数学建模教程

主　编　林　军　陈翰林
副主编　彭　煜　张朝伦　郑克龙　刘启宽

科 学 出 版 社

数学建模教程

主　编　林　军　陈翰林
副主编　彭　煜　张朝伦
　　　　郑克龙　刘启宽
主　审　张光澄　谢祥俊

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书结合编者多年数学建模课程教学、数学建模竞赛的经验和一般理工科院校的学生实际，重点介绍了数学建模的思想方法，并注意与大学数学课程体系中其他课程的衔接. 全书共分 8 章，内容包括数学模型与数学建模的基本知识、初等模型、简单优化模型、微分方程与差分方程模型、统计回归模型、数学规划模型、图与网络模型及方法、其他方法与模型，并附有 MATLAB 软件介绍.

本书可作为一般理工科院校学生学习数学建模课程的教材或参考书，也可供高校教师、工程技术人员与管理人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学建模教程/林军，陈翰林主编. —北京：科学出版社，2011
ISBN 978-7-03-031150-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①林…②陈… Ⅲ.①数学模型-高等学校-教材 Ⅳ.①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 093226 号

责任编辑：胡云志 任俊红 马守全 / 责任校对：何艳萍
责任印制：张克忠 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 6 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2011 年 6 月第一次印刷 印张：14 3/4
印数：1—5 000 字数：290 000

定价：30.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

编委会名单

主　　编　林　军　陈翰林

副主编　彭　煜　张朝伦

郑克龙　刘启宽

参编人员（按姓氏拼音排序）

卢　谦　田继东　吴泽忠

肖光灿　徐艺萍　杨学南

主　　审　张光澄　谢祥俊

序

当今世界，国际竞争日趋激烈，突出表现为科技发展、人才培养等方面的竞争.

在科学技术迅速发展的今天，“高技术本质上是数学技术”的观点已被越来越多的人所接受. 数学与计算机技术相结合，形成了一种普遍的、可以实现的技术——数学技术，而计算和数学建模正在成为数学科学向数学技术转化的主要途径.

人才培养的关键在教育，在整个学校教育阶段中占有重要地位的数学教育本质上是一种素质教育. 全面提高大学生的数学水平，关系到各行各业高级专门人才的创新精神、综合素质的培养，关系到我国未来科学技术的发展和国际竞争力的提高，是百年树人大业中的重要环节.

教育特别是高等教育，必须跟踪、反映并满足社会的实际需要，数学建模进入大学课堂，既顺应时代发展的潮流，也符合教育改革的要求. 对于数学教育而言，既应该让学生掌握准确快捷的计算方法和严密的推理论证，也需要培养学生用数学工具表达、分析与解决实际问题的意识和能力，传统的数学教学体系和内容无疑偏重于前者，开设数学建模课程则是加强后者的一种尝试.

在我国高校开展数学建模教学和竞赛活动的 20 多年中，有 200 多本相关教材、读物相继出版. 现在我们又高兴地看到由西南科技大学数学建模教学团队牵头编写的《数学建模教程》问世. 这是四川省几所理工科学校的数学教师在教学改革和教材建设方面的一项重要成果，是他们多年心血的结晶.

该书主要面向普通高等学校非数学专业学生，兼顾数学专业，定位准确，可为参加数学建模竞赛的同学打下良好基础；以初等数学、微积分、线性代数等知识为基础，注重与其他课程的衔接，重点介绍数学建模的基本思想和方法，旨在培养学生的数学应用意识和能力，易教易学；恰当地把握了继承传统与推陈出新的有机统一，充分体现了知识、方法和应用的有机结合，具有鲜明的时代气息. 我相信，该书的出版发行必将对四川省普通高校数学建模教学和竞赛的开展，以及数学教学改革产生积极的推动作用.

真诚希望越来越多的数学教师能将数学建模的思想和方法融入到自己讲授的课程中去，为国家培养优秀人才和数学教学改革贡献更大力量.

姜启源

2010 年 11 月

前　言

数学模型与数学建模课程是20世纪80年代进入我国大学的，开设数学模型与数学建模课程，是大学教育特别是大学数学教育改革的一个重要组成部分.每年举办的全国大学生数学建模竞赛更是吸引了众多的大学生参加，数学建模活动已在各高校如火如荼地开展起来了，不同层次和不同类型的大学生对数学模型与数学建模的学习都有着极大的热情.

西南科技大学从20世纪90年代初开始，一直在非数学类专业开设数学模型与数学建模公共选修课程，2001年至今开设了数学类专业的数学模型与数学建模课程.近20年来，我校数学建模教学团队的教师长期从事数学模型与数学建模课程的教学和全国数学建模竞赛的培训指导工作，积累了丰富的教学经验和指导建模竞赛经验.目前数学模型与数学建模课程已经成为我校的品牌课程，数学建模教学团队也已成为我校的重点教学团队，得到了学校相关部门的大力支持.通过近20年的努力，我们已经形成了一套包括日常教学、指导学生参加全国及美国建模竞赛的运行机制，并取得了丰硕成果.我们在不懈的努力和成长过程中，有成功的喜悦，也有辛劳的苦衷，更深刻地体会着由纯理论到应用的转变，感受了数学建模和数学技术的结合在科学发展的不同领域发挥着巨大的作用.看到参加数学建模活动的学生们带着成功的喜悦奔赴到不同的工作岗位，我们感到无比的欣慰.

在20世纪90年代初到90年代中期，我们探索性地编写了数学模型讲义，并在西南科技大学使用5年.之后，在此基础上我们对讲义内容不断地修改、充实，通过教学实践逐渐形成了本书的轮廓.在这一过程中，我们既采用了国内经典建模教材(姜启源等，2003)中的经典模型，又采用了近年来全国大学生数学建模竞赛中出现的新模型.通过我们的努力，于2010年4月形成了《数学建模教程》初稿.在我校试用该初稿的同时，我们还邀请了四川大学、成都信息工程学院、西华大学、西南石油大学等学校的数学建模专家张光澄、刘启宽、谢祥俊、张朝伦、吴泽忠、田继东等与我们共同探讨，并参与修订工作，最终形成了本书.

本书的编写指导思想是：面向一般工科院校非数学类专业学生，兼顾数学类专业学生，并为参加数学建模竞赛的学生打下良好的基础；以初等数学、微积分、线性代数、概率论与数理统计等知识为基础，注意与大学数学课程体系中其他课程的衔接，重点介绍数学建模的思想方法；注重继承传统与推陈出新的有机统一，知识、方法和应用的有机结合；在写作上力求通俗易懂、易教易学.

全书共分8章，由林军、陈翰林总体设计，具体编写分工如下：第1章、第2章

由郑克龙编写；第 3 章由杨学南编写；第 4 章由陈翰林编写；第 5 章由肖光灿、林军编写；第 6 章由林军编写；第 7 章由彭煜编写；第 8 章由林军、卢谦、郑克龙、肖光灿编写；附录由徐艺萍编写.

对使用本书作为教材或主要参考书的教师的建议：

（1）对于普通理工科院校非数学类专业学生，学时在 40 个以下的，原则上应讲授第 1～5 章的内容；

（2）对于学时在 40 个以上的普通理工科院校非数学类专业学生，可再选讲第 6、7 章的部分内容；

（3）对于数学类专业本科学生原则上应讲授第 1～8 章内容，建议 56～64 学时.

在此真诚地感谢姜启源教授、张光澄教授对我们编写工作的无私指导，感谢姜启源教授为本书作序，感谢张光澄教授、谢祥俊教授作为教材主审专家所付出的辛勤劳动.

鉴于编者水平有限，且数学建模用到的数学知识包罗万象，很难完整地反映在我们篇幅有限的书中，疏漏之处在所难免，诚望读者指正.

林　军　陈翰林

2010 年 10 月 1 日

目　录

第 1 章　数学模型与数学建模的基本知识

1.1　数学模型与数学建模概述

1.1.1　数学模型

数学模型就是对实际问题的一种数学表述，是针对或参照某种问题(事件或系统)的特征和数量相依关系，采用形式化语言，概括或近似表达出来的数学结构. 更确切地说：数学模型就是对于一个特定的对象，为了一个特定的目标，根据特有的内在规律，作出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构. 数学模型可以是数学公式、算法、表格、图形等.

数学模型是利用数学工具解决实际问题的重要手段，主要有如下几个特点.

(1) 模型的逼真性和可行性. 一般来说总是希望模型尽可能地逼近所研究的对象，但是一个完全逼真的模型在数学上常常是难于处理的，因而不容易通过建模对现实对象进行分析、预报、决策或者控制. 另一方面，越逼真的模型常常越复杂，即使数学上能够处理，处理的代价也相当高. 所以，一个恰当的数学模型通常是在逼真性和可行性之间妥协的结果.

(2) 模型的渐进性. 复杂问题的数学模型不可能一次建立成功，需要经过反复修改，由简到繁，才能得到越来越满意的模型.

(3) 模型的可转移性. 模型是对现实对象抽象化、理想化的产物，它不为对象的所属领域所独有，可以转移到其他领域. 生物、经济、社会等领域的模型就常常借助于物理领域的模型. 数学模型的这种性质显示了它应用的广泛性.

(4) 模型的非预制性. 虽然已经发展了许多应用广泛的模型，但实际问题是各种各样的、千变万化的，不可能把各种模型做成预制品让人在建立数学模型的时候使用. 模型的这种非预制性使得模型本身常常是事先没有答案的问题，在建立新的模型的过程中甚至会伴随新的数学方法或者数学概念的产生.

(5) 模型的局限性. 这包括：第一，由数学模型得到的结论虽然具有通用性和精确性，但是因为模型是现实对象的简化、理想化的产物，所以一旦将模型的结论用于实际问题，那些被忽略、简化的因素必须考虑，所以结论的通用性和精确性只是相对和近似的；第二，由于人们认识能力和科学技术(包括数学本身)发展水平的限制，还有不少实际问题很难得到有实用价值的数学模型.

数学模型可以按照不同的方式分类，通常有如下几种.

(1) 按照模型的应用领域，可分成人口模型、交通模型、环境模型、生态模型、水资源模型、污染模型等. 范畴更大的一些则形成许多边缘学科，如生物数学、医学数学、地质数学、数量经济学、数学社会学等.

(2) 按照建立模型的方法，可分成初等模型、几何模型、微分方程模型、概率统计模型、数学规划模型等.

(3) 按照建立模型的目的，可分成描述模型、预报模型、优化模型、决策模型、控制模型等.

(4) 按照模型的表现特征，可分成确定性模型和随机性模型、静态模型和动态模型、线性模型和非线性模型、离散模型和连续模型等.

(5) 按照对模型结构的了解程度，可分成白箱模型、灰箱模型、黑箱模型. 白箱模型主要包括用力学、热学、电学等一些机理相当清楚的学科描述的现象以及相应的工程技术问题. 灰箱模型主要指生态、气象、经济、交通等领域机理尚不十分清楚的现象. 黑箱模型则主要指生命科学和社会科学中一些机理很不清楚的现象. 当然，白、灰、黑之间并没有明显的界限，而且随着科学技术的发展，箱子的"颜色"必然是逐渐由暗变亮的.

1.1.2 数学建模

数学建模就是建立数学模型，建立数学模型的过程就是数学建模的过程. 数学建模是一种数学的思考方法，是运用数学的语言(即公式、符号、图表等)和方法，通过抽象、简化建立能近似刻画并"解决"实际问题的一种强有力的数学手段. 在对实际问题建立数学模型时，需要解决的问题往往涉及众多的因素. 这就需要分清问题的主要因素和次要因素，恰当地抛弃次要因素，提出合理的假设，建立相应的数学模型，并用相应的数学方法或者软件求解模型，然后将所得的解和实际问题作比较，找出存在的差距和原因，对问题作进一步的分析，提出新的假设，逐步修改完善模型，使问题得到更好的解决. 相应的流程图如图 1-1 所示.

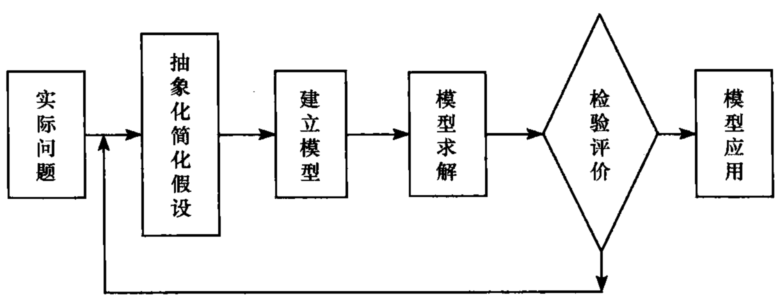

图 1-1　数学建模流程图

数学建模需要灵活运用各种数学知识，包括微分方程、运筹学、概率统计、图论、层次分析、变分法等去描述和解决实际问题，这要求一方面要加深数学知识的学习，另一方面要应用已学到的数学方法和思想进行综合应用和分析，对问题进行合理的抽象及简化.

一般来说，数学建模方法大体上可分为机理分析和测试分析两种. 机理分析是根据对客观事物特征的认识，找出反映内部机理的数量规律，使建立的数学模型常有明确的意义. 测试分析是将研究对象看作一个“黑箱”(即内部机理看不清楚)，通过对测量数据的统计分析，找出与已知数据拟合得最好的模型.

1. 数学建模的一般步骤

建模是一种十分复杂的创造性劳动，现实世界中的事物形形色色、五花八门，不可能用一些条条框框规定出各种模型具体如何建立，这里只是大致归纳一下建模的一般步骤和原则.

(1) 模型准备：首先要了解问题的实际背景，明确建模的目的及要求，收集各种必要的信息.

(2) 模型假设：为了利用数学方法，通常要对问题作出必要的、合理的假设，使问题的主要特征凸现出来，忽略问题的次要方面.

(3) 模型构成：根据所作的假设以及事物之间的联系，构造各种量之间的关系，把问题化为数学问题，注意要尽量采用简单的数学工具.

(4) 模型求解：利用已知的数学方法来求解上一步所得到的数学问题，此时往往还要作进一步的简化或假设.

(5) 模型分析：对所得到的解答进行分析，特别要注意当数据变化时所得结果是否稳定.

(6) 模型检验：分析所得结果的实际意义，与实际情况进行比较，看是否符合实际，如果不够理想，应该修改、补充假设或重新建模，不断完善.

(7) 模型应用：所建立的模型必须在实际应用中才能产生效益，在应用中不断改进和完善.

2. 数学建模的意义

数学作为一门研究现实世界数量关系和空间形式的科学，在它产生和发展的历史长河中，一直是和人们生活的实际需要密切相关的. 作为用数学方法解决实际问题的第一步，数学建模自然有着与数学同样悠久的历史. 两千多年以前创立的欧几里得几何，17 世纪发现的牛顿万有引力定律，都是科学发展史上数学建模的成功范例.

进入 20 世纪以来，随着数学以空前的广度和深度向一切领域渗透，以及电子计算机的出现与飞速发展，数学建模越来越受到人们的重视，可以从以下几方面来看数学建模在现实世界中的重要意义.

(1) 在一般工程技术领域,数学建模仍然大有用武之地.

在以声、光、热、力、电这些物理学科为基础的诸如机械、电机、土木、水利等工程技术领域中,数学建模的普遍性和重要性不言而喻,虽然这里的基本模型是已有的,但是新技术、新工艺的不断涌现提出了许多需要用数学方法解决的新问题;高速、大型计算机的飞速发展,使得过去即便有了数学模型也无法求解的课题(如大型水坝的应力计算、中长期天气预报等)迎刃而解;建立在数学模型和计算机模拟基础上的 CAD 技术,以其快速、经济、方便等优势,大量地替代了传统工程设计中的现场实验、物理模拟等手段.

(2) 在高新技术领域,数学建模几乎是必不可少的工具.

无论是发展通信、航天、微电子、自动化等高新技术本身,还是将高新技术用于传统工业去创造新工艺、开发新产品,计算机技术支持下的建模和模拟都是经常使用的有效手段. 数学建模、数值计算和计算机图形学等相结合形成的计算机软件,已经被固化于产品中,在许多高新技术领域中起着核心作用,被认为是高新技术的特征之一. 在这个意义上,数学不再仅仅作为一门科学,它是许多技术的基础,而且直接走向了技术的前台. 国际上一位学者提出了“高技术本质上是一种数学技术”的观点.

(3) 数学迅速进入一些新领域,为数学建模开拓了许多处女地.

随着数学向诸如经济、人口、生态、地质等所谓非物理领域的渗透,一些交叉学科如计量经济学、人口控制论、数学生态学、数学地质学等应运而生. 一般地说,不存在作为支配关系的物理定律,当用数学方法研究这些领域中的定量关系时,数学建模就成为首要的、关键的步骤和这些学科发展与应用的基础. 在这些领域里建立不同类型、不同方法、不同深浅程度模型的余地相当大,为数学建模提供了广阔的新天地. 马克思说过,一门科学只有成功地运用数学时,才算达到了完善的地步. 展望 21 世纪,作者相信,数学必将大踏步地进入所有学科,数学建模将迎来蓬勃发展的新时期.

1.2 数学模型与数学建模示例

1.2.1 示例 1:椅子能否在不平的地面放稳

考虑日常生活中的一个普通的事实:把一张椅子往不平的地面上一放,通常只有三只脚着地,然而只需稍微转动一定角度,就可以使四只脚同时着地,即放稳了. 这个看起来与数学毫无关系的现象,能用数学语言描述并证明吗? 试试看.

模型假设

为了能用数学语言描述,对椅子和地面需作一些必要的假设:

(1) 椅子四只脚一样长,椅脚与地面接触处视为一个点,四只脚的连线呈正方

形(对椅子的假设).

(2) 地面的高度是连续变化的,即可视为数学上的连续曲面(对地面的假设).

(3) 地面是较平坦的,使椅子在任何时候都同时有三只脚同时着地(对两者关系的假设).

假设(1)显然是合理的,假设(2)相当于给出了椅子能够放稳的条件,因为地面高度如果是不连续的(比如说有台阶的地方),则可能根本无法使四只脚同时着地的. 至于假设(3),要排除这样的情况:地面上与椅脚间距和椅腿长度的尺寸大小相当的范围内,出现深沟或者凸峰,致使三只脚无法同时着地.

模型建立

中心问题是用数学语言表示四只脚同时着地的条件、结论.

首先,用变量表示椅子的位置. 由于椅脚的连线呈正方形,以中心为对称点,正方形绕中心的旋转正好代表了椅子的位置的改变,于是可以用旋转角度 θ 这一变量来表示椅子的位置(图 1-2).

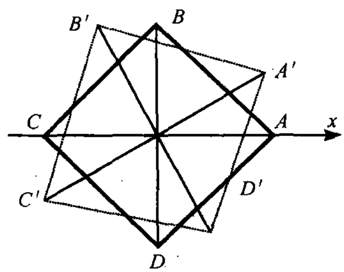

图 1-2　椅子旋转示意图

其次,要把椅脚着地用数学符号表示出来,如果用某个变量表示椅脚与地面的竖直距离,当这个距离为 0 时,表示椅脚着地. 椅子要挪动位置说明这个距离是位置变量的函数. 由于正方形的中心对称性,只要设两个距离函数就行了,设 $f(\theta)$ 表示椅脚 A 与 C 两脚到地面距离之和;$g(\theta)$ 表示椅脚 B 与 D 两脚到地面距离之和.

函数的性质

(1) 由假设(2),函数 $f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 是 θ 的非负连续函数,$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$;

(2) 由假设(3),对任意 $\theta\in[0,2\pi]$,$f(\theta)g(\theta)=0$,不妨设

$$f(0) > 0,\quad g(0) = 0$$

(3) 当把椅子转动 $\pi/2$ 时,则 AC 与 BD 互换了位置,由假设(1),

$$f(\pi/2) = g(0),\quad g(\pi/2) = f(0)$$

椅子四只脚同时着地等价于存在一点 θ_0,使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$. 因此,原问题等价于以下命题:

命题 1.1　已知函数 $f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 是 θ 的非负连续函数,$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$,且满足:

(1) $f(0)>0, g(0)=0$;

(2) 对任意 $\theta\in[0,2\pi]$,$f(\theta)g(\theta)=0$;

(3) $f(\pi/2)=g(0), g(\pi/2)=f(0)$,

则必存在一点 $\theta_0\in[0,\pi/2]$,使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

证明　因为 $f(0)>0, g(0)=0$,所以 $f(\pi/2)=g(0)=0, g(\pi/2)=f(0)>0$.

令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$,则在$[0,\pi/2]$上连续且

$$h(0) = f(0) - g(0) > 0, \quad h(\pi/2) = f(\pi/2) - g(\pi/2) < 0$$

由闭区间上连续函数的介值定理可知,必存在一点 θ_0,$0<\theta_0<\pi/2$ 使 $h(\theta_0)=0$,即 $f(\theta_0)=g(\theta_0)$,因为 $f(\theta_0)$与 $g(\theta_0)$至少有一个为 0,所以 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

注 1.1 模型的巧妙在于用一元变量 θ 表示椅子的位置,用 θ 的两个函数表示椅子四脚与地面的距离. 利用正方形的中心对称性及旋转 90°并不是本质的,同学们可以考虑四脚呈长方形的情形.

思考 (1) 若把假设中的"四只脚的连线呈正方形"改为"四只脚的连线呈长方形",你认为结论成立吗?

(2) 若把假设中的"四只脚的连线呈正方形"改为"四只脚共圆",则结果又如何?

1.2.2 示例 2:人口预报问题

人口问题是当前世界上人们最关心的问题之一. 认识人口数量的变化规律,作出较准确的预报,是有效控制人口增长的前提.

下面介绍两个最基本的人口模型,并利用表 1-1 给出的近两百年的美国人口统计数据,对模型作出检验,最后用它预报 2000 年、2010 年美国人口.

表 1-1 美国人口统计数据

年份	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850
人口/百万	3.9	5.3	7.2	9.6	12.9	17.1	23.2
年份	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920
人口/百万	31.4	38.6	50.2	62.9	76.0	92.0	106.5
年份	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
人口/百万	123.2	131.7	150.7	179.3	204.0	226.5	251.4

1. 指数增长模型

指数增长模型(马尔萨斯人口模型)由英国人口学家马尔萨斯(Malthus,1766~1834)于 1798 年提出.

模型假设

人口增长率 r 是常数(即单位时间内人口的增长量与当时的人口成正比).

建立模型

记时刻 $t=0$ 时人口数为 x_0,时刻 t 的人口为 $x(t)$,由于人口数量大,$x(t)$可视为连续、可微函数. t 到 $t+\Delta t$ 时间内人口的增量为

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = rx$$

令 $\Delta t \to 0$，于是 $x(t)$ 满足微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

模型求解

解微分方程(1.1)得

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{rt} \tag{1.2}$$

表明：$t \to \infty$ 时，$x(t) \to \infty (r > 0)$.

模型的参数估计

用模型的结果(1.2)式来预报人口，必须对其中的参数 r 进行估计，这可以用表 1-1 的数据通过拟合得到. 通过表 1-1 中 1790～1980 年的数据拟合得 $r=0.307$.

模型检验

将 $x_0=3.9$，$r=0.307$ 代入(1.2)式，求出用指数增长模型预测的 1810～1920 年的人口数，见表 1-2.

表 1-2　美国实际人口与按指数增长模型计算的人口比较

年　份	实际人口/百万	指数增长模型	
		预测人口/百万	误差/%
1790	3.9		
1800	5.3		
1810	7.2	7.3	1.4
1820	9.6	10.0	4.2
1830	12.9	13.7	6.2
1840	17.1	18.7	9.4
1850	23.2	25.6	10.3
1860	31.4	35.0	10.8
1870	38.6	47.8	23.8
1880	50.2	65.5	30.5
1890	62.9	89.6	42.4
1900	76.0	122.5	61.2
1910	92.0	167.6	82.1
1920	106.5	229.3	115.3

从表 1-2 可看出，1810～1870 年间的预测人口数与实际人口数吻合较好，但 1880 年以后的误差越来越大.

分析原因，该模型的结果说明人口将以指数规律无限增长. 而事实上，随着人

口的增加，自然资源、环境条件等因素对人口增长的限制作用越来越显著. 如果当人口较少时人口的自然增长率可以看作常数的话，那么当人口增加到一定数量以后，这个增长率就要随着人口增加而减少. 于是应该对指数增长模型关于人口净增长率是常数的假设进行修改. 下面的模型是在修改的模型中著名的一个.

2. 阻滞增长模型（Logistic 模型）

模型假设

（1）人口增长率 r 为人口 $x(t)$ 的函数 $r(x)$（减函数），最简单假定 $r(x)=r-sx$，$r,s>0$（线性函数），r 称为固有增长率.

（2）自然资源和环境条件容纳的最大人口容量 x_m.

建立模型

当 $x(t)=x_m$ 时，增长率应为 0，即 $r(x_m)=0$，于是 $s=r/x_m$，代入 $r(x)=r-sx$ 得

$$r(x)=r\left(1-\frac{x}{x_m}\right) \tag{1.3}$$

将(1.3)式代入(1.1)式得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=r\left(1-\dfrac{x(t)}{x_m}\right)x(t)\\ x(0)=x_0\end{cases} \tag{1.4}$$

模型的求解

解微分方程(1.4)式得

$$x(t)=\frac{x_m}{1+\left(\dfrac{x_m}{x_0}-1\right)\mathrm{e}^{-rt}} \tag{1.5}$$

根据方程(1.4)式作出$\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$-$x(t)$曲线图，见图 1-3，由该图可看出人口增长率随人口数的变化规律. 根据结果(1.5)式作出 $x(t)$-t 曲线，见图 1-4，由该图可看出人口数随时间的变化规律.

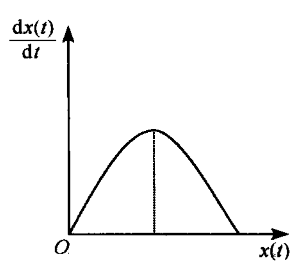

图 1-3 $\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$-$x(t)$曲线图

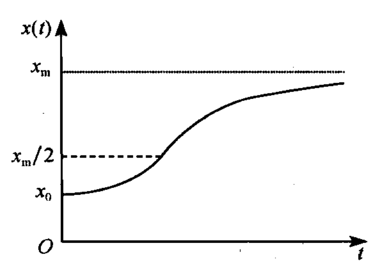

图 1-4 $x(t)$-t 曲线图