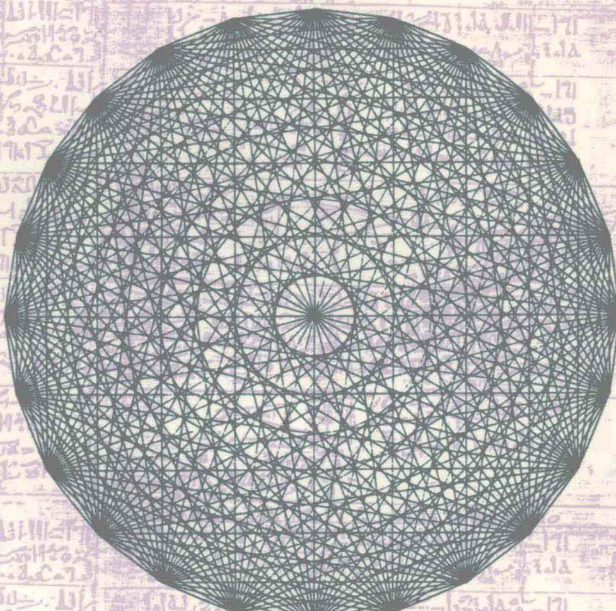
近代数学史话

陈历耕 编著



NEUPRESS
东北大学出版社

陈耋 校长指正

陈历耕 敬赠 93.6.24.

近代数学史话

陈历耕　编著

东 北 大 学 出 版 社

（辽）新登字第8号

近 代 数 学 史 话

陈历耕 编著

东北大学出版社出版　　东北大学出版社发行
（沈阳·南湖）　　大连海运学院印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32　　印张：6.875　字数：154千字
1993年3月第1版　　1993年3月第1次印刷
印数：1～1000册

责任编辑：涂宜军　　责任校对：张德喜
封面设计：唐敏智　　责任出版：杨华宁

ISBN 7-81006-540-8/O·30　　定价：4.00元

序

学任何一门科学，懂得一点它的历史是极有好处的。

有两种读科学史的方法：一种是作为一个专业来研究，这种人是不可少的，因为它可以从深层次上揭示一门科学的规律；然而，对于一般读者，由于这种研究时常着意于史实的考证，时常不能引起很大的兴趣。另一种则以广大读者，甚至是本门科学以外的人和青少年为对象，其意是引起创造的热情，以古鉴今，达到教育的目的。本书自然属于后一类。

第二种书籍，不妨称为“史话”，不求系统，不深究底细，也不旁征博引，而是就事发挥，夹叙夹议。本书就称为“史话”，自是有道理的。它是作者教学的成果，对学生自当娓娓道来，循循善诱，就这一点来说，本书是成功的。曾见到不少数学史专著，时常令人起厚古薄今之感。这是不能全怪作者的。当今的数学尚在创造之中，结果如何也许要若干年后才见分晓。专门研究数学史的人自然更愿意把自己的著作写得更可靠一些。但本书以相当大的篇幅讲当今的数学，这对作者是很大的挑战，而对读者是一大贡献了。

总之，写出这本书是数学教育方面的一个成果，希望有更多更好的类似著作问世，以造福于青少年一代。

齐民友

1992.10.27

目　录

序
A. 新世纪的号角 …… 1
B. 23 个“?” …… 6
C. 数学史上的 3 次危机 …… 24
非欧几何的冲击 …… 24
芝诺悖论 …… 27
康托尔的不朽功绩 …… 28
罗素悖论 …… 33
逻辑主义学派 …… 36
直觉主义学派 …… 38
形式主义学派 …… 39
哥德尔的贡献 …… 41
D. 布尔巴基的巨著 …… 44
《数学原理》的特色 …… 45
布尔巴基的事业 …… 47
误作“疯子”的聚会 …… 50
结构主义思想 …… 52
构造性数学 …… 57
布尔巴基学派的衰落 …… 60
E. 费尔马大定理证明了吗 …… 62

业余数学家之王 …………………………………… 62
费尔马大定理的由来 ………………………………… 67
研究费尔马大定理的初等方法 ……………………… 68
库默的突破性工作 …………………………………… 69
悬赏 10 万金马克……………………………………… 72
费尔马果真证明了他的大定理吗 …………………… 74
F. “四色问题”的困惑 ………………………………… 76
“四色问题”的来历 ………………………………… 76
第一次冲击 …………………………………………… 77
染色游戏 ……………………………………………… 80
名教授拿它毫无办法 ………………………………… 81
“四色猜想”的数学模型 …………………………… 82
特殊情形的例证 ……………………………………… 86
计算机的威力 ………………………………………… 89
G. 世界正在被“模糊” ………………………………… 92
“我能喝干大海” …………………………………… 92
电脑和人脑 …………………………………………… 94
精确性与模糊性 ……………………………………… 96
模糊数学的兴起 ……………………………………… 98
世界正在被“模糊”………………………………… 102
H. 随机数学的发展 …………………………………… 107
“赌博起家”的理论………………………………… 110
概率与性别…………………………………………… 113
布丰问题……………………………………………… 114
概率怪论……………………………………………… 115
历史回顾……………………………………………… 118

理论研究与应用 …… 121
I. 运筹学发展一瞥 …… 124
运筹学实例 …… 125
范围和内容 …… 128
发展一瞥 …… 130
运筹学在中国 …… 134
应用展望 …… 135
J. 数学证明的机械化不再是梦想 …… 137
数学的机械化 …… 137
一个古老的梦 …… 139
惊人的突破 …… 144
吴法的基本原理 …… 146
吴法：几何定理的机器证明 …… 148
光明的前景 …… 157
K. 信息时代的数学 …… 158
计算机文化 …… 160
计算机技术的发展 …… 161
计算机科学 …… 167
数学思想的影响 …… 169
现代科学的数学化 …… 172
现代科学数学化的特点 …… 174
现代科学数学化的作用 …… 178
数学的自我认识 …… 180
L. 附录：现代数学的进展 …… 184
参考资料 …… 209

A. 新世纪的号角

数学是一门古老的学科，它一开始就染上了非常神秘的色彩，并且一直是人们孜孜不倦加以探索的一个领域。在20世纪，数学的范围迅速膨胀，数学分支犹如雨后春笋，其复杂性和抽象性也日甚一日.数学研究的课题真可谓五花八门，整个“数学王国”内容丰富，资料文献卷帙浩繁，不但外行人面对数学的整个领域感到高深莫测，就是在其他分支领域中工作的数学家们也常会发出这样的感叹！不过，尽管存在着这种日益专门化的倾向，当今数学却比以往任何时候都更为具体，更富有生命力。

在20世纪，数学和数理技术已经渗透到其它科学、技术和生产中去，成为其中不可分割的重要组成部分。在我们生活的这个技术发达的社会里，事实上，可以说，我们大家都生活在数学的新时代，我们的文化已经“数学化”，在我们周围，神通广大的电子计算机最能反映出数学的存在。

随着人类文化史上空前的发展浪潮疾驶向前。20世纪之初，1900年8月6日，在巴黎召开了展望新世纪的第二届国际数学家代表大会，德国著名数学家年方38岁的希尔伯特(Hilbert David，1862～1943)在国际数学家面前作了题为《数学问题》的讲演。希尔伯特独具慧眼，把握全局，抓住关键，推出研究数学主方向问题的范例。他把“问题”看成数学发展的动力，列出了在新世纪里数学家应去努力解决的23个问题，以后人们称为“希尔伯特问题”。他的讲演向数学工作者吹响了新世纪的号角，对20世纪数学发展产生了深刻的

影响。

希尔伯特的讲演一开头就说："我们当中有谁不想揭开蕴存着未来的面纱，看一看在今后的世纪里我们这门科学发展的前景和奥秘呢？我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标？在广阔而丰富的数学思想领域，新世纪将会带来什么样的新方法和新成果。"激起了听众极大的兴趣。

"历史教导我们，科学的发展具有连续性。我们知道，每个时代都有它自己的问题，这些问题后来或者得以解决，或者因为无所裨益而被抛到一边并代之以新的问题。如果我们想对最近的将来数学知识可能的发展有一个概念，那就必须回顾一下当今科学提出的、期望在将来能够解决的问题。现在，当此世纪更迭之际，我认为正适于对问题进行这样一番检阅。因为，一个伟大时代的结束，不仅促使我们追溯过去，而且把我们的思想引向那未知的将来。"

他抓住过去几十年数学研究的趋向，阐明了某类问题对于一般数学进展的深远意义。他说："只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力；而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止。正如人类的每项事业都追求着确定的目标一样，数学研究也需要自己的问题 。正是通过这些问题的解决，研究者锻炼其钢铁意志，发现新方法和新观点，达到更为广阔和自由的境界。"

如何正确判断好的数学问题，他引用一位法国老数学家的话："要使一种数学理论变得这样清晰，以致你能向在大街上遇到的第一个人解释它。在此以前，这一数学理论不能被认为是完善的"。

希尔伯特选择这些问题是相当难的，正因为如此，才会有人作出更大的努力，但它又不是完全不可接近的，否则，会

浪费精力而一无所得。它将是隐存真理的曲折道路上的一盏指路明灯。问题的最终解决，会给人们留下愉快的记忆，以成功的喜悦作为对我们的报偿。

数学这门科学究竟以什么作为其问题的源泉呢？他说："在每个数学分支中，那些最初、最古老的问题肯定是起源于经验，是由外部的现象世界所提出。"例如整数运算法则就是以这种方式在人类文明的早期被发现的。对最初的几何学三大难题：二倍立方体问题、三等分任意角问题和化圆为方问题等等，情形也是如此。"同样的还有数值方程的解、曲线论、微积分、傅立叶级数和位势理论中那些最初的问题，更不用说更大量的、属于力学、天文学和物理学方面的问题了"。

但是，随着一门数学分支的进一步发展，它自身独立地发展着，通常并不受来自外部的明显影响，而只是借助于逻辑组合、一般化、特殊化，巧妙地对概念进行分析和综合，提出富有成果的问题，因为它自己就以一个真正提问者的身份出现。这样就产生出素数问题和其他算术问题及伽罗瓦的方程式理论和函数论中几乎所有较深入的问题。

对于思维与经验之间的反复相互作用，他的论点是："当纯思维的创造力进行工作时，外部世界又重新开始起作用，通过实际现象向我们提出新的问题，开辟新的数学分支。而当我们试图征服这些新的、属于纯思维王国的知识领域时，常常会发现过去未曾解决的问题的答案，这同时就极有成效地推进着老的理论。"

对于一个数学问题的解答，应该提出怎样的一般要求？希尔伯特认为首先是要有可能通过以有限个前提为基础的有限步推理来证明解的正确性，而这些前提包含在问题的陈述中并且必须对每个问题都有确切定义。这种借助有限推理进行

逻辑演绎的要求，简单地说就是对于证明过程的严格性的要求。这种严格性要求在数学中已经象座右铭一样变得众所周知，它实际上是与我们悟性的普遍的哲学需要相适应的；另一方面，只有满足这样的要求，问题的思想内容和它的丰富涵义才能充分体现。

在演说中，希尔伯特还论述了数学符号的意义和作用。他认为新符号必须服从新概念。我们用这样的方式来选择这些符号，使得它们会令人想到曾经是形成新概念的缘由的那种现象。这样，几何图形就是直观空间的帮助记忆的符号，算术符号是文字化的图形，而几何图形则是图象化的公式。例如用同一直线上的三点配上不等式 $a>b>c$ 来作为“之间”这个概念的几何图形。为了使几何图形可以融入数学的总宝库，就必须对它们的直观内容进行严格的公理化研究。例如在两数相加时，我们必须把相应的数字按位数上下对齐，使得这些数字的正确演算只受运算规则即算术公理的支配，几何图形的使用也是由几何概念的公理及其组合所决定。

对在数学问题中常会遇到的困难和克服这些困难的办法，希尔伯特作了精辟的分析。即：1. 一般方法。在解决一个数学问题时，如果我们没有获得成功，原因常常在于我们没有认识到更一般的观点，即眼下要解决的问题不过是一连串有关问题中的一个环节。从这样的观点出发，不仅我们所研究的问题会容易解决，同时还会获得一种能应用于有关问题的普遍方法。例如柯西在定积分理论中引进复积分路径，库麦尔在数论中引进“理想”的概念。这种寻求一般方法的途径是最行得通也是最可靠的。2. 克服困难的杠杆。在讨论数学问题时，特殊化比一般化起着更重要的作用。可能在大多数场合，我们寻找一个问题的答案而未能成功的原因，是因

为有一些比手头的问题更简单、更容易的问题没有完全解决或是完全没有解决。这时，一切都有赖于找出这些比较容易的问题并使用尽可能完善的方法和能够推广的概念来解决它们。这种方法是克服数学困难的最重要的杠杆之一。3. 证明解的不可能性。有时会碰到在不充分的前提下或不正确的意义上寻求问题的解答，因此不能获得成功的情况，于是就会产生这样的命题：证明在所给的前提和所考虑的意义下原来的问题是不可能解决的。这样一种不可能性的证明古人就已实现，例如他们证明了一等腰直角三角形的斜边与直角边的比是无理量。在以后的数学中，关于某些解的不可能性的问题起着重要作用。例如一些古典的数学难题，诸如平行公理的证明，化圆为方，或用根式求解 5 次方程等，都已获得充分满意和严格的解决，尽管是在与原先的企图不同的另一种意义上。4. 解决问题的信念。由于前面证明解的不可能性的事实，加上其它哲学上的困素，给人们以解决问题的充分信念，即每个确定的数学问题都应该能得到明确的解决，或者是成功地对所给问题作出回答。或者是证明问题解的不可能性，从而指明解答原问题的一切努力都肯定要归于失败。拿任一确定的、尚未解决的问题来说，例如关于欧拉—马许罗尼常数 C 的无理性问题或是否存在无限多个形如 2^n+1 的素数问题。无论这些问题在我们看来多么难以解决，无论在这些问题面前我们显得多么无能为力，我们仍然坚信，它们的解答一定能通过有限步纯逻辑推理而得到。

希尔伯特还进一步论述道：这条认为所有的问题都能解决的公理，仅仅是数学思想所独到的特征吗？抑或是我们的悟性所固有的一般规律，即它所提出的一切问题必能被它自身所回答？因为，在其它科学中，人们也常遇到一些老的问

题，通过不可能性的证明，这些问题被一种对科学来说是最满意、最有用的方式解决了。他举出永动机的例子。在构造永动机的努力失败以后，科学家们研究了这种机器不可能存在的情况下，自然力之间必须存在的关系；而这个反向问题引导到能量守恒定律的发现，它反过来又解释了原来希望制造的永动机的不可能性。

在结束语中，希尔伯特的讲演这样说："这种相信每个数学问题都可以解决的信念，对于数学工作者是一种巨大的鼓舞。在我们中间，常常听到这样的呼声："这里有一个数学问题，去找出它的答案！你能通过纯思维找到它，因为在数学中没有 ignoramus（不可知）。"

"数学问题的宝藏是无穷无尽的，一个问题一旦解决，无数新的问题就会代之而起。下面请允许我尝试着提出一些特定的问题，它们来源于数学的各个分支。通过对这些问题的讨论，我们可以期待科学的进步。"

1962 年，在哥廷根大学举行纪念希尔伯特诞生 100 周年大会上，著名数学家库朗的讲演中说："我确信，希尔伯特那有感染力的乐观主义，即使到今天也在数学中保持着它的生命力。唯有希尔伯特精神，才会引导数学继往开来，不断成功。"不过，今天我们可以自豪地认为，即使象希尔伯特这样的天才，也未能预见今天业已发生并正在发生着的一些惊人的发展。20 世纪的数学业已走上了自己光荣的道路。

B. 23 个"?"

希尔伯特 1900 年 8 月在巴黎国际数学家代表大会上作

的《数学问题》的讲演横跨数学的整个领域，对各类数学问题的意义、源泉以及研究方法发表了精辟的见解，为 20 世纪的数学发展揭开了光辉的一页，成为世界数学史发展的重要里程碑。

1899 年，希尔伯特接受第二届国际数学家大会的筹备机构的邀请，准备在新世纪的头一年将要召开的大会上作主要讲演。当时他有两个想法：或者作一个为纯粹数学辨护的演讲，或者探讨一下新世纪数学发展的方向。他写信与他的好友、杰出的数学家闵可夫斯基（Minkowski，Hermann，1864～1909）商量，闵可夫斯基回信说："最有吸引力的题材莫过于展望数学的未来，列出在新世纪里数学家应当努力解决的问题。这样一个题材，将会使你的讲演在今后几十年的时间里成为人们议论的话题。"闵可夫斯基也指出了做这类预见性发言会遇到的困难。经过一番斟酌，希尔伯特决意选择后一想法，提出一批急需解决的重大数学问题。为了提出这些问题，他曾作过充分的准备，从 1899 年底开始考虑选题，到 1900 年 7 月中旬完成初稿，整整花了 8 个月的时间，多次前往巴黎考察，弄清了法国数学家新的研究成果和方向。他还和另一位学长和朋友胡尔维茨（A. Hurwitz）对初稿进行研究，胡帮助他对初稿作了修改，讲演稿《数学问题》才正式完成。

希尔伯特站在当时数学研究领域的最前沿，抓住这个领域中最活跃、最关键、最有影响的课题，高瞻远瞩地概括为 23 个数学问题，预示 20 世纪数学发展的进程，为推动数学前进开辟了广阔的源泉。一位科学家如此自觉、如此集中地提出一整批问题，并且持久地影响一门科学的发展，这在科学史上实属罕见。希尔伯特的名望促使许多数学家都投入了解

决 23 个问题的激流中去，人们把解决由这位伟大人物提出的问题，那怕是其中的一部分，都看成至高无上的荣誉。例如，1976 年美国科学家评选的自 40 年以来美国数学 10 大成就中，有 3 项就是希尔伯特的第 1、第 5、第 10 问题的解决。1975 年，在美国伊利诺斯大学，召开了一次国际数学会议，回顾 3/4 世纪以来，希尔伯特 23 个问题，有一半已经解决，余下一半大多数有重大进展。下面简要介绍希尔伯特的 23 个数学问题及其解决情况。

1. 康托尔的连续统基数问题

19 世纪末，在德国数学家康托尔（Canton，1845～1918）等人的努力下，集合论有了重大发展。康托尔的集合论涉及到对“无限”的认识问题。两个系统，即两个通常的实数集或点集，如果它们相互间可以建立起一种关系，使得一个集合中的每个元素，对应并且只对应于另一个集合中的一个确定的元素，那么就认为这两个系统是等价的或是有相等的基数。

康托尔关于这种集合的问题研究，提出了如下的命题：每个由无穷多个实数组成的系统，即每个无穷数集（或点集），或者等价于全体自然数的集合，或者等价于全体实数的集合，从而等价于连续统即一条直线上点的全体。因此，就等价关系而言，只有两种（无穷）数集：可数集和连续统。这就是说，连续统所具有的基数，紧接在可数集基数之后，即在可数集基数和实数集基数之间没有别的基数。这就是康托于 1874 年提出的猜测，即著名的连续统假设。

举个通俗的例子，放在我们面前有“无限多个”盛有各种糖果的盘子，我们从每个盘子中拿出一粒糖果，凑成一个

拼盘。由于盘子的个数是无限的，这样做允许吗？在数学上，这个问题的抽象提法叫选择公理。而希尔伯特第1问题，即“连续统假设”，其内容相当于问：从无限盘糖果中各选一粒的选择公理，在数学上是否合理？

1938年奥地利数学家哥德尔（Godel，Kart，1906～1976）证明连续统假设和ZF公理系统的无矛盾性，即不可能从ZF公理推出连续统假设是错的。1963年，美国斯坦福大学的数学教授科恩（Paul J. Cohen）证明了连续统假设和ZF公理是彼此独立的，即从ZF公理出发，不可能推出连续统假设是对的。这样一来，矛盾就发生了；你承认它是对的，可以建立起一套数学体系；你不承认它是对的，也可以建立起一套数学体系。妙还妙在这两套数学都是对的，都能自圆其说，真是公说公有理，婆说婆有理，象欧氏几何和非欧几何都有理一样，结果大家都有理。综合哥德尔和科恩的工作便知，连续统假设的真假不可能在ZF公理系统内判明，即希尔伯特第1问题在下述意上得到了解决；不能判别其真伪！

顺便再说明一下，什么叫ZF公理。因为康托尔的集合论有过“一切集合的集合”提法引起的悖论等等之故，策梅罗（Zermelo，1871～1953）提出了一种不会产生悖论的集合论，弗伦克尔（Frankel，1891～1965）加以改进，形成了目前世所公认的彼此无矛盾的集合论公理系统，简称为ZF公理。

2. 算术公理的相容性

在研究一门科学的基础时，我们必须建立一套公理系统，它包含着对这门科学基本概念之间所存在的关系的确切而完备的描述。如此建立起来的公理同时也是这些基本概念的定义；并且，我们正在检验其基础的科学领域里的任何一个命

题，除非它能够从这些公理通过有限步逻辑推理而得到，否则，就不能认为是正确的。问题是：这组公理中个别公理的确定陈述是否以某种方式相互依赖呢？如果我们希望达到一种全体互相独立的公理系统，这组公理是否因此就不能包含共同的部分而必须将那些共同部分隔离出去？最为重要的问题是：证明这些公理不互相矛盾，就是说，以它们为基础而进行的有限步骤的逻辑推演，决不会导致矛盾的结果。

当各种非欧几何被创造出来的时候，它们与客观存在在表面上的偏离，引起了对非欧几何公理相容性的疑问。非欧几何公理相容性的证明，依赖于欧氏几何公理的相容性。在欧氏几何中，公理相容性的证明可以这样来实现，即构造一个适当的数域，使得域中数字之间的类似关系与几何公理相对应。几何公理演绎中的任何矛盾，必定能在该数域的算术中得到识别。这样，几何公理相容性的证明，便归结为算术公理的相容性定理。在假定算术公理相容性的基础上，希尔伯特确实成功地建立了欧氏几何公理的相容性。但是算术公理的相容性还是没有建立。因此希尔伯特把它列为第 2 个数学问题。

希尔伯特曾设想用形式主义计划的元数学(或证明论)方法证明算术公理的相容性。他计划的基本目标是用有限的方法加以证明。但是，1931 年哥德尔发表不完备性定理否定了希尔伯特的设想。哥德尔不完备性定理可表达为：凡包含形式算术系统作为子系统的任何形式系统，如果是相容的，就一定是不完备的。这就是说，不可能建立这样的形式系统，它是相容的，而且，所有与算术真命题相对应的合式公式也都能够在这一系统中得到证明（从而是完备的）。于是，对于任一有限公理化的形式系统来说，都不可能存在这样的相容性