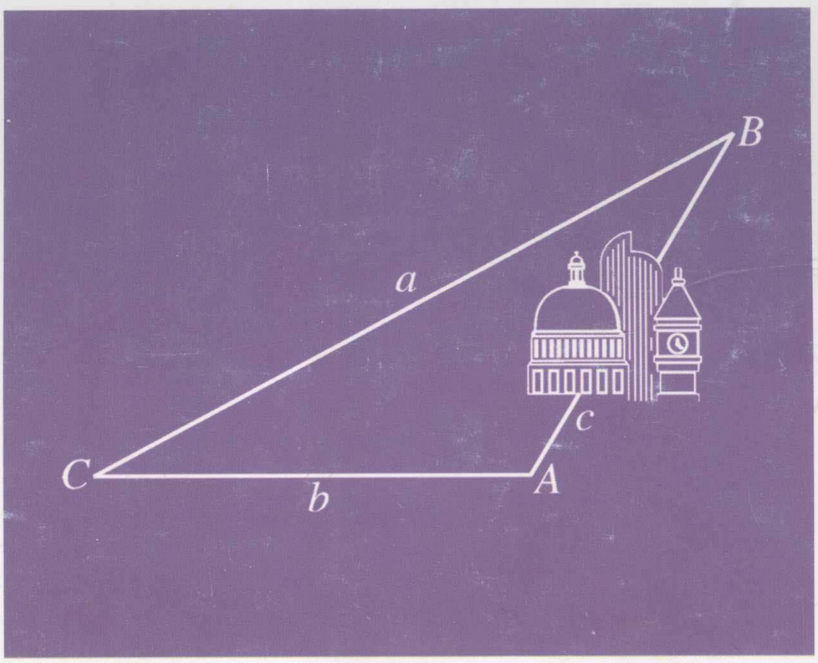
经全国中小学教材审定委员会2004年初审通过

Mathematics

普通高中课程标准实验教科书（必修）

数学

第四册



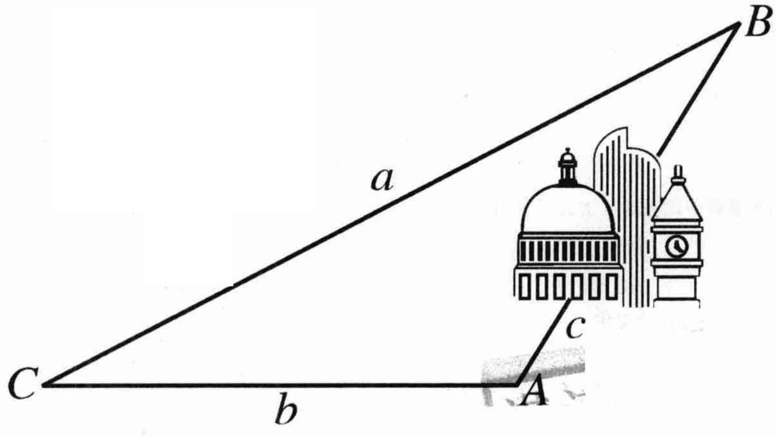
湖南教育出版社

Mathematics

普通高中课程标准实验教科书（必修）

数学

第四册



湖南教育出版社

主　　编　张景中　陈民众
执行主编　李尚志

本册主编　查建国
编　　委　罗培基　贺仁亮　郑志明　孟实华

普通高中课程标准实验教科书（必修）
数　　学
第四册
责任编辑：孟实华　甘　哲　邹伟华
美术编辑：肖　毅
技术插图：徐　航
湖南教育出版社出版发行（长沙市韶山北路643号）
网　　址：http://www.hneph.com
电子邮箱：postmaster@hneph.com
湖南省新华书店经销
湖南新华印刷集团有限责任公司(邵阳)印刷
890×1240　16开　印张：7.75
2004年6月第1版　2004年6月第1次印刷
ISBN7—5355—4201—8/G·4196
定　价：9.20元

揭示客观事物中蕴含的数学模式

在自然现象中，日月星辰的运行轨道，风霜雨雪的气候变化，灾害性天气的形成及其影响范围，蕴含着数学模式；在技术科学中，航天器的发射与返回，摩天大楼的设计与施工，原子能的开发与利用，蕴含着数学模式；在生命科学中，生命的奥秘，DNA 的双螺旋结构，人类基因组测序，蕴含着数学模式；在环境科学中，地球大气臭氧层的破坏，人工合成物对生态环境的污染，生物种群的灭绝对生态链的影响，蕴含着数学模式；在经济科学中，经济的过热和过冷，股票的涨和跌，银行储蓄利率的高低变化，蕴含着数学模式．总之，在所有科学——自然科学、技术科学、社会科学、经济科学、人文科学等研究的客观事物中都蕴含着数学模式．抽象、概括并揭示出客观事物背后蕴含的数学模式，进一步思考和研究这些数学模式是数学发展的不竭源泉．

本册讨论和研究三种不同的数学模式——三角形，数列和不等式．

三角形可以说是最简单的平面几何图形，各种实际测绘问题蕴含的一种数学模式就是三角形．初中阶段定性地讨论三角形的性质，现在我们要定量地讨论三角形的性质，即讨论三角形中边和角之间的一些定量的基本关系式．利用这些定量的关系，在各种实际测量问题中，可以借助一些容易测量的数据求出其它

不易被直接测量的数据.

变量和函数是描述事物运动和变化的最重要的数学工具之一，数列就是当变量呈离散变化状态时的一种数学模式，正是由于数列变化的离散性，计算机就大有用武之地，可以计算出数列的成千上万项来观察数列的变化情况. 教育贷款问题、储蓄收益问题、放射性物质的衰变，物种种群数量问题等蕴含的数学模式就是数列. 我们将讨论最简单的两类数列，即等差数列和等比数列，为研究更复杂的数列奠定必要的基础.

不等关系与相等关系都是客观事物的基本数量关系，在现实世界和日常生活中存在着量的不等关系，速度有快慢、效率有高低、收益有多少都是不等关系的例子. 技术问题的最优化设计，工业、农业、商业、交通运输业、军事、经济计划、管理等领域的最佳决策中，蕴含的数学模式就是不等式. 我们将学习不等式的基本性质，并通过一些实际事例介绍一种具体的优化模型——线性规划.

同学们通过本册的学习，不但应该掌握解三角形、数列和不等式中涉及的基本知识和基本技能，还应该主动地发现日常生活所接触的具体事物中蕴含的数学模式，逐步形成和努力发展数学应用意识，走进数学应用的广阔天地！

作　者

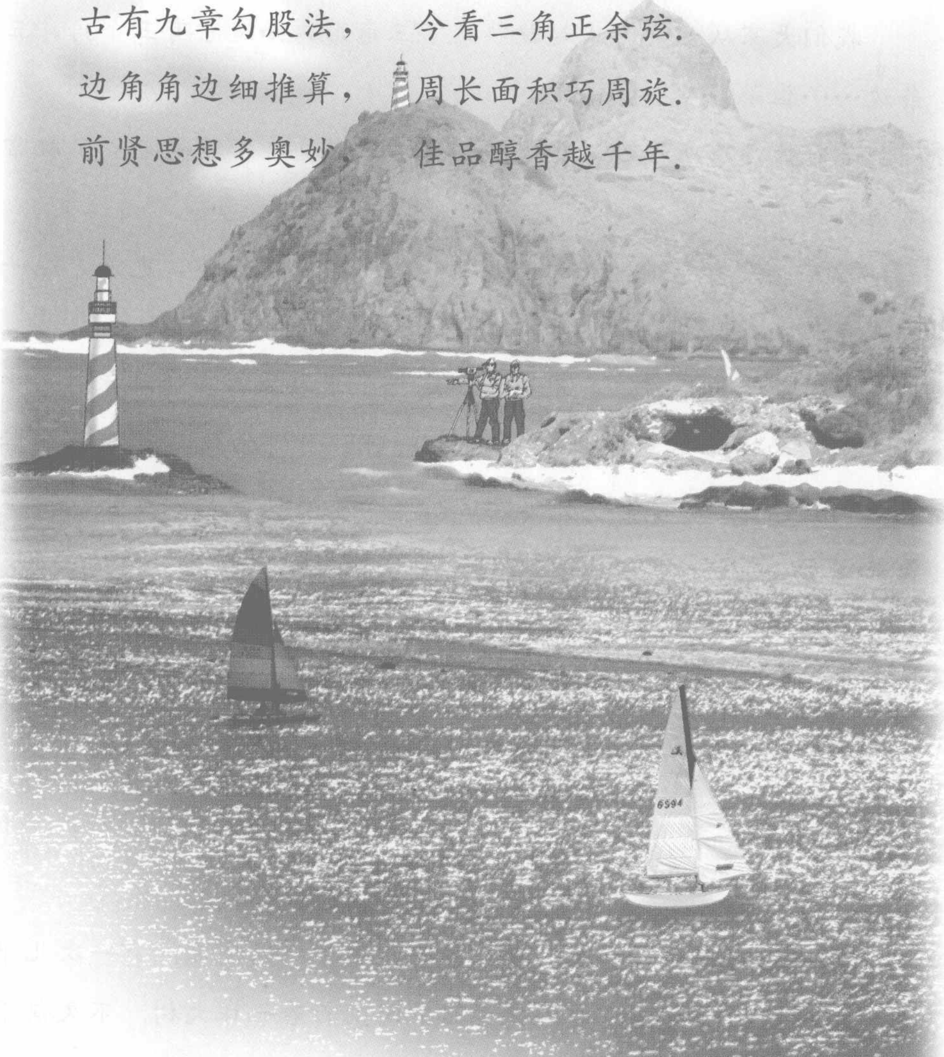
2004 年 5 月

目录

第8章

解三角形

近测高塔远看山，　量天度海只等闲.
古有九章勾股法，　今看三角正余弦.
边角角边细推算，　周长面积巧周旋.
前贤思想多奥妙，　佳品醇香越千年.



三条边和三个内角是三角形最基本的六个元素. 由这六个元素中的三个元素（其中至少要有一条边）去定量地求出三角形的其余的边和角的过程叫作解三角形. 本章学习解三角形及其在各种测绘问题中的应用.

问题探索

神奇的三角形

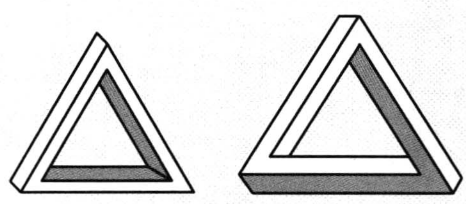
百慕大三角位于百慕大群岛、波多黎各国和佛罗里达半岛之间.

我们大家从儿童时代起就熟悉了三角形，知道它有三个角，三条边……但是：

你可能没有听说过：神秘的百慕大三角，在那里轮船和飞机常常消失得无踪无影！

你可能没有想过：人的两只眼睛去观察一个物体，也能产生一个三角形；

你可能没有看过：在描绘一个实际上不可能存在的物体时，平面上画出的图形有欺骗性. 如图 8-1，图(a)的物体是很容易实际构作的，而图(b)则是彭罗斯提出的一个不可实现的对象——彭罗斯三角形；



(a)　　(b)

图 8-1

你可能没有试过：在水洼的帮助下测量树的高度. 有一次儿子与父亲一起经过庭园，看见在庭园中间生长着一棵大树. 不久前下过雨，并且在庭园里积了许多不大的水洼. 儿子问父亲："这棵树的高度是多少？"父亲回答："我们不要猜，可以设法计算它的高度. 我知道自己身高是 180 cm，眼睛位置的高度等于 170 cm，我的步伐长等于 90 cm. 现在我这样站着，使得我能见到树顶在该水洼中的影子. 从我到影子有 3 步，从影子到树有 30 步."你能根据故事所描述的情形（图 8-2)，算出树的高度吗？

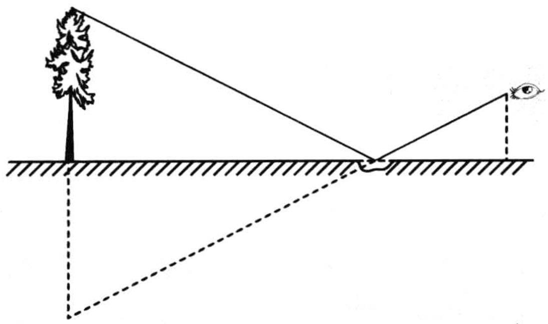


图 8-2

你可能没有做过：在不过河的情况下，利用测角仪、皮尺，确定这河岸一侧 A，B 两点距河对岸电视塔点 C 处的距离（如图 8-3）.

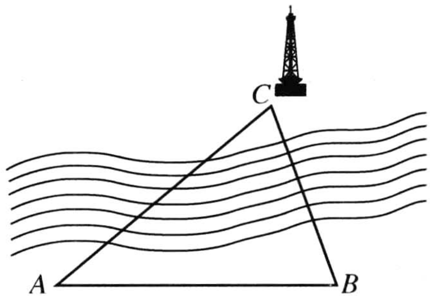


图 8-3

又如，在有建筑物阻挡的情况下，如何测量该建筑物两侧 A，B 两点间的距离（如图 8-4）；

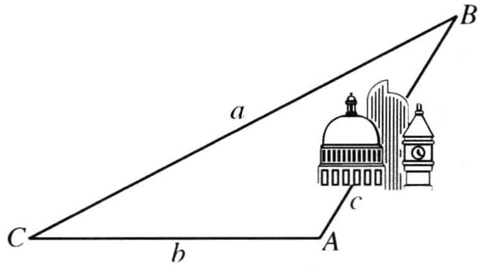


图 8-4

你可能没有分过：在一块三角形形状的地区上打 4 口井. 现要把这地区分成小区，使这些小区有同样的形状、相等的面积，并且在每一小区上有一口井. 怎样划分？

以上种种都与三角形有关.

8.1 正弦定理

现实生活中涉及的测绘问题有很多，如：测量河宽、山高等，往往由于地形条件的制约，有一些数据不易被直接测量．这时就需要我们利用一些易测量的数据，然后通过计算求得不易被直接测量的数据．

问题探索中提出一个实际问题（如图 8-3），在河岸一侧有 A，B 两点，需要确定这两点距河对岸的电视塔点 C 处的距离．现可以测量 AB 的长以及图中角 A 和角 B 的大小，如何利用这三个条件去求 AC，BC 的长度呢？

为了解决这类问题，我们先来学习三角形中边、角及面积之间的一些基本关系．

如图 8-5 所示，对任意 $\triangle ABC$，以 $\triangle ABC$ 的顶点 A 为坐标原点，AB 边所在直线为 x 轴，建立直角坐标系．

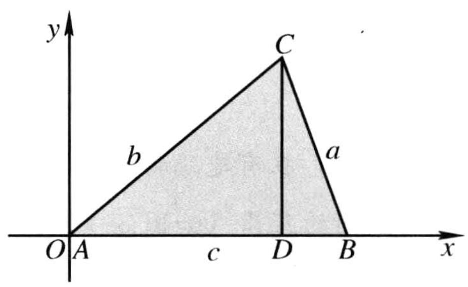


图 8-5

设 a，b，c 分别为 $\triangle ABC$ 中 A，B，C 所对边的边长，CD 为 AB 边上的高，则点 B，C 的坐标分别为 $B(c,0)$，$C(b\cos A,b\sin A)$，$|CD|=b\sin A$．于是，$\triangle ABC$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

同理可得，　$S=\frac{1}{2}ac\sin B$ 和 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$.

正弦定理还可以利用向量和其他方法来证明，请你尝试一下．

这就是说，三角形的面积等于任意两边与它们的夹角的正弦值之积的一半．

将等式 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$ 中的每个式子都除以

$\frac{1}{2}abc$，得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

在三角形中，各边与它所对角的正弦的比值相等，这个结论就叫作**三角形的正弦定理**（sine theorem of triangles）.

在 $C=90°$，即 $\triangle ABC$ 为直角三角形的情况下，由 $\sin C=1$，得 $a=c\sin A$，$b=c\sin B$，因此，正弦定理是直角三角形相应结论的一个推广.

正弦定理是由伊朗著名的天文学家阿布尔-威发（公元 940—998）首先发现与证明的. 中亚细亚人阿尔比鲁尼（公元 973—1048）给三角形的正弦定理作出了一个证明. 也有说正弦定理的证明是 13 世纪的阿塞拜疆人纳速拉丁在系统整理前人成就的基础上得出的.

例 1 在本节开头的实例（如图 8-3）中，我们测得如下数据：$AB=400$ m，$A=45°$，$B=60°$，求 AC 和 BC.

解 $\because$ $A=45°$，$B=60°$，

$\therefore$ $C=180°-(45°+60°)=75°$.

$\because$ $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}$，

$\sin 75°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

$\therefore$ $BC=\dfrac{AB\sin A}{\sin C}=\dfrac{400\sin 45°}{\sin 75°}$

$=400(\sqrt{3}-1)\approx 292.82$ (m).

$AC=\dfrac{AB\sin B}{\sin C}=\dfrac{400\sin 60°}{\sin 75°}=\dfrac{200\sqrt{3}}{\sin 75°}$

$=200\sqrt{3}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\approx 358.63$ (m).

上例实际上说明了如果已知三角形两个角和一条边的大小，则由三角形的内角和为 180°，立刻可得到它的第三个角的值，再利用正弦定理，可算出它的另外两条边的大小.

正弦定理可以用于解决已知两角和一边求另两边和一角的问题.

问题：如果已知三角形的两条边及一条边所对的角的大小，利用正弦定理能够算出三角形的其余的边和角的大小吗？

例 2 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $A=30°$，$c=8$，$a=5$，求 B 和 b（结果保留两位小数）.

解 由正弦定理，得$\dfrac{8}{\sin C}=\dfrac{5}{\sin 30^\circ}$，$\sin C=\dfrac{4}{5}$，

∴ $C\approx 53.13^\circ$ 或 $C\approx 180^\circ-53.13^\circ=126.87^\circ$.

（1）当 $C=53.13^\circ$ 时，$B=180^\circ-(30^\circ+53.13^\circ)=96.87^\circ$，

$b=\sin 96.87^\circ\cdot\dfrac{5}{\sin 30^\circ}\approx 9.93$.

（2）当 $C=126.87^\circ$ 时，$B=180^\circ-(30^\circ+126.87^\circ)=23.13^\circ$，

$b=\sin 23.13^\circ\cdot\dfrac{5}{\sin 30^\circ}\approx 3.93$.

因此，$B=96.87^\circ$，$b=9.93$ 或 $B=23.13^\circ$，$b=3.93$.

在三角形中，已知一个角的正弦值，可以通过计算器查得相应的锐角，并通过角所在象限确定这个角的其他值.

例 3 在△ABC 中，已知 $A=30^\circ$，$c=3$，$a=5$，求 B 和 b（结果保留两位小数）.

正弦定理也可以用于解决已知两边及一边的对角求另两角和一边的问题.

解 由正弦定理，得

$$\sin C=3\cdot\frac{\sin 30^\circ}{5}=0.3,$$

$$C\approx 17.46^\circ\text{ 或 }C\approx 180^\circ-17.46^\circ=162.54^\circ.$$

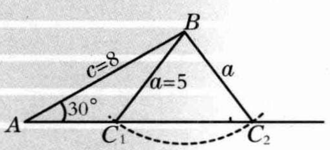
∵ $A=30^\circ$，

∴ $C<150^\circ$.

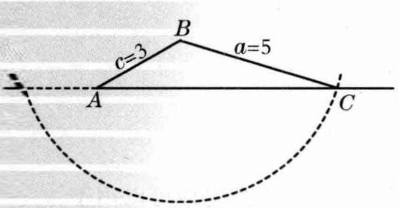
由此得到 $C=17.46^\circ$，$B=180^\circ-(30^\circ+17.46^\circ)=132.54^\circ$.

因此，$B=132.54^\circ$， $b=\sin 132.54^\circ\cdot\dfrac{5}{\sin 30^\circ}\approx 7.37$.

为什么例 2 有两解，而例 3 只有一解呢？



例 2 图



例 3 图

通过根据已知条件利用几何作图作三角形，可以清楚地看到例 2 有两解，而例 3 只有一解.

一般地，已知两边和其中一边的对角解三角形，有两解、一解、无解三种情况.

1. 当 A 为锐角时，如图 8-6 所示.

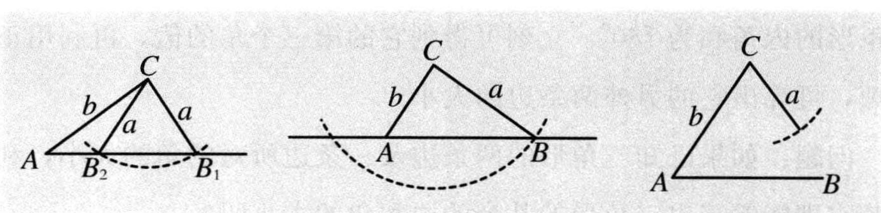


图 8-6

2. 当 A 为直角或钝角时，如图 8-7 所示.

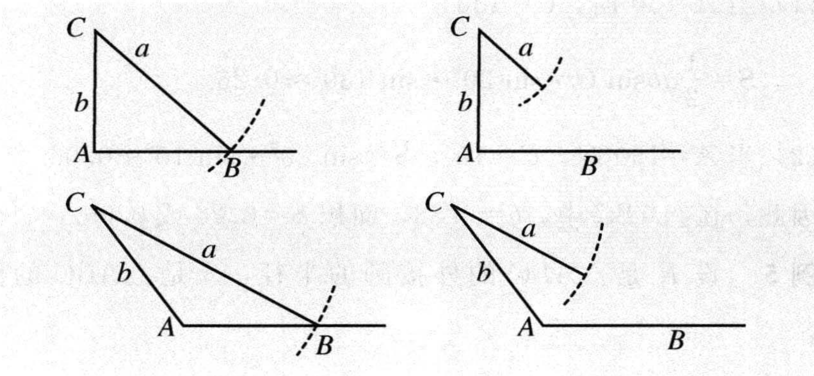


图 8-7

问题：在直角三角形中，正弦定理表明：一边的长同它所对的角的正弦值之比是一个常数，这个常数的几何意义是什么？

对于一般的三角形，这个常数的几何意义又是什么？

对锐角$\triangle ABC$，设圆 O 是$\triangle ABC$ 的外接圆，R 是圆O 的半径，过 B 作圆O 的直径BD，联结CD（如图 8-8）．由于$\angle CDB$ 和$\angle CAB$ 都是圆 O 中同一条弧所对的圆周角，利用平面几何中同弧所对的圆周角相等的定理，得$\angle D=\angle A$，$\angle DCB$ 是半圆弧所对的圆周角，半圆弧上的圆周角一定是直角，所以$\angle DCB=90°$．于是，$a=BC=BD\sin D=2R\sin A$．因此，

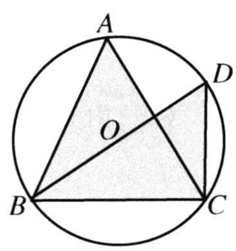


图 8-8

对直角三角形、钝角三角形这个结论也成立．请同学们自己证明．

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

这个结果称为**扩充的正弦定理**（extended sine theorem），并且解释了$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$的几何意义，这个常数实际上是$\triangle ABC$ 的外接圆的直径．

正弦定理的变形：

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

和 $a=2R\sin A$，

$b=2R\sin B$，

$c=2R\sin C$．

例 4 在$\triangle ABC$ 中，已知它的外接圆半径 $R=1$，$a=1$，$B=20°$，求 b 及$\triangle ABC$ 的面积S．

解 由扩充的正弦定理，得 $b=2R\sin B=2\sin 20°\approx 0.68$，$\sin A=\frac{a}{2R}=\frac{1}{2}$，可知 $A=30°$或 $150°$．

你能够用作图的方法看出满足已知条件的三角形确实有两个吗？

（1）当 $A=30^\circ$ 时，$C=130^\circ$，

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\sin 20^\circ\cdot\sin 130^\circ\approx 0.26.$$

（2）当 $A=150^\circ$ 时，$C=10^\circ$，$S=\sin 20^\circ\cdot\sin 10^\circ\approx 0.06.$

因此，在 $\triangle ABC$ 中，$b=0.68$，面积 $S=0.26$ 或 0.06.

例5 设 R 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径，S 是 $\triangle ABC$ 的面积，求证：

（1）$S=\dfrac{abc}{4R}$；

（2）$S=2R^2\sin A\sin B\sin C$.

证明 （1）由扩充的正弦定理，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$，

所以 $$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{abc}{4R}.$$

（2）由 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，得

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=2R^2\sin A\sin B\sin C.$$

练习

1. 在 $\triangle ABC$ 中，A，B，C 所对边分别为 a，b，c，则 $\dfrac{2a}{\sin A}-\dfrac{b}{\sin B}-\dfrac{c}{\sin C}$ 的值为________.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=1$，$b=\sqrt{2}$，$A=30^\circ$，则 B 等于________.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$b=\sqrt{3}$，$B=60^\circ$，$c=1$，求 a 和 A，C.

4. 已知 $c=\sqrt{3}$，$\angle A=45^\circ$，$\angle B=60^\circ$，求 $\triangle ABC$ 的外接圆面积.

习题 8.1

学而时习之

1. 在$\triangle ABC$中，$a=7$，$B=30^\circ$，$C=85^\circ$，求 c.
2. 在$\triangle ABC$中，$a=13$，$b=21$，$A=40^\circ$，求 C.
3. 在$\triangle ABC$中，$a=8$，$b=7$，$B=60^\circ$，求 c.
4. 在$\triangle ABC$中，$a=3$，$c=3\sqrt{3}$，$A=30^\circ$，解这个三角形，并求$\triangle ABC$的面积.
5. 在$\triangle ABC$中，已知 $a=4$，$b=4\sqrt{2}$，$\triangle ABC$的外接圆面积为 16π，求三内角.

温故而知新

6. 在$\triangle ABC$中，如果 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$，求证：$C=90^\circ$. 这个命题的逆命题是否成立？试证明你的结论.
7. $\triangle ABC$中，$C=2B$，B，C所对应的边分别为 b，c，试求$\frac{c}{b}$的取值范围.

8.2 余弦定理

在问题探索中，我们给出了这样一个实例：如图 8-4，在一建筑物两侧有 A，B 两点，现要测量 A，B 两点间的距离.

我们可以测量 AC，BC 的长以及图中角 C 的大小，如何利用这三个条件去求 AB 间的长度呢？这一问题的实质是：利用两边和夹角去求第三边.

如图 8-9，以$\triangle ABC$的顶点 C 为坐标原点，CA 边所在直线为 x 轴，建立直角坐标系. 点 A，B 的坐标分别为 $A(b,0)$，$B(a\cos C,a\sin C)$.

根据两点间的距离公式，得

$$\begin{aligned} c^2 &= (a\cos C-b)^2+a^2\sin^2 C \\ &= a^2\cos^2 C-2ab\cos C+b^2+a^2\sin^2 C \\ &= a^2+b^2-2ab\cos C, \end{aligned}$$

即 $$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

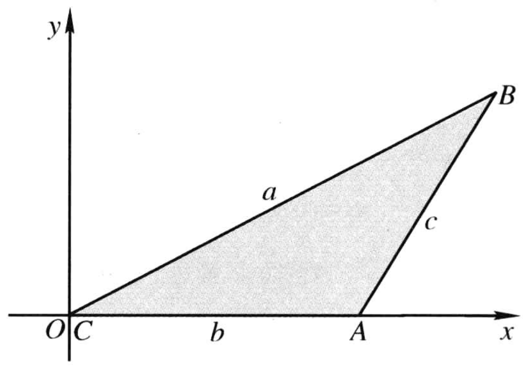


图 8-9

同理可得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B.$$

由上可知：三角形的一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦值乘积的两倍，这个结论叫作**三角形的余弦定理**(cosine theorem of triangles). 即

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

余弦定理也可以写成下面的形式

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$
$$\cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}$$

探索问题：余弦定理的这种证明方法是几何问题代数化的证明方法，即解析法，你能给出余弦定理的其他证明方法吗？

你是否还记得在第4章《向量》中，由公式

$\overrightarrow{AB}^2=(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})^2=\overrightarrow{CB}^2+\overrightarrow{CA}^2-2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$

得出过余弦定理？

当 $C=90°$ 时，余弦定理变形为 $c^2=a^2+b^2$，因此勾股定理是余弦定理的特例.