核心笔记 内部讲稿

黑博士品牌标志

BLACK DOCTOR 黑博士 ◎黑博士考研信息工作室◎ WORKROOM BEIJING

黑博士考研 权威精品 数学系列

2004年硕士研究生入学考试

考研数学

成功指南

组编 黑博士考研信息工作室

主编 西安交通大学十教授考研班

综合性典型题+难度略高考题+预测命题趋势

- 名师预测猜题
- 考研命题揭密
- 高分技巧透视
- 新典型题精析
- 真正高命中率
- 全新精准信息

OK!

理工类

世界图书出版公司

内 容 简 介

本书作为考研数学的复习指南，紧扣考研主要是考核解题能力的特点，侧重精讲解题的思路、方法和技巧，同时对高等数学、线性代数、概率论与数理统计中的基本概念、基本理论、基本方法（简称《三基》）进行简明扼要、全面系统的叙述、总结，概括和阐述力求精练、清晰、浓缩，突出重点。

本书的鲜明特色是针对性强，例题精选于我们多年在本考研班上的授课资料及十多年考研试题中的典型题与综合题。同时，在每章（节）中均附有适当数量的预测强化训练题，相应配置了简明扼要的解题方法分析。本书是作者多年研究成果和辛勤劳动的结晶，我们深信是一本极具参考价值的复习用书！

本书可作“考研辅导班”的教材，亦是考研的读者的良师益友，同时还是本科生学习数学的指南。

图书在版编目（CIP）数据

考研数学成功指南 / 西安交通大学 10 教授考研辅导班编

（黑博士考研数学系列）

—西安：世界图书出版西安公司，2002.8

ISBN 7 - 5062 - 5600 - 2

Ⅰ. 考… Ⅱ. 西… Ⅲ. 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核定（2002）第 058590 号

黑博士考研数学系列

2004 年考研数学成功指南

西安交通大学 10 教授考研班　主　编

焦 毓 本　责任编辑

黑博士考研工作室　总 策 划

世界图书出版西安公司 出版发行

（西安市南大街 17 号　邮编：710001　电话：（029）7279676）

西安建筑科技大学印刷厂

各地新华书店经销

开本：787×1092（毫米）1/16　印张：110　字数：2175 千字

2003 年 4 月第 2 版　2003 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 7-5062-5600-2/G・81

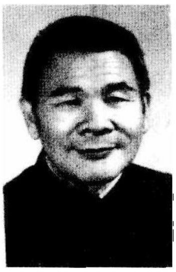
Wx 5600　共三册定价：125 .00 元

若发现黑博士系列图书有倒页、白页、少页及影响阅读的质量问题请拨打下面电话联系调换：（029）4233161　4235409

作者简介

高应才教授

高应才，西安交通大学数学教授，著名考研辅导专家，研究生指导教师，西安交大10教授考研班创始人，负责日常考研辅导班工作，主持偏微分方程理论及其数值分析，生命科学及地下水资源等领域的研究工作，发表论文35篇，获省部级科技进步奖和成果奖7次，出版著作《数学物理方程及其数值解法》、《高等工程数学》、《岩石力学名词词典》、《应用数学方法》、《研究生入学考试数学复习指南》等。长期从事考研辅导，历年来以猜题命中率高而著称。全身心投入考研辅导及组织工作，讲课认真，准备充分，举例典型，针对性强，被考研班学生喻为“最好的考研数学老师之一”。



潘鼎坤教授

潘鼎坤，西安建筑科技大学数学教授，著名考研辅导专家，曾任陕西省工科数学教学委员会副主任，《高等数学研究》杂志主编，省数学学会理事，常务理事，计算物理学会理事，有五十余年教龄，为研究生授课二十多年，编著《高等数学习题详解·释疑·指导》、《线性代数引论》（译著），《科技人员用之矩阵方法》（与刘则刚合译）、《高等数学内容提要及解题指导》等。被评为省优秀教师，享受国务院颁发的政府特殊津贴，深受学生欢迎，考研班学生誉为“听潘老师讲数学是一种高级享受！”

龚怀云教授

龚怀云，西安交通大学数学教授，著名考研辅导专家，研究生导师。教育部工科数学课程指导委员会（研究生组）委员，《工程数学学报》常务副主编兼总编辑。在科研方面，主要从事泛函分析的研究工作，对概率度量理论这一泛函分析与概率论的边沿学科进行了系统、深入的研究，发表论文约50篇，主要有《关于概率赋空间上的局部有界》、《概率度量空间的纲定理》等。在教学方面，多年从事本科、硕士、博士研究生的教学工作，出版有《非线性分析》、《应用泛函分析》、《实变函数与泛函分析引论》、《数学分析》、《研究生高等数学入学考试指南》等，教学深入浅出，针对性强，富有启发性，颇受学生好评，全国为数不多的“数学辅导专家”之一。

周家良教授

周家良，西安交通大学数学教授，著名考研辅导专家，研究生指导教师，全国为数不多的“概率命题辅导专家”之一。长期任高等数学和概率统计教学工作，教学经验丰富；课堂气氛活跃，教学效果显著，多次获西安交大校教学奖和教学改革奖，王宽诚教学奖。多次参加全国概率统计考试命题工作，任组长，出版著作《概率论》、《应用统计方法》、《应用随机过程》、《概率论和数理统计的学习与提高》、《数学考研教程》，发表论文26篇，考研辅导有深入的研究分析，猜题命中率高，讲课中归纳总结条理清楚、重点突出、思路明确，语言风趣生动，获得学生高度评价。曾参与《研究生入学考试数学复习考点分析》等考研辅导及其相关资料的编写工作。

特别说明

本套丛书作者多数为北京大学、清华大学、中国人民大学、西安交通大学、复旦大学、同济大学、上海交通大学、南京大学、浙江大学、武汉大学、四川大学的考研辅导重量级权威教师。本套丛书在编写过程中有关部分参考了北京大学、清华大学、中国人民大学、西安交通大学“十教授考研班”、北京导航考研班、北京领航考研班、上海精英考研班、济南高联考研班等全国著名大型权威考研辅导班所发的内部讲义、笔记和内部资料，并参阅了其中的部分精华内容。同时也参考了一些正式出版的相关权威精品资料。本套丛书著者均属“考研辅导实力派”，多数直接参加过多年研究生入学考试的命题和阅卷工作，洞察和深谙命题规律，教考经验独特，著作难度略高于考题；本套丛书汇集著者多年考研辅导经验和考研辅导实践之最新成果，针对性强、信息量大、方向感强、预测命中率高！该套丛书自出版以来，以其出人意料的独特效果受到广大考生的热烈欢迎与强烈拥戴，产生强烈反响。在此对为我们提供资料和信息的辅导老师表示衷心的感谢。

最后，诚祝考生复习顺利，考研成功！“从绝望中寻找希望，人生终将辉煌”！

黑博士考研信息工作室

2003 年 4 月于北京

前　言

为了帮助广大报考硕士研究生的考生，能在较短时间内，准确理解和熟练掌握国家教育部颁布的，从 2003 年起试行的《数学考试大纲》的内容要求，全面提高解题能力，编者们仔细研究了近年来考研命题特点，并结合我们几十年的工科数学教学体验，以及从事考研辅导的实际经验，编写出这本适应 2004 年硕士研究生入学考试《考研数学成功指南》的教学用书。

本书对高等数学、线性代数、概率论与数理统计三大部分考研大纲中所要求的知识点、考点、涉及的基本概念，基本理论，基本方法（简称《三基》）进行简明、扼要，全面系统 的叙述、总结，概括和阐述力求精练清晰，突出考试重点，以便读者能事半功倍地掌握基本内容。因为大学本科原教材一般较厚，内容很多，枝繁叶茂，若无辅助读物而直接复习教材，不少读者常常会分不清主次，抓不住重点和要点，有了这样一本“指南”，便会帮助读者指明正确航向，分清哪些是枝叶，哪些是树干，哪些是“芝麻”，哪些是“西瓜”，朗读者不作虚功，不走冤枉路。

本书的鲜明特色是针对性很强，在数学考试大纲之内的必涉及，在数学考试大纲之外的一概不讲，书中的例题精选于我们长期在本考研班上的数学内部资料，以及十多年（1987 年开始）来全国研究生数学入学统一考试中典型题与综合题。讲这些试题，或者在解题前分析、引导，或者在解题后指出关键所在，或者一题多解，开阔思路。同时，还统计了各章在历年（1997 ~ 2003 年）试卷中所占的分数，并列成了表格，以说明该部分内容在整个数学考卷中的地位、作用。

本书典型例题取舍中，认真做到下述诸点：

例题构成大体如下：《三基》部分题约占总数的 $\frac{1}{4} \sim \frac{1}{3}$，历年研究生入学试题约占 $\frac{1}{2}$，剩下部分为综合性较强、难度较大的题.

大多数例题的难易程度与研究生考题相当，但也有少部分题的难度稍稍高出研究生的入学考试题。

同一类型的例题都编在一起，分类编写，以便分析比较。

多数例题的讲解分三步：分析（或指出解题思路，或指出它的重要性，或指出本题的特点）；解法（写出解题过程），97 年起的试题都标出年份、分数；评述（指出这类题的地位、作用、解法特点，在历年考试中出现的频率，帮助读者预测来年考试中出现的可能性大小，等等）。

有的例题或习题的右上角处附有星号（＊），意指这个题型是十分典型的题，也是常考的题型。

本书在每章（节）中均附有适当数量的强化训练题，全部强化训练题均附有精

练的解题方法，以便读者学习。我们认为通过这些强化训练题的训练，能使考生达到融会贯通，举一反三，进一步提高读者的解题能力。

我们这本书，不仅是考生的良师益友，也是一、二年级大学生学习数学的指南。

按照章(节)的前后次序，本书各部分的编者依次是：潘鼎坤教授(一元函数微分学与积分学)，龚怀云教授(多元函数微分学与积分学)，高应才教授(无穷级数与微分方程，线性代数)，周家良教授(概率论与数理统计)，最后，由高应才教授统一整理完稿。

由于时间仓促，如有不妥和不当之处，恳请读者批评、指正，不胜感激。

编者

2003.4

目　　录

第一部分　一元函数微分学

第二部分　一元函数积分学

第三部分　多元函数微分学

第四部分　多元函数积分学

第五部分　级数与微分方程

第六部分　线性代数

第七部分　概率论与数理统计

第一部分　一元函数微分学

第一章　函数、极限、连续*

考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　简单应用问题的函数关系的建立　数列极限与函数极限的定义以及它们的性质　函数的左极限与右极限　无穷小和无穷大的概念及其关系　无穷小的性质及无穷小的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

洛必达法则　函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

考试要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示方法,并会建立简单应用问题中的函数关系式。
2. 了解函数的奇偶性、周期性、有界性和单调性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念。
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形。
5. 理解极限的概念,理解函数的左极限与右极限的概念,以及极限存在与左、右极限之间的关系。
6. 掌握极限的性质及四则运算法则
7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法
8. 理解无穷小、无穷大的概念,掌握无穷小的比较方法,会用等价无穷小求极限。
9. 掌握用洛必达法则求未定式极限的方法。
10. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型。
11. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质。

试题分数统计

年　份		97	98	99	00	01	02	03
分	一	9	13	9	9	7	13	8
数	二	16	19	28	16	23	31	18

考试要点分析与题型预测

这一章的考试要点有

1 复合函数,特别是由分段表示的函数的复合函数和由$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,t)\,dt$所确定的复合函数。
2. 有界函数、无界函数、周期函数、奇函数、偶函数、单调函数、反函数等等的概念。
3. 极限定义、极限基本运算法则。
4. 利用两个重要极限求极限。
5. 无穷小的基本运算法则,等价无穷小因子代换。

* 函数、极限、连续数学一、数学二要求完全相同

6. 无穷小阶的比较。

7. 利用洛必达法则求未定式. 即会确定$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,1^{\infty},\infty-\infty,0^{0},\infty^{0}$等型未定式的值。

8. 单调有界原理和夹逼定理

9. 连续函数定义

10. 函数间断点的类型

11. 有限闭区间上连续函数的介值定理和最大值最小值定理

12. 零点定理

以上这些都是考试的热点内容,特别:关于极限的基本运算法则,利用洛必达法则求未定式. 在有限闭区间上连续函数的性质,无穷小阶的比较以及利用两个重要极限求极限等部分更是热点中之尤热者,几乎每年都要考到,读者务必熟练掌握。近年来利用单调有界原理,夹逼定理来判断极限的存在,已知极限去确定极限中某些常数,讨论复合函数的连续性和间断点的类型,利用介值定理判断一个连续函数在给定区间上零点的个数等等都是经常出现的题型。

§1－1 一元函数概念

1. 绝对值定义及其运算

绝对值定义 $|x|=\begin{cases} x & 当 x\geqslant 0 \\ -x & 当 x<0 \end{cases}$

绝对值运算 $|a\pm b|\leqslant |a|+|b|$ $\qquad |ab|=|a||b|$

$\left|\frac{b}{a}\right|=\frac{|b|}{|a|}$ $\qquad |a|-|b|\leqslant |a-b|$

$|x|<\varepsilon \longleftrightarrow -\varepsilon<x<\varepsilon$

2. 区间与邻域

开区间$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$

闭区间$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$

半开半闭区间$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$,$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$

a的δ邻域记作$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$

3. **一元函数定义** 设x和y是两个变量,I是一个给定的数集。如果对于每一个数$x\in I$,按照一定的法则总有确定的y值和它对应,则称y是x的**函数**,记作$y=f(x)$,$x\in I$,其中x称作自变量,y称作因变量,I称做函数的**定义域**。f表示x与y间的对应法则,y所取得的值的集合称为$f(x)$的**值域**。

两个函数相同,是指两函数的定义域相同,对应法则相同. 这二者称为函数定义中的两个要素. 至于用什么记号表示自变量,什么记号表示因变量无关重要.

4. **单调函数** 若$x_1\in I,x_2\in I$,且$x_1<x_2$时总有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$则称$f(x)$在I上为**单调增函数**,若当$x_1<x_2$时总有$f(x_1)\geqslant f(x_2)$则称$f(x)$在I上为**单调减函数**。若$x_1,x_2\in I$,且$x_1<x_2$时,总有$f(x_1)<f(x_2)$,则称$f(x)$在I上为**严格单调增函数**,同样定义**严格单调减函数**,单调增函数和单调减函数统称**单调函数**。

5. **有界函数** 设$f(x)$在I上有定义且存在正数M,使$|f(x)|\leqslant M$,则称$f(x)$在I上为**有界函数**。

6. **无界函数** 设$f(x)$在I上有定义,若对于任意正数M,总存在$x_1\in I$,使$|f(x_1)|>M$,则称$f(x)$在I上为**无界函数**。

7. **奇函数、偶函数** 设$f(x)$在I有定义,其中I对称于点$x=0$,当有$f(-x)=-f(x)$时,则称$f(x)$是**奇函数**,当有$f(-x)=f(x)$时,则称$f(x)$是**偶函数**。

8. **周期函数** 若存在最小的正数T,对于$f(x)$的定义域上的每个x值,恒有$f(x\pm T)=f(x)$,则称$f(x)$在其定义域上是以T为周期的**周期函数**。

9. **复合函数** 设$u=\varphi(x)$,$x\in I_1$,$u\in I_2$. 又$y=f(u)$,$u\in I_2$,则$y=f[\varphi(x)]$,$x\in I_1$称作$y=f(u)$与$u=\varphi(x)$的**复合函数**,其中u称做中间变量,I_1是$f[\varphi(x)]$的定义域。

10. **反函数** 设函数$y=f(x)$的定义域为I,$f(x)$的值域为J. 若对于J中的每一个y值,由$y=f(x)$有唯一的一个$x\in I$与之对应,则在J上确定x为y的函数,记为$x=\varphi(y)$,称为$y=f(x)$的**反函数**。

在 xoy 直角坐标系上，$y = f(x)$，$x \in I$ 与 $x = \varphi(y)$，$y \in J$ 表示的是同一曲线，但是 $y = f(x)$，$x \in I$ 与 $y = \varphi(x)$ $x \in J$ 所表示的曲线对称于直线 $y = x$，并且有恒等式 $f[\varphi(y)] \equiv y, y \in J$ 及 $\varphi[f(x)] \equiv x, x \in I$.

反函数存在定理　若函数 $y = f(x)$ 在 I 上严格单调，其值域设为 J，则在 J 上存在严格单调的反函数 $x = \varphi(y)$，其值域为 I，且 $f(x)$ 与 $\varphi(y)$ 具有相同的单调性，又若 $f(x)$ 在区间上连续，则 $\varphi(y)$ 也在区间 J 上连续。

11. **基本初等函数**：　是指常值函数，幂函数 x^a，指数函数 $a^x(a > 0, a \neq 1)$，对数函数，三角函数，反三角函数等六类函数.

12. **初等函数**　由基本初等函数经有限次的加、减、乘、除复合而成并且能用一个解析式表出的函数称为初等函数.

§1－2　极限、连续

一、极限

1. 数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义

如果一个数列 $a_n(n = 1,2,\cdots)$ 与一个确定的常数 A 之间有如下的关系：任意给定一个正数 ε，无论它怎样小，相应地必有一个正数 $N(\varepsilon)$，使得当 $n > N(\varepsilon)$ 时，不等式

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

成立. 那么称常数 A 为数列 a_n 当 $n \to +\infty$ 时的**极限**. 或者说，a_n 在 $n \to +\infty$ 时**收敛**于 A，记作

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = A$$

而 $a_n(n = 1,2,\cdots)$ 就称为**收敛数列**（注：数列 a_n 中的 n 表示正整数，一般把 $n \to +\infty$ 常简记为 $n \to \infty$）

2. 函数极限的 $\varepsilon - \mathscr{H}$ 定义

如果定义于 $x \geqslant a$ 的函数 $y = f(x)$ 与一个确定的常数 A 有如下关系：任意给定一个正数 ε，无论它怎样小，相应地必有另一个正数 $\mathscr{H}(\varepsilon)$，使得在 $x > \mathscr{H}(\varepsilon)$ 时，不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立，那么称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时的**极限**，或者说函数 $f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时**收敛**于 A，记作

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$

类似地 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ 的定义是：设 $x \leqslant a$，$y = f(x)$ 有定义，对于任意给定一个正数 ε，无论它怎样小，相应地必存在另一正数 $\mathscr{H}(\varepsilon)$，使得在 $x < -\mathscr{H}(\varepsilon)$ 时. 不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$　的定义是：设 $|x| \geqslant a(a > 0)$ $y = f(x)$ 有定义，对于任意给定一个正数 ε，无论它怎样小，相应地必存在另一正数 $\mathscr{H}(\varepsilon)$，使得在 $|x| > \mathscr{H}(\varepsilon)$ 时，不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立. 这里 $x \to \infty$ 视作 $|x| \to +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ 的定义是：设 $x \geqslant a$　$y = f(x)$ 有定义，对于任意给定一个正数 M，无论它怎样大，相应地必存在另一正数 $\mathscr{H}(\varepsilon)$，使得在 $x > \mathscr{H}(\varepsilon)$ 时，不等式 $f(x) > M$ 成立. 当 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ 成立时，我们仍说极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 不存在.

不难依此类推得 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$，$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$，$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ 等等的相应定义

3. 函数极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义

如果定义于 ζ 的某一邻域（点 ζ 本身可以除外）的一个函数 $y = f(x)$ 与一个确定的常数 A 有如下关系：任意给定一个正数 ε，无论它怎样小，相应地必有另一个正数 $\delta(\varepsilon)$，凡是满足 $0 < |x - \zeta| < \delta(\varepsilon)$ 的一切 x，都使不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立. 那么称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x\to\zeta$ 时的**极限**,或者说 $f(x)$ 在 $x\to\zeta$ 时**收敛**于 A,记作

$$\lim_{x\to\zeta}f(x)=A$$

或

$$当\ x\to\zeta\ 时,f(x)\to A$$

我们把 x 从 ζ 的左侧(即 $x<\zeta$)趋近 ζ 记作 $x\to\zeta^-$,而把 x 从 ζ 的右侧(即 $x>\zeta$)趋近 ζ 记作 $x\to\zeta^+$.

在上述 $\varepsilon-\delta$ 定义中,把 $0<|x-\zeta|<\delta$ 换成 ζ 的左邻域:

$$0<\zeta-x<\delta\quad 即\quad \zeta-\delta<x<\zeta$$

就变成了函数 $f(x)$ 在 $x\to\zeta^-$ 时极限的定义. 这时称 A 为 $f(x)$ 在 $x\to\zeta$ 的**左极限**,记作 $f(\zeta-0)$,即

$$\lim_{x\to\zeta^-}f(x)=f(\zeta-0)$$

同理,在上述 $\varepsilon-\delta$ 定义中,把 $0<|x-\zeta|<\delta$ 换成 ζ 的右邻域:

$$0<x-\zeta<\delta\quad 即\quad \zeta<x<\zeta+\delta$$

就变成了函数 $f(x)$ 在 $x\to\zeta^+$ 时极限的定义. 这时称 A 为 $f(x)$ 在 $x\to\zeta$ 的**右极限**,记作 $f(\zeta+0)$,即

$$\lim_{x\to\zeta^+}f(x)=f(\zeta+0)$$

由极限与左、右极限的定义显然可以立即得出:**极限存在的充要条件**是左、右极限均存在且相等.

亦即 $\lim_{x\to\zeta}f(x)=A\leftrightarrow f(\zeta-0)=f(\zeta+0)=A$

凡是考虑分段函数在分界点处函数 $f(x)$ 的极限是否存在时,常常用左、右极限来判定. 同样在研究分段函数在分界点处的连续性和可导性也常常用到左、右极限这两个概念.

4. 关于极限运算的几个基本定理

(1) **单调有界原理** 单调增(减)而有上(下)界的数列必存在极限;

(2) 如果在 $x\to\zeta$(或 $\to\infty$)时,$f(x)\to A$,$g(x)\to B$,则

1) $f(x)\pm g(x)\to A\pm B$; 2) $f(x)g(x)\to AB$;

3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\to\dfrac{A}{B}$ $B\neq 0$; 4) $kf(x)\to kA$,k 是常数;

(3) 如果当 $x\to\zeta$(或者当 $x\to\infty$)时,$f(x)\to A$,$g(x)\to B$,且

$$f(x)\leqslant g(x)$$

则必有

$$A\leqslant B$$

(4) **夹逼定理** 如果在 $x\to\zeta$(或者 $x\to\infty$)时,$g(x)\to A$,$h(x)\to A$,且有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$$

那么当 $x\to\zeta$(或 $x\to\infty$)时,必有 $f(x)\to A$

(5) **洛必达法则** 若(1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在点 ζ 某一邻域内可导,(点 ζ 可以除外)且 $g'(x)\neq 0$,(2) 在 $x\to\zeta$ 时 $f(x)\to 0$,$g(x)\to 0$(或 $f(x)\to\infty$,$g(x)\to\infty$),(3) 在 $x\to\zeta$ 时,$\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\to\lambda$,则有 $\lim\limits_{x\to\zeta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lambda$

5. 两个著名极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, (2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$(或 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$).

6. 在 $x\to\zeta$($x\to\infty$)时收敛于零的函数 $f(x)$ 称为当 $x\to\zeta$(或 $x\to\infty$)时的**无穷小量**,简称**无穷小**. 非零无穷小量的倒数为**无穷大量**.

7. 无穷小阶的比较

设 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 都是当 $x\to\zeta$(或 $x\to\infty$)时的无穷小.

1) 若 $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\to 0$,则称 $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的**高阶无穷小**,而 $\beta(x)$ 称为 $\alpha(x)$ 的**低阶无穷小**,记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$

2) 若 $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\to c\neq 0$,则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为**同阶无穷小**,记作 $\alpha(x)=O(\beta(x))$

3）若$\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} \to 1$，则称$\alpha(x)$与$\beta(x)$为等价无穷小，记作$\alpha(x) \sim \beta(x)$.

无穷小与无穷小阶的比较都是重要的概念，它们将在微分学中得到广泛应用.

8. 关于无穷小的几个基本定理

1）函数$f(x)$在$x \to \zeta$（或$x \to \infty$）时有极限A的充要条件是当$x \to \zeta$（或$x \to \infty$）时，$f(x) - A$为无穷小量；

2）有限个无穷小的代数和也是一个无穷小；

3）有限个无穷小的乘积还是一个无穷小；

4）无穷小与有界变量的乘积仍是无穷小.

二、连续

1. $f(x)$ 在 x_0 连续的定义

如果函数$y = f(x)$在点x_0的某个邻域有定义，而且满足等式

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称函数$y = f(x)$在x_0**连续**.

如引用极限$\varepsilon - \delta$定义，则连续定义为：任给一个$\varepsilon > 0$，相应地有一个$\delta(\varepsilon) > 0$，使得当$|x - x_0| < \delta$时，有不等式　$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$成立.

联系到函数的左、右极限的概念，我们又可进一步定义：如

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \quad 或 \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

成立时，就分别称$f(x)$在x_0**左连续或右连续**.

显然，$f(x)$在点x_0连续的充要条件是$f(x)$在x_0左、右连续.

在上述定义中，令$x = x_0 + \Delta x$，等式又可写成

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

其中Δx表示自变量从x_0到x的变化，称为自变量的**增量**（或叫**改变量**），而$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$是函数$f(x)$当自变量取得增量$\Delta x$后相应地发生的变化，称为函数的增量，记作$\Delta y$，于是上式又可写成

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

这是连续定义的等价表达式，因此所谓函数在某一点连续，就是说，当自变量增量趋于零时，函数的增量是一个无穷小. 这也精确地反映了物理中的连续变化现象.

若函数$f(x)$在(a,b)上每一点处都连续，则称$f(x)$在区间(a,b)上连续，若$f(x)$在(a,b)上连续，且在点a处右连续，在点b处左连续，则称$f(x)$在闭开间$[a,b]$上连续.

2. $f(x)$ 的间断点

如果$y = f(x)$在点x_0不连续，就称它在x_0**间断**，或说x_0是它的**间断点**. 有各种不同的间断点，我们把它分类如下：

（1）若如果在x_0，$f(x_0 - 0)$，$f(x_0 + 0)$都存在，则称间断点x_0为**第一类间断点**，它们又可分为：

1）在x_0，$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$，则称$x_0$为$f(x)$的**可去间断点**. 事实上在这种情况下，重新定义$f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$，就可使$f(x)$在$x_0$连续.

2）$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$，则称$x_0$为**跳跃间断点**.

（2）第一类间断点以外的间断点，称为第二类间断点，在第二类间断点处，$f(x)$的左、右极限至少有一个不存在. 第二类间断点常见的有：

1）当$x \to x_0$，$f(x) \to \infty$，则称x_0为$f(x)$的**无穷间断点**；

2）当$x \to x_0$，$f(x)$振荡发散（譬如$f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$在$x = 0$处附近），则称x_0为$f(x)$的**振荡间断点**.

3. **关于连续函数的几个基本定理**

(1) 有限个连续函数的和、差、积、商(使分母等于零的点除外)仍是连续函数;由有限个连续函数复合起来的函数在它的定义区间内仍是连续函数;

(2) 任何初等函数都在它的定义区间内连续;

(3) **维尔斯特拉斯 *K. Weierstrass* 定理** 如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则$f(x)$在$[a,b]$有界且必有最大值与最小值. 即在$[a,b]$上存在x_1与x_2,使得对$[a,b]$上所有的x,有$f(x_1)\geqslant f(x)$及$f(x_2)\leqslant f(x)$;

(4) **介值定理** 在$[a,b]$上的连续函数$f(x)$必取得介于区间两端点的函数值之间的任何值. 即若$f(a)<\mu<f(b)$(或$f(b)<\mu<f(a)$),则在区间(a,b)内至少有一点ξ,使$f(\xi)=\mu$.

(5) $f(x)$在$[a,b]$连续,若$f(a)f(b)<0$,则在(a,b)内至少有一点ξ使$f(\xi)=0$.

§1-3 典型例题分析及2004考试题型预测

典型题型1. 以下讨论绝对值不等式、函数定义域

例1 解不等式$|x+2|-|x|>1$.

分析 带有绝对值记号的题,一般常据数的绝对值定义去掉绝对值处理之. 像本题$x+2$有正、负两种可能情况,x也有正负两种可能情况,$2\times2=4$,共有四种可能情况,今就四种可能情况分别讨论之.

解 第一种情况$x+2\geqslant0,x\geqslant0$,在此情况下,原不等式为

$$x+2-x>1,\quad 亦即\quad 2>1$$

也就是说,此时,原不等式必然成立,而数集$x+2\geqslant0$与$x\geqslant0$即区间$[-2,+\infty)$与$[0,+\infty)$的共同部分为$[0,+\infty)$. 从而知$[0,+\infty)$上任一数,满足$|x+2|-|x|>1$.

第二种情况$x+2\geqslant0,x<0$. 在此情况下原不等式为

$$x+2-(-x)>1\qquad 即\qquad 2x>-1,\ x>-\frac{1}{2}$$

从而知$(-\frac{1}{2},0)$上任一数,满足不等式$|x+2|-|x|>1$.

第三种情况$x+2<0,x\geqslant0$,此种情况为空集合,无解.

第四种情况$x+2<0,x<0$,此时原绝对值不等式为

$$-x-2-(-x)>1\qquad 亦即\qquad -2>1$$

出现矛盾情况,亦即$x+2<0$与$x<0$的共同部分$(-\infty,-2)$中任一数都不满足原绝对值不等式. 无解.

由上四种情况分析知使原绝对值不等式成立的点集为$(-\frac{1}{2},0)\cup[0,+\infty)$,即所求解为$x>-\frac{1}{2}$.

另法 亦可利用$|a|=\sqrt{a^2}$以及两正数$0<a<b$平方,不等号的方向不变,$a^2<b^2$这两个性质解之.

首先,将原不等式化为$|x+2|>1+|x|$,两边平方得

$$(x+2)^2>1+x^2+2|x|,即\ x^2+4x+4>1+x^2+2|x|$$

化简得$4x+3>2|x|$. 再平方得$16x^2+24x+9>4x^2$.

即
$$4x^2+8x+3>0\qquad 亦即\qquad (2x+1)(2x+3)>0$$

两个不等式的解是使二因子$2x+1$及$2x+3$同号的x值,得

$$x<-\frac{3}{2}\qquad 或\qquad x>-\frac{1}{2}$$

代入原不等式检验,$x<-\frac{3}{2}$不成立,它是属于两边平方后增添的解,应舍去. $x>-\frac{1}{2}$满足原不等式. 故原绝对值不等式的解为$x>-\frac{1}{2}$.

评述 在高等数学的论证和求解中,经常要处理绝对值或绝对值不等式,按照绝对值定义处理绝对值