JINPAI AOSAI KAOSHI GAOSHOU

浙大优学

金牌奥赛考试高手

数学

八年级

高 高于教材

准 准确合理

新 新颖独特

精 精选例题

名 名师荟萃

丁春荣 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

金牌奥赛考试高手

数学 八年级

丛书主编 刘富森 金 新 陆秀峻
本册主编 丁春荣
编 委 刘富森 丁春荣 司海举
王 兵 陈喜旺 王宗甫
李宏伟 刘 芳 李树森
刘书进

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

金牌奥赛考试高手．数学．八年级 / 丁春荣主编．
—杭州：浙江大学出版社，2011.4
ISBN 978-7-308-08584-7

Ⅰ．①金… Ⅱ．①丁… Ⅲ．①中学数学课－初中－习题集 Ⅳ．①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 061679 号

金牌奥赛考试高手　数学八年级
丁春荣　主编

责任编辑　杨晓鸣
特邀编辑　冯慈璜
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版　浙江时代出版服务有限公司
印　　刷　德清县第二印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　14
字　　数　340 千字
版 印 次　2011 年 4 月第 1 版　2011 年 4 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-08584-7
定　　价　28.00 元

前　言

中小学学科奥林匹克竞赛(简称学科奥赛)是我国覆盖面最广、参加人数最多、影响最大的一项中小学生学科竞赛活动。学科奥林匹克是由体育奥林匹克借鉴、引申而来。国际数学奥林匹克(简称 IMO)、国际物理奥林匹克(简称 IPHO)、国际化学奥林匹克(简称 ICHO)等是国际上影响较大的中学生学科竞赛活动,每年都受到了千百万青少年学生的向往与关注。之所以受到如此关注,究其原因是奥赛具有很强的创新性、灵活性、综合性以及注重培养学生的探索能力和启发学生的创新意识,而这些也恰恰是素质教育的核心内容。这些素质是未来发展的需要。

浙大优学系列丛书编委会在精心研究了多年国内外竞赛活动,以及大量该类优秀图书的基础上,邀请了全国各地一些潜心耕耘于这块园地的优秀园丁,陆续编写出版了一系列有关数学、语文、英语、物理、化学、生物、信息七大学科,共计 200 多个品种的奥赛和考试类读物。

浙大优学系列学科竞赛丛书的编写宗旨及特点是:

第一:高。来源于教材,又高于教材。来源于教材,就是参照教育部最新课程标准编写;高于教材,就是紧扣各级竞赛大纲,注意与各级竞赛在内容、题型及能力要求等各方面全面接轨,培养学生兴趣,开发学生智力,提高学生解决问题的能力。

第二:准。科学准确,结构合理。各册按照学科特点进行分层设计,科学编排;依照循序渐进的原则,进行深入浅出的分析,传授全面细致的解题方法。

第三:新。书中选用的题型新颖独特,趣味性强。博采了近年国内外奥赛、中考、高考试题精华,精选的内容代表了当前奥赛的最高水平,体现课程改革的新概念及竞赛命题的新思想、新方法、新动态。

第四:精。精选例题,难而不怪,灵活性强,高而可攀。重在举一反三,触类旁通;重在一题多解、一题多变、一题多问;注重对思维能力的训练,不搞题海战术,使学习成为一种兴趣和爱好。

第五:名。名师荟萃,名赛集锦。丛书编委会邀请了全国各地一些名牌大学的教授、重点中学的特级教师、高级教师、学科带头人,著名奥林匹克金牌教练共同编写。

虽然我们从策划、编写,再到设计、出版,兢兢业业、尽心尽力,力求完美,但疏漏之处在所难免。如果您有什么意见和建议,欢迎并感谢赐教,让我们共同努力,以使本系列丛书更好地服务于广大的中小学师生。

目 录

第一单元

因式分解

●知识要点及延伸拓展

1. 理解因式分解的意义，因式分解与整式乘法的区别与联系；

2. 掌握因式分解的常用方法：提取公因式法、公式法、分组分解法、添项法、拆项法、十字相乘法、换元法、待定系数法、综合除法等，解题时能灵活选用上述方法.

3. 会应用因式分解解决一些综合性问题. 如：利用因式分解化简求值、解方程、解应用题、证明等(不等)式等等.

●竞赛能力要求

1. 熟练掌握因式分解的有关概念，能灵活运用它去解决问题；

2. 掌握各种分解因式的特点，选择恰当的方法分解因式；

3. 具有用因式分解的有关知识和方法解决其他问题的能力，如化简求值、证明等式或不等式、解方程、解应用题等.

●赛题解说

例 1 分解因式：

(1) $(a+x)^{m+1}(b+x)^{n-1}-(a+x)^{m}(b+x)^{n}$；

(2) $x(a-b)^{2n}+y(b-a)^{2n+1}$.

分析：(1)中两项均有 $(a+x)^{m}(b+x)^{n-1}$ 因子，(2)中两项均含有 $(b-a)^{2n}$，提取公因子即可.

解：(1)原式 $=(a+x)^{m}(b+x)^{n-1}[(a+x)-(b+x)]$

$=(a+x)^{m}(b+x)^{n-1}(a-b)$；

(2)原式 $=(b-a)^{2n}[x+y(b-a)]$

$=(b-a)^{2n}(x-ay+by)$.

评说：将(1)式中 $(a+x)$、$(b+x)$ 分别看作一个整体，(2)中 $(b-a)^{2n}=(a-b)^{2n}$ 是解题关键，也可采用 $(b-a)^{2n+1}=-(a-b)^{2n+1}$.

例 2 分解因式 $-\frac{1}{2}x^3y+\frac{1}{4}x^2y^2-\frac{1}{8}x^3y^3$.

分析：提取各式中的公因式，提取的方法是：

(1)求出各项系数的最大公约数；

(2)求出各项同底数幂中次数最低者；

将(1)、(2)结果相乘，即得最高公因式.

解:原式$=-\frac{1}{8}x^2y(4x-2y+xy^2)$.

评说:此题中系数的最大公约数为$-\frac{1}{8}$，各项同底数幂x、y的次数最低者分别为x^2、y，所以公因式为$-\frac{1}{8}x^2y$.

例 3 $(2^{48}-1)$可以被60与70之间的两个整数整除，求这两个数.

分析:利用平方差公式到$2^{48}-1$进行分解，直至分解为有60～70之间的数为止.

解:$2^{48}-1=(2^{24}+1)(2^{24}-1)$

$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^{12}-1)$

$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^6+1)(2^6-1)$.

因为$2^6+1=65$，$2^6-1=63$，

所以这两个数分别为65和63.

评说:注意$2^6=64$，进而分解到2^6-1后，不再继续利用公式进行分解.

例 4 分解因式

(1)$4x^4y^4-\frac{1}{2}xy$;

(2)$(x-y)x^6+(y-x)y^6$.

分析:提取公因式后，利用乘法公式进一步分解.

解:(1)原式$=\frac{1}{2}xy(8x^3y^3-1)$

$=\frac{1}{2}xy(2xy-1)(4x^2y^2+2xy+1)$;

(2)原式$=(x-y)x^6-(x-y)y^6$

$=(x-y)(x^6-y^6)$

$=(x-y)(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)(x-y)$

$=(x-y)^2(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$.

评说:分解因式时，有时需要多次利用乘法公式分解，直到不能分解为止.如(2)中，就用了平方差公式、立方和、立方差公式.

例 5 分解因式:$a^3c-4a^2bc+4ab^2c$.

分析 先提取公因式ac，再利用二数差的平方公式.

解:原式$=ac(a^2-4ab+4b^2)=ac(a-2b)^2$.

评说:因式分解的一般步骤是:先提取公因式，然后再考虑公式法和分组分解法.

例 6 分解因式:$6ax^2-9a^2xy+2xy-3ay^2$.

分析:如果按前两项、后两项进行分组，那么两组之间就出现了公因式$2x-3ay$.

解: $6ax^2-9a^2xy+2xy-3ay^2$

$=(6ax^2-9a^2xy)+(2xy-3ay^2)$

$=3ax(2x-3ay)+y(2x-3ay)$

$=(2x-3ay)(3ax+y)$.

评说:用分组分解法分解因式,分组时应观察多项式各项的系数和次数,并预见到下一步分解的可能性,本题也可采用按第1、第3项一组,第2、第4项一组来分解.

例7 分解因式:

(1)$9a^2-4b^2+4bc-c^2$;

(2)$(a-b)^2+4ab-c^2$;

(3)$(c-a)^2-4(b-c)(a-b)$;

(4)$2x^3-x^2z-4x^2y+2xyz+2xy^2-y^2z$.

分析:对(2)、(3)要先利用公式展开,然后再对它们进行重新分组,能利用公式的就利用公式.

解:(1)$9a^2-4b^2+4bc-c^2=9a^2-(4b^2-4bc+c^2)$

$=9a^2-(2b-c)^2=(3a+2b-c)(3a-2b+c)$;

(2)$(a-b)^2+4ab-c^2=a^2-2ab+b^2+4ab-c^2=a^2+2ab+b^2-c^2$

$=(a+b)^2-c^2=(a+b+c)(a+b-c)$;

(3)$(c-a)^2-4(b-c)(a-b)=c^2-2ac+a^2-4ab+4ac-4bc+4b^2$

$=c^2+2ac+a^2-4ab-4bc+4b^2=(c^2+2ac+a^2)-(4ab+4bc)+4b^2$

$=(a+c)^2-4b(a+c)+(2b)^2=(a+c-2b)^2$;

(4)**解法一**:$2x^3-x^2z-4x^2y+2xyz+2xy^2-y^2z$

$=(2x^3-x^2z)-(4x^2y-2xyz)+(2xy^2-y^2z)$

$=x^2(2x-z)-2xy(2x-z)+y^2(2x-z)$

$=(2x-z)(x^2-2xy+y^2)$

$=(2x-z)(x-y)^2$,

解法二:$2x^3-x^2z-4x^2y+2xyz+2xy^2-y^2z$

$=(2x^3-4x^2y+2xy^2)-(x^2z-2xyz+y^2z)$

$=2x(x^2-2xy+y^2)-z(x^2-2xy+y^2)$

$=(x^2-2xy+y^2)(2x-z)$

$=(x-y)^2(2x-z)$.

评说:分组分解法的“分组”要便于分组后提取公因式及运用乘法公式:

常用的乘法公式有五个:(1)$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;(2)$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$;(3)$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$;(4)$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;(5)$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

(3)题在因式分解过程中,把$a+c$看成一项,然后运用完全平方公式.

(4)题解法一是分组后每组都含有公因式$(2x-z)$,解法二是分组后都含$x^2-2xy+y^2$,可利用完全平方公式,前者分三组、后者分两组,要注意领会.

例8 分解因式:$(6x-1)(2x-1)(3x-1)(x-1)+x^2$.

分析:先将第一项利用多项式乘法法则展开,展开括号时,可把$2x-1$与$3x-1$,$6x-1$与$x-1$分别相乘.

解: $(6x-1)(2x-1)(3x-1)(x-1)+x^2$

$=[(6x-1)(x-1)][(2x-1)(3x-1)]+x^2$

$=(6x^2-7x+1)(6x^2-5x+1)+x^2$

$=[(6x^2-6x+1)-x][(6x^2-6x+1)+x]+x^2$

$=(6x^2-6x+1)^2-x^2+x^2$

$=(6x^2-6x+1)^2$.

评说:本题技巧性较强,将 $2x-1$ 与 $3x-1$,$6x-1$ 与 $x-1$ 结合后 x^2 项的系数相同,常数项相同,再将 $-7x$、$-5x$ 恒等变形为 $-6x\pm x$,达到了巧算的目的.此题硬乘也可以,但相当麻烦,同学们可用两种方法做,然后比较一下两种解法的优缺点.

例 9 分解因式:

(1)$3x^2-8x-3$;

(2)$2a^2-b^2-ab+bc+2ca$.

分析:(1)把二次项的系数 3 分解成 3 和 1 两个因数的积,常数项 -3 分解成 -3 和 1 两个因数的积;当我们把 $1,3,-3,1$ 写成

$$\begin{array}{ccc} 1 & & -3 \\ & \times & \\ 3 & & 1 \end{array}$$

后,发现 $1\times1+3\times(-3)$ 正好等于一次项的系数 -8.

(2)中把前三项与后二项分成两组进行分组分解,其中前三项可写成 $2a^2-ba-b^2$,然后把它看成 a 的二次三项式,这时常数项是 $-b^2$,一次项系数是 $-b$,利用十字相乘.

$$\begin{array}{ccc} 1 & & -b \\ & \times & \\ 2 & & b \end{array}$$

$b+(-2b)=-b$,正好等于一次项系数.

解: (1)$3x^2-8x-3=(x-3)(3x+1)$

(2)$2a^2-b^2-ab+bc+2ca=(2a^2-ba-b^2)+(2ca+bc)=(a-b)(2a+b)+c(2a+b)$

$=(2a+b)(a-b+c)$.

评说:(1)若二次三项式 $ax^2+bx+c=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$,则 $a=a_1a_2$,$b=a_1c_2+a_2c_1$,$c=c_1c_2$,把二次项系数 a 分解成 a_1a_2,常数项 c 分解成 c_1c_2,并且把 a_1,a_2,c_1,c_2 排列如下:

$$\begin{array}{ccc} a_1 & & c_1 \\ & \times & \\ a_2 & & c_2 \end{array}$$

这里按斜线交叉相乘,就得到 $a_1c_2+a_2c_1$,如果它正好等于 ax^2+bx+c 的一次项系数 b,那么 ax^2+bx+c 就可以分解成$(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$,其中 a_1、c_1 位于上图的上一行,a_2、c_2 位于下一行.这种借助画十字交叉线分解系数,进而达到分解二次三项式为两因式之积的方法叫"十字相乘法".

需要注意的是:分解因数及十字相乘有多种可能情况,往往需要多次尝试才能成功.

例 10 分解因式:

(1)a^6-b^6;

(2)x^4-7x^2+1.

分析:原式不能直接采用提取公因式法、公式法、十字相乘法进行分解时,可以考虑用拆项法,如第(2)题;把代数式添上两个仅有符号相反的两项,叫添项分组法,在因式分解的过程中,看似不能继续分解的因式,利用“拆项法”或“添项法”可使因式分解工作继续下去.

解:(1)$a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

另解:$a^6-b^6=(a^2)^3-(b^2)^3=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$ (*)

$=(a+b)(a-b)(a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2)$

$=(a+b)(a-b)[(a^2+b^2)^2-a^2b^2]$

$=(a+b)(a-b)[(a^2+b^2-ab)(a^2+b^2+ab)]$

$=(a+b)(a-b)(a^2+b^2-ab)(a^2+b^2+ab)$,

(2)$x^4-7x^2+1=x^4+2x^2+1-9x^2$

$=(x^2+1)^2-(3x)^2=(x^2+1+3x)(x^2+1-3x)$.

评说:(1)题中的两种解法结果应一样,但是另解中到(*)式为止若不使用添项法就不能再分解下去了;(2)题拆项后则可再利用平方差公式,拆项使一项变为两项,但要维持原式的恒等性,即进行“恒等变形”.

例 11 分解因式:

(1)$x^4+x^2+2ax+1-a^2$;

(2)$(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2$.

分析:利用添拆项法进行配方,然后再分组分解:

解:(1)$x^4+x^2+2ax+1-a^2=x^4+2x^2-x^2+2ax+1-a^2$

$=(x^2+1)^2-(x-a)^2=(x^2+1+x-a)(x^2+1-x+a)$.

(2)$(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2$

$=(1+y)^2+2(1-y^2)x^2+x^4(1-y)^2-2(1-y^2)x^2-2x^2(1+y^2)$

$=[(1+y)+x^2(1-y)]^2-(2x)^2$

$=[(1+y)+x^2(1-y)+2x][1+y+x^2(1-y)-2x]$

$=(x^2+2x+1+y-x^2y)(x^2-2x+1+y-x^2y)$

$=[(x+1)^2-y(x^2-1)][(x-1)^2-y(x^2-1)]$

$=(x+1)(x+1-xy+y)(x-1)(x-1-xy-y)$.

评说:(1)题把 x^2 拆成 $2x^2$ 和$(-x^2)$的和;(2)题首末两项均为完全平方式,添上 $2x^2(1-y^2)$和$-2x^2(1-y^2)$两项就可将它们配方.

例 12 分解因式:

(1)$(xy-1)^2+(x+y-2)(x+y-2xy)$;

(2)$(2a+5)(a^2-9)(2a-7)-91$.

分析:根据式子的特征,把其中的某一部分看作一个整体,用一个新元代替,使式子简化,叫换元法.我们可以利用换元法降次,以简化运算过程.

解:(1)设 $a=x+y$,$b=xy$,则

$(xy-1)^2+(x+y-2)(x+y-2xy)=(b-1)^2+(a-2)(a-2b)$

$=b^2-2b+1+a^2-2ab-2a+4b=(a-b)^2-2(a-b)+1$

$=(a-b-1)^2=(x+y-xy-1)^2=(x-1)^2(y-1)^2$;

(2) $(2a+5)(a^2-9)(2a-7)-91$

$=[(2a+5)(a-3)][(a+3)(2a-7)]-91$

$=(2a^2-a-15)(2a^2-a-21)-91$.

设 $2a^2-a-15=x$，则

原式 $=x(x-6)-91=x^2-6x-91=(x-13)(x+7)$

$=(2a^2-a-28)(2a^2-a-8)=(a-4)(2a+7)(2a^2-a-8)$.

评说：第(1)小题是将 $x+y$ 与 xy 各看成一个整体，用换元法简化式子；第(2)小题是将第一项的三个因式重新分解组合. 利用换元法降次.

换元法不仅可以用于因式分解，还可用于解方程(组)中，是一种重要的数学方法.

例 13 分解因式：$x^2-y^2-2x-4y-3$.

分析：1. 可采用"大十字相乘法"，把二次项 x^2-y^2 分解为 $x+y$ 和 $x-y$ 的积，把 -3 分解为 1、-3 或 -1、3 进行尝试，使之交叉相乘，再相加的结果为 $-2x-4y$ 就可以了.

$$\begin{array}{ccc} x+y & \diagdown\!\!\!\!\diagup & 1 \\ x-y & & -3 \end{array}$$

$$-3(x+y)+1\cdot(x-y)=-2x-4y$$

2. 因为 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，所以原式的两个因式必为 $(x+y+a)(x+y+b)$ 的形式，我们可以用待定系数法来解.

解法一：由分析中的 1 可知：

$x^2-y^2-2x-4y-3=(x+y)(x-y)-2x-4y-3=(x+y+1)(x-y-3)$.

解法二：因为 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

所以可设 $x^2-y^2-2x-4y-3=(x+y+a)(x-y+b)$

即 $x^2-y^2-2x-4y-3=x^2-y^2+(a+b)x+(-a+b)y+ab$，

比较两边的系数，可得 $\begin{cases} a+b=-2 \\ -a+b=-4 \\ ab=-3 \end{cases}$

解之，得 $a=1$，$b=-3$，

所以原式 $=(x+y+1)(x-y-3)$.

评说：1. "大十字相乘法"只要把二次项分解成两个一次项，把常数项分解为两个因数，交叉相乘后再相加，使所得结果为一次项就可以分解因式了.

待定系数法就是分析条件可以断定多项式能分解成某几个因式，只是这些因式中有些系数尚未确定，由于这几个因式连乘积恒等于原式，因此两边对应系数相等，由此列出这些待定系数的方程组，解之求得各待定系数的值，从而完成因式分解.

待定系数法不仅用于分解因式，还广泛用于求函数的解析式等等.

例 14 已知 $2x^4+x^3-8x^2-19x-60$ 有因式 $2x+5$ 和 $x-3$，把它分解因式.

分析：用综合除法，$2x+5\,|\,(2x^4+x^3-8x^2-19x-60)$，$x-3\,|\,(2x^4+x^3-8x^2-19x-60)$，连续两次用综合除法.

解：

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & x^3-2x^2+x-12 \\
2x+5\,\big) & \overline{2x^4+x^3-8x^2-19x-60} \\
 & \underline{2x^4+5x^3\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
 & \quad -4x^3-8x^2 \\
 & \quad \underline{-4x^3-10x^2\qquad\qquad} \\
 & \qquad\qquad 2x^2-19x \\
 & \qquad\qquad \underline{2x^2+5x\qquad} \\
 & \qquad\qquad\quad -24x-60 \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{-24x-60} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

所以 $2x^4+x^3-8x^2-19x-60=(2x+5)(x^3-2x^2+x-12)$

又　$x-3|2x^4+x^3-8x^2-19x-60$，

所以 $x-3|x^3-2x^2+x-12$.

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & x^2+x+4 \\
x-3\,\big) & \overline{x^3-2x^2+x-12} \\
 & \underline{x^3-3x^2\qquad\qquad} \\
 & \qquad x^2+x \\
 & \qquad \underline{x^2-3x\quad} \\
 & \qquad\quad 4x-12 \\
 & \qquad\quad \underline{4x-12} \\
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

所以 $2x^4+x^3-8x^2-19x-60$

$=(2x+5)(x-3)(x^2+x+4)$.

评说：此题是用综合除法来分解因式，用了两次综合除法，注意算式的书写格式.

例 15　当 a 为何值时，多项式 $2x^3-5x^2+5x+a$ 能被 $x-2$ 整除？并把它因式分解.

分析：依题意 $x-2|2x^3-5x^2+5x+a$，让余数为 0 即可求 a.

解：

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & 2x^2-x+3 \\
x-2\,\big) & \overline{2x^3-5x^2+5x+a} \\
 & \underline{2x^3-4x^2\qquad\qquad} \\
 & \qquad -x^2+5x \\
 & \qquad \underline{-x^2+2x\quad} \\
 & \qquad\qquad 3x+a \\
 & \qquad\qquad \underline{3x-6} \\
 & \qquad\qquad\quad a+6
\end{array}
$$

当余式 $a+6=0$ 时，该多项式能被 $x-2$ 整除，此时 $a=-6$

所以当 $a=-6$ 时，多项式 $2x^3-5x^2+5x+a$ 能被 $x-2$ 整除.

$2x^3-5x^2+5x-6=(x-2)(2x^2-x+3)$.

评说：此题关键是令综合除式的余数为 0.

例 16　试证：$7^{101}-7^{100}$ 能被 42 整除.

分析：只需证它同时能被 6 和 7 整除，欲证它能被 6 整除，只需提取公因式 7^{100}，可得 $(7-1)=6$，再分解 $7^{100}=7^{1+99}=7\cdot 7^{99}$，可得 7 的倍数.

证明:$7^{101}-7^{100}=7^{100}(7-1)=7^{99+1}\cdot 6=7^{99}\cdot 7\cdot 6$,

因为 $42|7^{99}\cdot 7\cdot 6$,所以 $42|7^{101}-7^{100}$.

评说:分解因式法可用于证明一些有关整除的问题,请同学们认真琢磨.

例 17 已知在$\triangle ABC$中,$a^2-16b^2-c^2+6ab+10bc=0$(a,b,c是三角形三边的长).

求证:$a+c=2b$

分析:将已知等式分解因式然后讨论.

证明: $a^2-16b^2-c^2+6ab+10bc$

$=(a^2+6ab+9b^2)-(25b^2-10bc+c^2)=(a+3b)^2-(5b-c)^2$

$=[(a+3b)+(5b-c)][(a+3b)-(5b-c)]=(a+8b-c)(a-2b+c)$,

因为a,b,c是三角形的三边长,

所以$a+b-c>0$,所以$a+b-c+7b>0$.

由已知$a^2-16b^2-c^2+6ab+10bc=0$,得$a-2b+c=0$,即$a+c=2b$.

评说:因式分解可以用于化简求值、证明、解方程、不等式、应用题等等,关键要熟练掌握解应用题的方法.

赛前演练一(A)

一、选择题

1. 若 $4x^2+\frac{1}{3}x+a$ 是一个完全平方式,则 a 的值为(　　)

A. $-\frac{1}{12}$　　B. $\frac{1}{12}$　　C. $\frac{1}{48}$　　D. $\frac{1}{144}$

2. 分解因式:$9a^2-4b^2+4bc-c^2$ 有(　　)

A. $(3a-2b-c)(3a+2b+c)$　　B. $(3a+2b-c)(3a-2b+c)$

C. $(3a+2b+c)(3a+2b+c)$　　D. $(3a-2b+c)(3a-2b-c)$

3. 计算 $\left(10+\frac{1}{100}+0.001\right)^2-\left(0.01+\frac{1}{1000}-10\right)^2$ 的结果为(　　)

A. 0.88　　B. 0.44　　C. 0.22　　D. 0.11

4. $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$等于(　　)

A. $\frac{11}{20}$　　B. $\frac{11}{10}$　　C. $\frac{1}{20}$　　D. $\frac{1}{10}$

5. 如果 x^3+ax^2+bx+8 有两个因式 $x+1$ 和 $x+2$,则 $a+b$ 等于(　　)

A. -7　　B. 7　　C. 21　　D. 24

6. $\frac{78^3+22^3}{78^2-78\times 22+22^2}$ 等于(　)

A. 56　　B. 100　　C. -56　　D. -100

二、填空题

7. 多项式 $12x^2-10xy+2y^2+11x-5y+m$ 可以分解为两个一次因式的积，则 $m=$______.

8. 分解因式 $a^3+a+2=$______.

9. 分解因式 $2x^2-7xy+6y^2+2x-y-12=$______.

10. 分解因式 $m^3-mn^2+m^2n-n^3=$______.

11. 若 a 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的一个根，则 $2a^5-5a^4+2a^3-8a^2+3a=$______.

12. 已知实数 $\begin{cases}x+xy+y=2+3\sqrt{2}\\x^2+y^2=6\end{cases}$，则 $|x+y+1|=$______.

三、解答下列各题

13. 分解因式：

(1)$(x^4+x^2-1)^2+(x^4+x^2-3)$

(2)x^5+x-1

(3)$a^2+2b^2+3c^2+3ab+4ac+5bc$

(4)$(a+b)(a+b-2ab)+(ab-1)(ab+1)$

14. 分解因式：$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$

15. 一个自然数 a 恰等于另一个自然数 b 的平方.则称自然数 a 为完全平方数.如 $64=8^2$，64 就是一个完全平方数，若 $a=1995^2+1995^2\cdot1996^2+1996^2$，求证：$a$ 是一个完全平方数.

16. 已知 b,c 是整数，二次三项式 x^2+bx+c 既是 x^4+6x^2+25 的一个因式，也是 $3x^4+4x^2+28x+5$ 的一个因式，求 $x=1$ 时，x^2+bx+c 的值.

赛前演练一(B)

1. 分解因式：

(1)$(2x+3y)^3-8x^3-27y^3$；

(2)$a^{2m+3n}+a^{2m+3n-2}b^2-a^{2m+n}-a^{2m+n-2}b^2+a^{2m-2}b^2+a^{2m}$；

(3)$(1+x+x^2+x^3)^2-x^3$；

(4)$x^4+x^3+6x^2+5x+5$；

(5)$1+x+x^2+\cdots+x^{14}+x^{15}$；

(6)$ax^2-a^2x+bx^2-2abx+a^2b-b^2x+ab^2$.

2. 分解因式：

(1)$(2x^2+5x)^2-2x^2-5x-6$；

(2)$x^4+4x^3+4x^2-11(x^2+2x)+24$；

(3)$(x+1)(2x+1)(3x-1)(4x-1)+6x^4$；

(4)$2x^4-x^3-6x^2-x+2$；

(5)$x^4+x^3+\frac{9}{4}x^2+x+1$;

(6)$(x+y+z)^3+(3x-2y-3z)^3-(4x-y-2z)^3$.

3. 分解因式:

(1)$x^3+3xy+y^3-1$;

(2)x^4+4;

(3)x^3-x^2-x-2;

(4)$a^2b+b^2c+c^2a-ab^2-bc^2-ca^2$;

(5)$x^2+y^2-x^2y^2-4xy-1$;

(6)$(a-b)^3+(b-a-2)^3+8$.

4. 用待定系数法分解因式:

(1)$x^2+xy-2y^2+2x+7y-3$;

(2)$a^2-3b^2-8c^2+2ab+2ac+14bc$;

(3)$2x^2-5xy-3y^2+3x+5y-2$;

(4)$x^4+4x^3+3x^2+4x+2$.

5. 已知 $w^2+w-1=0$,求 $w^{1993}-w^{1994}-w^{1995}+w^{1996}-w^{1997}-w^{1998}+w^{1999}-w^{2000}-w^{2001}$ 的值.

6. 证明:$\underbrace{44\cdots4}_{n个}\underbrace{88\cdots8}_{(n-1)个}9$ 是完全平方数.

7. 已知存在正整数 n,能使整数$\underbrace{11\cdots1}_{n个}$被 1987 整除,

求证:数 $p=\underbrace{11\cdots1}_{n个}\underbrace{99\cdots9}_{n个}\underbrace{88\cdots8}_{n个}\underbrace{77\cdots7}_{n个}$和$q=\underbrace{11\cdots1}_{(n+1)个}\underbrace{99\cdots9}_{(n+1)个}\underbrace{88\cdots8}_{(n+1)个}\underbrace{77\cdots7}_{(n+1)个}$都能被 1987 整除.

8. 两个自然数的和比这两数的积小 1000,且其中一个自然数是完全平方数,求其中较大的一个自然数.

9. 确定 m 的值,使 $x^2+2xy-8y^2+2x+14y+m$ 能分解为两个一次式的积.

第二单元

分 式

●知识要点及延伸拓展

1. 理解分式的意义，分式为零的条件，分式无意义的条件，分式的基本性质；
2. 掌握分式运算的方法和技巧(通分、分类、分段、分步、裂项等)；
3. 会解分式方程、化简分式并求值；
4. 熟练掌握去分母的方法(直接去分母或换元法)，并能运用 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}(a,b>0)$ 等灵活解题.

●竞赛能力要求

1. 熟练运用分式的意义、性质解决有关分式为零、分式值有意义等有关问题；
2. 会熟练运用分式运算的方法和技巧进行分式的求值、化简，会解分式方程；
3. 能运用分式的有关知识进行命题的证明；
4. 能将分式的有关知识运用到实际问题中，解决实际问题.

●赛题解说

例 1 (1)当 x 为________时，$\frac{1}{3-x}$的值为正；

(2)当 x 为________时，$\frac{-x^2}{x^2+1}$的值为负；

分析：当分子与分母同号时，分式值为正，当分子与分母异号时，分式值为负(零除外).

解：(1)因为分子为 1，所以当 $3-x>0$ 即 $x<3$ 时，分式的值为正；

(2)因为 $x^2+1>0$，$-x^2<0$，当 $x\neq 0$ 时，$\frac{-x^2}{x^2+1}$的值为负.

评说：注意要使分式有意义，须使分母不为零，但分子是零时，分式的值为零.

例 2 求使分式$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}$无意义的 x 的值.

分析：分式的分母为 0 时，分式无意义.

解：要使分式无意义，只需使