高等数学

解题指引与同步练习

① 函数、极限与连续

曾令武　吴　满　编著

华南理工大学出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题指引与同步练习/曾令武,吴满编著.—广州：华南理工大学出版社，2008.1

ISBN 978-7-5623-2708-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①曾…②吴… Ⅲ.高等数学—高等学校—解题 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 200962 号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
营销部电话：020-87113487 87111048（传真）
E-mail：scutc13@scut.edu.cn http://www.scutpress.com.cn
责任编辑：欧建岸 乔 丽
印 刷 者：广州市穗彩彩印厂
开 本：787mm×960mm 1/16 **印张**：32 **字数**：645 千
版 次：2008 年 1 月第 1 版 2008 年 1 月第 1 次印刷
印 数：1～5000 册
定价（1～10 册）：48.50 元

版权所有 盗版必究

前　　言

成人高等教育是我国高等教育事业的重要组成部分，它不同于普通高等教育，有着自身的特点．因此，编写、使用适合成人教育特点的教材及辅导用书，是提高教学质量的有力保证．作者从事各类不同层次数学学科的教学近50年，在长期的教学实践中，深知要使学生掌握数学的“三基”（基本概念、基本理论、基本方法），必须要通过一定数量的习题练习才能实现．为了达到这个目标，作者作了一种新的尝试，把辅导与练习合编成一册，即对每章的“三基”内容给予小结，并举例作解题指引，接着安排一些基本练习题给读者反复练习，以便及时巩固“三基”．然后配置适量的拓展题给读者一个充分训练的平台．章末附有习题答案．

本书可作为成人高等教育院校各类专业的辅导用书．对专科学生，书中的拓展题部分及有“*”号标记的内容不作要求．

本书的编写和出版，自始至终得到了华南理工大学继续教育学院有关领导的大力支持，在此向他们表示感谢．

由于水平所限，书中不完善之处，恳请同仁和读者批评指正．

编　者

2007年10月于广州

出版说明

由吴满、曾令武编著的这套教学辅导与练习册,在华南理工大学继续教育学院使用已 10 年,一直得到任课教师和学生的好评,这次出版的是第三次修订本.

学好数学就一定要做习题.我国伟大的数学家华罗庚说过,“学数学不做习题,等于你进了一个宝藏后出来时却是两手空空的”.两位作者从事成人教育多年,十分了解成人教育的特点,即学员都是在做好本职工作的前提下,业余学习,甚至部分学生还需兼顾家庭.因此,如何利用更少的时间完成学习任务是学生面对的实际问题.作者根据多年的教学经验,把辅导与练习合编成一册,对每章的“三基”内容给予小结,并精选一些例题,指引学生掌握解题的要领.然后安排一些基本题型,分类编排,使学生由浅入深地掌握数学的基本知识.最后配置适量的拓展题给学生一个充分训练的平台,使部分学生的学习能力提高一个层次,为以后深造打下坚实的基础.

练习题目都留出空白给学生解题之用,免去再抄题目而省时,任课教师批改作业也很方便.因此,这是一套很实用的教辅工具.

华南理工大学继续教育学院

教学主管院长　金军

函　　数

基本初等函数包括：常数 $y=c$；幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 是常数，且 $\alpha\neq 0$）；指数函数 $y=a^x$（a 是常数，且 $a>0,a\neq 1$）；对数函数 $y=\log_a x$（a 是常数，且 $a>0,a\neq 1$）；三角函数（$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$）；反三角函数（$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot} x$）.

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

初等函数是高等数学研究的主要函数.不是初等函数的函数叫做非初等函数.例如，分段函数 $y=\begin{cases}e^x & (x<0)\\ x^2+1 & (x\geqslant 0)\end{cases}$ 是一个非初等函数，幂指函数 $y=x^{\sin x}$ 也是一个非初等函数.

一、求函数的定义域

所给函数是由数学运算式来表示的初等函数，它的定义域是指能使该算式在实数范围内有意义的全体自变量的值的集合.确定这种函数的定义域时，必须依据以下基本规定：

(1) 分式的分母不能等于 0（例如 $y=\dfrac{1}{\varphi(x)}$，必须 $\varphi(x)\neq 0$）；

(2) 偶次根式下不能小于 0（例如 $y=\sqrt{\varphi(x)}$，必须 $\varphi(x)\geqslant 0$）；

(3) 对数式的真数要大于 0（例如 $y=\ln\varphi(x)$，必须 $\varphi(x)>0$）；

(4) 正、余弦值的绝对值不能大于 1（例如 $y=\arcsin\varphi(x)$ 或 $y=\arccos\varphi(x)$，必须 $|\varphi(x)|\leqslant 1$）；

(5) 表达式由几项组成时，应取各项定义域的公共部分.

例 1　求函数 $y=\dfrac{1}{x-1}+\sqrt{4-x^2}$ 的定义域.

解　依据规定(1)和(2)，必须使

$$\begin{cases}x-1\neq 0\\ 4-x^2\geqslant 0\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}x\neq 1\\ -2\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

成立，在数轴上如图 1-1 所示.

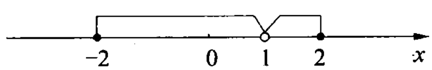

图 1-1

故所给函数的定义域为 $[-2,1)\cup(1,2]$.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

例 2 求函数 $y=\ln(x+2)+\arcsin(x-1)$的定义域.

解 依据规定(3)和(4)，必须使

$$\begin{cases} x+2>0 \\ |x-1| \leqslant 1 \end{cases}$$

成立,即

$$\begin{cases} x>-2 \\ -1 \leqslant x-1 \leqslant 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>-2 \\ 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

它的公共部分是 $0 \leqslant x \leqslant 2$,故所求函数的定义域为$[0,2]$.

例 3 求函数 $y=\sqrt{\lg \frac{5x-x^2}{4}}$的定义域.

解 这是一个复合函数,应从外层到里层求解.首先依据规定(2),必须使

$$\lg \frac{5x-x^2}{4} \geqslant 0$$

然后由对数的性质,当对数值$\geqslant 0$ 时真数必须$\geqslant 1$,即

$$\frac{5x-x^2}{4} \geqslant 1 \quad 5x-x^2 \geqslant 4 \quad x^2-5x+4 \leqslant 0 \quad (x-1)(x-4) \leqslant 0$$

解不等式组 $\begin{cases} x-1 \leqslant 0 \\ x-4 \geqslant 0 \end{cases}$ 即$\begin{cases} x \leqslant 1 \\ x \geqslant 4 \end{cases}$(无解)

解不等式组$\begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ x-4 \leqslant 0 \end{cases}$ 即$\begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \leqslant 4 \end{cases}$ 得 $1 \leqslant x \leqslant 4$

故所求函数的定义域为$[1,4]$.

习题 1－1

基本练习题

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\frac{1}{3x^2-5x+2}$;

解

(2) $y=\sqrt{x^2-2x+2}$;

解

(3) $y=\arcsin\frac{2x-1}{3}$;

解

(4) $y=\frac{\ln(2-x)}{\sqrt[3]{x}}$;

解

(5) $x=\sqrt{2+t}+\frac{1}{\lg(1-t)}$.

解

拓展题

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;

解

(2) $y=\sqrt{\ln(7+5x-x^2)}$;

解

(3) $y=\arccos\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{x^2-1}$;

解

(4) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$.

解

3. 设函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,求 $f(2x-1)$的定义域.

解

4. 设函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,1]$,求 $f(1+\ln x)$的定义域.

解

二、函数值及函数记号的运用

1. 函数值

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,则对于任何一个定数 $x_0\in D$,所对应的函数值记为$y|_{x=x_0}$或 $f(x_0)$.

例 4 求函数 $f(x)=x^2-3x+5$ 在 $x=3, x=x_0+h, x=\frac{1}{a}(a\neq 0)$各点的函数值.

解

$$f(3)=3^2-3\times 3+5=5$$

$$f(x_0+h)=(x_0+h)^2-3(x_0+h)+5$$

$$=x_0^2+(2h-3)x_0+(h^2-3h+5)$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a^2}-\frac{3}{a}+5$$

2. 已知函数 $f(x)$和 $g(x)$的表达式,求函数 $f(g(x))$的表达式

这类问题相当于已知函数 $y=f(u)$,而 $u=\varphi(x)$,求复合函数 $y=f(\varphi(x))$.

例 5 已知 $f(x)=\ln x+1, g(x)=\sqrt{x}+1$,求 $f(g(x))$.

解 因为 $y=f(u)=\ln u+1, u=g(x)=\sqrt{x}+1$,所以

$$y=f(g(x))=\ln(\sqrt{x}+1)+1$$

3. 已知复合函数 $f(g(x))$的表达式,求 $f(x)$的表达式

这类问题的求解有两种方法:

(1) 用变量代换,令 $g(x)=t$,由此解出反函数 $x=\varphi(t)$,代入所给表达式得到 $f(t)$的表达式,再把字母 t 改写成x 就求得$f(x)$;

(2) 将复合函数 $f(g(x))$的表达式凑成 $g(x)$为运算元素的表达式,然后将 $g(x)$置换为 x,则得 $f(x)$的表达式.

例 6 设 $f(x-3)=x^2-5x+3$,求 $f(x)$.

解法 1 设 $x-3=t$,则 $x=t+3$,代入已知表达式得

$$f(t) = (t+3)^2 - 5(t+3) + 3 = t^2 + t - 3$$

所以 $$f(x) = x^2 + x - 3$$

解法 2 将已知表达式凑成以 $(x-3)$ 为运算元素的表达式

$$f(x-3) = x^2 - 5x + 3 = (x-3)^2 + (x-3) - 3$$

将上式中的 $(x-3)$ 置换为 x 得

$$f(x) = x^2 + x - 3$$

习题 1－2

基本练习题

5. 设 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$，求 $f(-1)$，$f(a)$，$f(1-a)$.

解

6. 已知 $f(x)=x^2$，求 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b\neq a)$.

解

7. 设 $\varphi(x)=\begin{cases} 2^x & (x\leqslant 0) \\ 2 & (0<x<1) \\ x-1 & (x\geqslant 1) \end{cases}$，求 $\varphi(-1)$，$\varphi(0)$，$\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$\varphi(2)$.

解

8. 设 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}(x\neq 0)$，求 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解

9. 设 $f(x)=\frac{x}{x-1}(x\neq 0,1)$,求 $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$.

解

10. 设 $f(x)=x^3+1$,求 $f(x^2)$,$[f(x)]^2$ 和 $f(f(x)-1)$.

解

11. 设 $f(x)=2x+3$,$g(x)=6x+K$,且 $f(g(x))=g(f(x))$,求 K.

解

12. 设 $f(x+1)=x^2+2x+4$,求 $f(x)$.

解

13. 设 $f(\sin x)=1+\cos^2 x$,求 $f(x)$.

解

14. 设 $f(x-1)=\frac{2x}{x-1}$,求 $f(x+1)$.

解

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

拓展题

15. 已知 $f(x)=\sin x$,求 $f(1+h)$,$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

解

16. 设 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$,求 $f(x)$.

解

17. 设 $f(\ln x)=x+\ln x+1$,求 $f(x)$.

解

18. 若 $f(x+1)-f(x)=8x+3$,试求函数表达式 $f(x)=ax^2+bx+b$ 中的 a,b 值.

解

三、求反函数

求函数 $y=f(x)$的反函数,就是通过方程 $y-f(x)=0$ 解出 x 用 y 表示的表达式 $x=\varphi(y)$(或记作 $x=f^{-1}(y)$).

习惯上,常将直接函数 $y=f(x)$的反函数 $x=\varphi(y)$改写成 $y=\varphi(x)$(或 $y=$

$f^{-1}(x))$.

反函数的两种表示形式以后都会遇到,我们可以从前后文中知道指的是哪一种情况.

值得注意的是三角函数和指数函数,它们有专用的反函数记号,例如:

正弦函数 $y=\sin x \Leftrightarrow$ 反正弦函数 $x=\arcsin y$(改写成 $y=\arcsin x$)

余弦函数 $y=\cos x \Leftrightarrow$ 反余弦函数 $x=\arccos y$(改写成 $y=\arccos x$)

指数函数 $y=a^x \Leftrightarrow$ 对数函数 $x=\log_a y$(改写成 $y=\log_a x$)

$y=e^x \Leftrightarrow x=\ln y$(改写成 $y=\ln x$)

$y=10^x \Leftrightarrow x=\lg y$(改写成 $y=\lg x$)

例 7 求 $y=\dfrac{1-x}{2+x}$ 的反函数.

解 将函数 $y=\dfrac{1-x}{2+x}$ 写成方程 $2y+xy=1-x$,解出 x 得

$$x=\frac{1-2y}{1+y}$$

它就是所求的反函数.若改写成 $y=\dfrac{1-2x}{1+x}$,则得到反函数为

$$f^{-1}(x)=\frac{1-2x}{1+x}$$

例 8 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sin(x-1)$; (2) $y=10^{x+1}$.

解 (1) 使用正弦函数专用的反函数记号,由 $y=\sin(x-1)$ 得 $x-1=\arcsin y$,解出 x 得

$$x=1+\arcsin y$$

交换变量记号,得 $y=\sin(x-1)$ 的反函数为

$$y=1+\arcsin x$$

(2) 根据指数函数的反函数专用记号,有

$$x+1=\lg y \qquad x=\lg y-1$$

交换变量记号,得 $y=10^{x+1}$ 的反函数为

$$y=\lg x-1$$

习题 1-3

基本练习题

19. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+2}$;

解

(2) $y=2\cos\dfrac{x}{2}$;

解

(3) $y=\arctan(x+4)$;

解

(4) $y=1+\lg(x+2)$.

解

拓展题

20. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt{x^2+1}\,(x\leqslant 0)$;

解

(2) $y=\ln 4-2\ln x$;

解

(3) $y=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$.

解

四、复合函数的分解

复合函数的分解是第二章中求导数运算的一个重要环节，这里必须预先进行适当的训练，其要领是将一个复合函数从外层向里层对照着基本初等函数的标准形式，逐层地分解为简单函数.

例 9 分析函数 $y=\sin^{3}(x^{2}+1)$是由哪几个简单函数复合而成的.

解 函数$y=\sin^{3}(x^{2}+1)$是由

$y=u^{3}$(以 u 为变量的 3 次幂函数)

$u=\sin v$(以 v 为变量的正弦函数)

$v=x^{2}+1$(2 次幂函数 x^{2} 与常数 1 的加法运算)复合而成.

习题 1－4

基本练习题

21. 指出下列函数是由哪几个简单函数复合而成的：

(1) $y=\sqrt{2x+1}$是由______________________________；

(2) $y=5(3-x)^{3}$ 是由______________________________；

(3) $y=\sin x^{2}$ 是由______________________________；

(4) $y=\sin^{2}x$ 是由______________________________；

(5) $y=e^{x^{2}}$是由______________________________；

(6) $y=\sqrt{\tan\frac{x}{2}}$是由________;

(7) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$是由________;

(8) $y=\ln(1-x)^2$ 是由________;

(9) $y=3^{\tan\frac{1}{x}}$是由________;

(10) $y=e^{\sin\sqrt{2x+1}}$是由________;

五、函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,如果存在正数 M,使得当 x 取D 中任何一个值时,对应的函数值 $f(x)$都满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$在 D 上有界;否则,称为无界.

例如,正弦函数 $y=\sin x$,余弦函数 $y=\cos x$ 都是有界函数,这是因为$|\sin x|\leqslant 1$,$|\cos x|\leqslant 1$;而正切函数 $y=\tan x$ 和余切函数$y=\cot x$ 是无界函数.

应该注意,一个函数是否有界,不仅与函数本身的构造有关,还与自变量的取值范围有关.例如,$y=\frac{1}{x}$在$(0,1]$内无界,但在$[1,+\infty)$内有界.

2. 单调性

设 $x_1<x_2$ 是区间 I 上的任意两点,若恒有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad 或 \quad f(x_1)>f(x_2)$$

则称 $f(x)$在区间 I 上单调增加或单调减少.在第三章中利用导数的符号来判定函数的单调性会更加方便,所以这里不做练习.

3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$定义在关于原点对称的区间 I 上,若

(1) $f(-x)=f(x)$,称 $f(x)$为偶函数,它的图形关于 y 轴对称;

(2) $f(-x)=-f(x)$,称 $f(x)$为奇函数,它的图形关于原点对称;

(3) $f(-x)\neq f(x)$且 $f(-x)\neq -f(x)$,称 $f(x)$为非奇非偶函数.

例 10 判别下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=|x|+\frac{\sin^2 x}{1+x^2}$; (2) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,因为

$$f(-x)=|-x|+\frac{[\sin(-x)]^2}{1+(-x)^2}=|x|+\frac{\sin^2 x}{1+x^2}=f(x)$$

所以 $f(x)=|x|+\dfrac{\sin^2 x}{1+x^2}$是偶函数.

(2) 因为 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}$

$$=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

所以 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$是奇函数.

奇、偶函数的四则运算有以下结论:

(1) 两个奇函数的和仍为奇函数;

(2) 两个偶函数的和仍为偶函数;

(3) 两个偶函数的积仍为偶函数;

(4) 两个奇函数的积是偶函数;

(5) 一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数.

运用这些结论来判断一些简单函数的奇偶性,能够提高解题速度.

例 11 下列函数中非奇非偶的函数是[ ].

A. $y=x^4+\cos x$ B. $y=\dfrac{1}{x}+\sin x$ C. $y=\dfrac{1}{x}\cos x$ D. $y=x^3+1$

解 易见 A 是偶函数,B 和 C 都是奇函数,而 D 是一个奇函数与一个偶函数相加,属非奇非偶函数,故选 D.

4. 周期性

函数 $y=f(x)$,如果存在正常数 T,对属于定义域的任意 x 及 $x\pm T$,总有等式

$$f(x\pm T)=f(x)$$

成立,则称 $f(x)$为周期函数.一般称满足上式的最小正数 T 为该函数的周期.

例如,正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的周期都是 2π;正切函数 $y=\tan x$ 和余切函数 $y=\cot x$ 的周期是 π.

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$和 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$;而 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$和 $y=A\cot(\omega x+\varphi)$的周期为 $T=\dfrac{\pi}{\omega}$.

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com