 A.

考点 1.4　函数极限的逆问题

1.（1994 年试题）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$，其中 $a^2+c^2\neq 0$，则必有（　）

A. $b=4d$　　B. $b=-4d$　　C. $a=4c$　　D. $a=-4c$

【考点提示】 洛必达法则、无穷小量的等价代换.

【解题分析】 利用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{a\sec^2 x+b\sin x}{\frac{-2c}{1-2x}+2xde^{-x^2}}=-\frac{a}{2c}=2,$$

可得 $a=-4c$，故正确选项为 D.

2.（2002 年试题）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且 $f(0)\neq 0$，$f'(0)\neq 0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a,b 的值.

【考点提示】 无穷小量的阶.

【解题分析】 由题设，$h\to 0$ 时 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 是比 h 高阶的无穷小，因而

$$\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=0,$$

由此可知

$$\lim_{h\to 0}\frac{a[f(h)-f(0)]+b[f(2h)-f(0)]+(a+b-1)f(0)}{h}=0,$$

结合 $f'(0)\neq 0$ 但存在的事实，有 $(a+b-1)f(0)=0$，从而 $a+b=1$，又根据 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近某邻域内具有一阶连续导数，则由洛必达法则

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}af'(h)+2bf'(2h)=(a+2b)f'(0),$$

因此 $a+2b=0$,所以 $a=2,b=-1$.

注 本题还可应用麦克劳林级数展开式,即

$$f(h)=f(0)+f'(0)+o(h),\quad f(2h)=f(0)+f'(0)2h+o(h),$$

则

$$af(h)+bf(2h)-f(0)=(a+b-1)f(0)+(a+2b)f'(0)+o(h),$$

由已知 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 是比 h 高阶的无穷小,因此有

$\begin{cases}a+b-1=0,\\ a+2b=0.\end{cases}$ 同样可解得 $a=2,b=-1$.

考点 1.5 数列的极限

1. (1998 年试题) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

【考点提示】 夹逼定理的应用、定积分的定义.

【解题分析】 因为

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n}{n}\pi}{n+\frac{1}{n}}<\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n}{n}\pi\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n},$$

而由定积分的定义知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$$

又由

$$\begin{aligned}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n}{n}\pi}{n+\frac{1}{n}}&>\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n}{n}\pi\right)\\&=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}.\end{aligned}$$

同理可知 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

综上,根据夹逼定理

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]=\frac{2}{\pi}.$$

2. (2006 年试题) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi,x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求该极限;

(Ⅱ) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

【考点提示】 数列极限与函数极限的计算.

【解题分析】 （Ⅰ）因为数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$(已知)，所以

$$0<x_2=\sin x_1<\frac{\pi}{2},\quad x_2=\sin x_1<x_1,\quad 0<x_3=\sin x_2<x_2<\frac{\pi}{2}.$$

同理可得

$$0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n,$$

即x_n单调下降有下界$\Rightarrow$存在极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

对方程$x_{n+1}=\sin x_n$取极限，令$n\to+\infty$可得

$$a=\sin a\Rightarrow a=0$$

（注：$f(x)=x-\sin x$在$(-\infty,+\infty)$单调上升，有唯一零点$x=0$).

（Ⅱ）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{x_n^2}\ln\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)}$. 又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\ln\frac{\sin x_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\ln\left(\frac{\sin x_n}{x_n}-1+1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}\text{（数列极限转化为函数极限）}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=e^{-\frac{1}{6}}.$$

3.（2007年试题）设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上具有二阶导数，且$f''(x)>0$，令$u_n=f(n)=1,2,\cdots,n$. 则下列结论正确的是（　　）

A. 若$u_1>u_2$，则$\{u_n\}$必收敛　　B. 若$u_1>u_2$，则$\{u_n\}$必发散

C. 若$u_1<u_2$，则$\{u_n\}$必收敛　　D. 若$u_1<u_2$，则$\{u_n\}$必发散

【考点提示】 数列的敛散性.

【解题分析】 因$f''(x)>0$故$f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. 若$u_1<u_2$，则$\frac{u_2-u_1}{2-1}=f'(c)(c\in[1,2])>0$，即$n>2$时，必有$f'(n)>f'(c)>0$，$u_n=f(n)$也单调递增，且随$n$的增大，$f'(n)$增大，故$f(n)$增大更快，故应选D，即$\{u_n\}$必发散.

4.（2008年试题）设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调有界，$\{x_n\}$为数列，下列命题正确的是（　　）

A. 若$\{x_n\}$收敛，则$\{f(x_n)\}$收敛　　B. 若$\{x_n\}$单调，则$\{f(x_n)\}$收敛

C. 若$\{f(x_n)\}$收敛，则$\{x_n\}$收敛　　D. 若$\{f(x_n)\}$单调，则$\{x_n\}$收敛

【考点提示】 函数与数列的收敛性.

【解题分析】 因为$f(x)$在实数域内单调有界，若$\{x_n\}$也单调，则$\{f(x_n)\}$单调有界，从而$\{f(x_n)\}$是收敛的，B选项正确；若$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0,\\-1, & x<0,\end{cases}$ $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$，$f(x)$是单调有界的，且$\{x_n\}$是收敛于0的，但$\{f(x_n)\}$的数值总是在1和-1之间来回变化，是不收敛的，A选项错误；若$f(x)=\arctan x$，$x_n=n$，满足C，D选项的条件，但与结果相矛盾，C，D选项均错误. 故应选B.