大学本科应用型“十一五”规划教材

教育部课程教材研究所推荐使用

线性代数学习指导

（理工）

XIANXING DAISHU XUEXI ZHIDAO

李承环 主编

人民教育出版社

大学本科应用型“十一五”规划教材
教育部课程教材研究所推荐使用

线性代数学习指导

（理工）

XIANXING DAISHU XUEXI ZHIDAO

李承环　主编
李龙才　主审

人民教育出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习指导：理工类/李承环主编．—北京：

人民教育出版社，2010

大学本科应用型“十一五”规划教材

ISBN 978－7－107－22649－6

Ⅰ．①线…

Ⅱ．①李…

Ⅲ．①线性代数－高等学校－教学参考资料

Ⅳ．①0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第047349号

人民教育出版社 出版发行

网址：http://www pep com cn

北京天宇星印刷厂印装　全国新华书店经销

2010年4月第1版　2010年4月第1次印刷

开本：787毫米×1 092毫米　1/16　印张：13

字数：240千字　印数：0 001～3 000册

定价：15.30元

大学本科应用型“十一五”规划教材

出版说明

进入新世纪以来，为了更好地培养从事社会主义现代化建设的高层次应用型人才，充分适应广大人民群众对高等教育需求不断增长的新形势，全国各地许多普通高等学校不仅创设了一大批新兴的应用型专业，同时还与社会力量合作，相继创办了以培养大学本科层次应用型人才为主要目标的独立学院. 这是我国深化高等教育改革、推进高等教育大众化和保证高等教育持续、健康、均衡发展的一个重大举措.

作为“教育部高等学校教学质量与教学改革工程”的重要组成部分，建立适合普通高等学校自身办学性质、专业设置及人才培养目标的应用型专业课程教材体系，成为当前高等教育改革和发展的一项重要任务. 为了加强对高等学校本科应用型教材编写工作的组织和管理，教育部课程教材研究所联合相关高等院校的领导、专家学者和教师组成了“大学本科应用型‘十一五’规划教材编写委员会”. 人民教育出版社社长、教育部直属高校司原司长李志军，教育部高等教育评估中心主任、高等教育司原副司长刘凤泰，中国高等教育学会副会长兼秘书长、原国家教委思想政治工作司副司长张晋峰，国务院学位委员会中文学科组召集人、山东大学原校长曾繁仁，教育部高校教学评估专家委员会副主任、江汉大学校长李进才，首都师范大学副校长周建设，教育部社会科学司出版管理处调研员田敬诚担任编写委员会顾问. 中华美学学会副会长、首都师范大学教务处处长兼美学研究所所长王德胜担任编写委员会主任委员. 编写委员会还聘请了具有丰富教学经验和较高学术水平的学科带头人分别担任各科教材的主编，并聘请知名专家审核编写大纲和书稿.

本套教材的编写以“教育要面向现代化，面向世界，面向未来”为指针，以党和国家的教育方针以及高等学校应用型人才培养目标为依据，以思想性、科学性、时代性为原则，以应用性、复合性、拓展性为特色，致力于培养高层次应用型人才的创新精神和实践能力，全面体现“大学本科层次”和“应用、实用、适用”的教学要求，力求建立合理的教材结构，以适应我国高等教育从规模数量型向质量效益型转变的形势和社会主义市场经济对应用型人才培养的迫切要求. 另外，教材正文版面设计上留有旁白，以提示要目，强化重点，画龙点睛；学生也可笔记上课内容，钩玄提要，以利复习和举一反三.

作为从我国高等教育实际情况出发而编写出版的全国性通用教材，本套教材主要供培养本科层次人才的普通高等学校应用型专业和独立学院各专业教学使用，还可供普通高等学校其他相关专业的师生和社会人员进修或自学使用.

本套教材由人民教育出版社于“十一五”第一年开始陆续推出.

本套教材的编写出版，得到了教育部高等教育司、教育部直属高校司、教育部社会科学司、教育部高校教学评估专家委员会、教育部高等教育评估中心、教育部课程教材研究所、中国高等教育学会以及相关高等院校有关领导和同志们的大力支持，谨在此一并致谢.

编写出版大学本科应用型专业教材，是我们贯彻国家教育部高等教育课程教材改革精神、全面落实教育部新一轮《教育振兴行动计划》的初步尝试. 本套教材的编写出版如有不当之处，敬请广大师生不吝指正，以使本套教材日臻完善.

人民教育出版社

2007年7月

本书编者前言

本书是与大学本科应用型“十一五”规划教材《线性代数》（理工）配套的学生学习指导用书. 书中融合了编者数十年的教学经验、对线性代数硕士考研大纲的理解与十几年来指导线性代数专业学生考研的教学实践体会，对于正在学习线性代数和准备考研复习线性代数的本科生都具有学习参考价值.

本书结合《线性代数》（理工）教材内容和全国硕士研究生入学统一考试线性代数考试大纲的要求，分为五章：行列式、矩阵、向量组与 n 维向量空间、线性方程组、相似矩阵与二次型. 每章有四部分：学习要点、习题详解、考研要求和典型例题解析.

习题详解是对《线性代数》（理工）教材习题、综合练习题和自测题的详细解答；典型例题解析，或按类似题型，或按类似解题思路，或按类似解题方法，予以剖析.

本书注重线性代数基础知识和基本理论的综合阐述，重视基本概念、公式、定理及运算法则的理解与应用，重视内容的整体联系，注意培养、提高读者综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力.

本书将例题作为载体. 例题的题解不是单纯的做题或解答，而是把例题的分析过程和解答过程作为启发读者思考问题和掌握所学知识的过程，从如何把文字语言转化为数学语言，如何充分认识、分析已知条件，挖掘已知条件的内涵与外延，如何融会贯通地利用已知条件等多个角度，分析所要解决问题的条件，讲出解题的思路和解决问题的关键（包括转化过程或知识点），进而达到解决问题的目的.

本书力求分析问题时思路明确，解决问题时条理清晰、论证完整. 综合运用所学知识融会贯通地解决问题，提高读者分析问题和解决问题的能力，始终是本书关注的主题.

本书最后附录线性代数模拟题（一）、（二）及其解答提示或答案.

本书由李承环主编，参编者有杨存絮、李国刚、张明亮、马醒花等.

本书编写工作得到了人民教育出版社、教育部课程教材研究所、石家庄铁道学院、河北科技大学、首都师范大学、河南大学、河北理工大学等单位的大力指导和帮助；中

国科学院数学与系统科学研究院博士后、人民教育出版社数学室副主任李龙才先生提出了宝贵意见. 谨此一并致谢!

限于编者的水平和经验，本书或有不足之处，敬请广大师生和读者提出宝贵意见，以便再版时修正.

李承环

2010 年 1 月

目　录 CONTENTS

第一章 行列式

一、学习要点

行列式的概念、性质及计算方法，克莱姆法则.

（一）行列式的概念

1. 排列的逆序数

由 n 个自然数 1，2，…，n 按一定的次序排成一列，称为一个 n 级排列. 在一个排列中如果一个数前面有一个比它大的数，就称它有一个逆序. 一个排列中的所有数字的逆序之和称为这个排列的逆序数.

如 $n(n-1)\cdots321$ 这个排列的逆序数 $t=0+1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

2. 行列式的两个等价定义

（1）n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 1，2，…，n 的一个排列，t 为这个排列的逆序数，$\sum$ 是对 1，2，…，n 构成的所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 取和.

（2）n 阶行列式的等价定义是 $D=\Delta(a_{ij})=\sum(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$，其中 $q_1q_2\cdots q_n$ 是自然数 1，2，…，n 的一个排列，s 是它的逆序数，$\sum$ 是对 1，2，…，n 构成的所有排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 取和.

由行列式的定义可知，n 阶行列式是数或代数式，它是 $n!$ 项的代数和，每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积.

（二）几种特殊的行列式

1. 主对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

2. 次对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

3. 上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

4. 下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

5. 范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j),$$

其中符号 $\prod$ 表示全体同类因子的连乘积. 如

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant 3}(x_i - x_j) = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1).$$

6. 设 A，B 分别是 m 阶和 n 阶方阵，则

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & D \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A| \cdot |B|.$$

（三）行列式的性质

1. 行列式与它的转置行列式相等（行列式 D 的行与列互换得到的行列式称为它的转置行列式，记为 D^T 或 D'），即 $D=D^T$.

2. 互换行列式的两行（列），行列式变号. 因此，若行列式的某两行（列）完全相同，则此行列式等于零.

3. 行列式的某一行（列）中所有元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘以这个行列式.

因此，行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可提到行列式符号的外面；如果行列式中某一行（列）的元素全为零，那么行列式等于零；如果行列式中有两行（列）对应元素成比例，那么这个行列式等于零.

4. 若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，则这个行列式等于两个行列式之和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

5. 把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一数然后加到另一行（列）对应元素上去，行列式的值不变.

（四）行列式按行（列）展开

1. 余子式、代数余子式

在 n 阶行列式 D 中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，余下的元素按原来次序构成的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}. 称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式（i，$j=1$，2，$\cdots$，n）.

2. 行列式按行（列）展开定理

（1）n 阶行列式 D 等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和. 即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\,(i=1,2,\cdots,n),$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\,(j=1,2,\cdots,n).$$

（2）n 阶行列式某一行（列）的各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和等于零．即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\ (i\neq j),$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\ (i\neq j).$$

（五）克莱姆法则

1．含有 n 个未知数 n 个方程的非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases}$$

若系数行列式 $D\neq0$，则线性方程组有唯一解

$$x_j=\frac{D_j}{D}\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

其中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

2．含有 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0, \end{cases}$$

若系数行列式 $D\neq0$，则它仅有零解；若系数行列式 $D=0$，则它除零解外，还有非零解．反之也成立．

注：当未知数的个数与方程的个数相等，且方程组的系数行列式不等于零时，才能利用克莱姆法则求解线性方程组．

二、习题详解

习题 1-1

1．计算下列排列的逆序数，并指出它们是奇排列还是偶排列．

（1）461523；（2）13572468；（3）987654321.

解：（1）461523 的逆序数为 9，是奇排列.

（2）13572468 的逆序数为 6，是偶排列.

（3）987654321 的逆序数为 36，是偶排列.

2. $1457i82j3$ 是 1，2，3，4，5，6，7，8，9 的一个全排列，试选择 i 与 j 使该排列为：（1）奇排列；（2）偶排列.

解：（1）当 $i=9$，$j=6$ 时，$1457i82j3$ 为奇排列.

（2）当 $i=6$，$j=9$ 时，$1457i82j3$ 为偶排列.

习题 1-2

1. 计算下列 2 阶行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$；（3）$\begin{vmatrix} ab & a^2 \\ b^2 & ab \end{vmatrix}$.

解：（1）$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}=5\times8-7\times6=-2.$

（2）$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$

（3）$\begin{vmatrix} ab & a^2 \\ b^2 & ab \end{vmatrix}=(ab)(ab)-a^2b^2=a^2b^2-a^2b^2=0.$

2. 利用对角线展开法计算下列 3 阶行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$；（3）$\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$.

解：（1）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

$$=1\times5\times9+2\times6\times7+3\times4\times8-3\times5\times7-1\times8\times6-2\times4\times9=0.$$

（2）$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=a^3+b^3+c^3-cab-acb-bca=a^3+b^3+c^3-3abc.$

（3）$\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$

$=(a+x)(b+x)(c+x)+x^3+x^3-x^2(b+x)-x^2(a+x)-x^2(c+x)$

$=abx+acx+bcx+abc=(ab+ac+bc)x+abc.$

3. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}2x_1+5x_2=1,\\3x_1+7x_2=2;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x_1+3x_2+5x_3=10,\\3x_1+7x_2+4x_3=3,\\x_1+2x_2+2x_3=3;\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x_1-x_2=-a,\\x_2+x_3=-b,\\x_1-x_3=-c.\end{cases}$

解：(1) $D=\begin{vmatrix}2&5\\3&7\end{vmatrix}=-1$，$D_1=\begin{vmatrix}1&5\\2&7\end{vmatrix}=-3$，$D_2=\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}=1$，

$\therefore\quad x_1=\frac{D_1}{D}=3$，$x_2=\frac{D_2}{D}=-1.$

(2) $D=\begin{vmatrix}2&3&5\\3&7&4\\1&2&2\end{vmatrix}=28+12+30-35-16-18=1$，

$D_1=\begin{vmatrix}10&3&5\\3&7&4\\3&2&2\end{vmatrix}=3$，$D_2=\begin{vmatrix}2&10&5\\3&3&4\\1&3&2\end{vmatrix}=-2$，$D_3=\begin{vmatrix}2&3&10\\3&7&3\\1&2&3\end{vmatrix}=2$，

$\therefore\quad x_1=\frac{D_1}{D}=3$，$x_2=\frac{D_2}{D}=-2$，$x_3=\frac{D_3}{D}=2.$

(3) $D=\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\1&0&-1\end{vmatrix}=-2$，$D_1=\begin{vmatrix}-a&-1&0\\-b&1&1\\-c&0&-1\end{vmatrix}=a+b+c$，

$D_2=\begin{vmatrix}1&-a&0\\0&-b&1\\1&-c&-1\end{vmatrix}=-a+b+c$，$D_3=\begin{vmatrix}1&-1&-a\\0&1&-b\\1&0&-c\end{vmatrix}=a+b-c$，

$\therefore\quad x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{1}{2}(a+b+c)$，$x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{1}{2}(-a+b+c)$，$x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{1}{2}(a+b-c)$.

习题 1-3

1. 利用定义计算行列式 $\begin{vmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\n&0&0&\cdots&0\end{vmatrix}$.

解：此行列式只有一个非零项 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$，它带符号 $(-1)^{n-1}$，于是原行列式等于 $(-1)^{n-1}\cdot n!$

2. 求行列式 $\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ 中含 x^3 和 x^4 的项.

解：含 x^4 的项只能来自乘积 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，即 $5x\cdot x\cdot x\cdot 2x=10x^4$，含 x^3 的项只能来自乘积 $a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$ 与乘积 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$，所以此项为 $-5x^3$.

3. 计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$；(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix}$；(5) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}$；(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

解：(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一列展开}} (-1)^{4+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6.$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{r_4-r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_2-r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8.$