微积分辅导教程

（第二册）

金义明 王海敏 主编

浙江工商大学出版社
Zhejiang Gongshang University Press

图书在版编目(CIP)数据

微积分辅导教程. 第2册/金义明，王海敏主编. —杭州：浙江工商大学出版社，2010.3
ISBN 978-7-81140-118-9

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①金…②王… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 030215 号

微积分辅导教程

金义明　王海敏　主编

责任编辑　陈维君
责任校对　张振华
封面设计　刘　韵
责任印制　汪　俊
出版发行　浙江工商大学出版社
(杭州市教工路 198 号　邮政编码 310012)
(Email：zjgsupress@163.com)
(网址：http://www.zjgsupress.com)
电话：0571-88823703，88831806(传真)
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　杭州杭新印务有限公司
开　　本　787×960　1/16
印　　张　17.5
字　　数　320 千字
版 印 次　2010 年 3 月第 1 版　2010 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-81140-118-9
定　　价　28.00 元

前　言

微积分是高等院校文科(经管类)学生的重要基础课,是培养学生抽象概括能力、逻辑思维能力、运算能力和空间想象力的重要课程,能否学好这门课程,将直接影响后继课程的学习。由于其内容的高度抽象性与概括性、严密的逻辑性、独特的“数学语言”等,往往使学生望而生畏,成为学生进入大学后的第一只“拦路虎”。

为了帮助学生学好微积分,本书定位在使其成为学生学习微积分的“导学”。内容提要部分精要概括本章内容,包括基本概念、重要定理和公式,突出重点,既简洁又翔实。典型例题解析部分精选了各类典型例题,覆盖面广,有详细的分析和解答过程,并总结具有一般意义的解题方法,对开拓思路、提高解题能力大有裨益;部分例题综合性强,有些有一定的难度和深度,对考研复习有很好的参考价值。教材的每章复习题难度较大,复习题解析部分给出了每章的复习题的详细解答。书末附有教材练习的全部参考答案。另外还附有模拟试卷五套及试卷详解,可以检测知识的掌握程度,有效地提高学生的应试能力。

本书第六章,复习题七、八解答,模拟试卷(三)及解答由朱灵编写;第八、九章,教材习题答案与提示,模拟试卷(二)及解答由金义明编写;第七、十章,复习题十和模拟试卷(四)及解答由华就昆编写;复习题六、九解答和模拟试卷(一)及解答由王海敏编写;模拟试卷(五)及解答由丁正中编写。本书最后由金义明、王海敏修改定稿。

本书可作为文科(经管类)大学生学习微积分课程的参考书。

由于时间紧迫,书中存在的疏漏与不妥之处在所难免,欢迎读者批评指正。

编　者

于浙江工商大学

2009 年 12 月

目　录

Contents

第六章　定积分

内容提要

1. 定积分的概念

(1) 定义

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 中任意插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把区间 $[a,b]$ 任意分成 n 个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n],$$

记各个小区间的长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \cdots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 $\xi_i (x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$，作和 $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，记 $\lambda = \{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，如果当 $\lambda \to 0$ 时，S 有极限 I，这时我们称这个极限 I 为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中 $f(x)$ 称为被积函数，x 称为积分变量，a 称为积分下限，b 称为积分上限，$[a,b]$ 称为积分区间.

(2) 定积分的值只与被积函数及积分区间有关，而与积分变量的记法无关，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u.$$

(3) 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分存在，我们就说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

(4) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 特别地，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

(5) 定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义为：它是介于 x 轴、函数 $f(x)$ 的图形及两条直线 $x=a, x=b$ 之间的各部分面积的代数和，其中约定在 x 轴上方的面积取正值，在 x 轴下方的面积取负值.

2. 定积分的性质

(1) 对定积分的两点补充规定

① $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$；　　② $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

(2) 假设下列各性质中所列出的定积分都是存在的，则有

① $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

② $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (k 是常数).

③ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

④ 如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \equiv 1$，则

$$\int_a^b 1\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a.$$

⑤ 如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \geqslant 0$，而且 $a<b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

推论 1　如果在区间 $[a,b]$ 上，$f(x) \leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad (a<b).$$

推论 2　$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \quad (a<b).$

⑥（估值定理）　设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值，则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a) \quad (a<b).$$

⑦（定积分中值定理）　如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使下式成立：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

数值$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$称为连续函数在区间$[a,b]$上的平均值.

3. 微积分基本公式

(1) 如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则变上限积分函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在$[a,b]$上具有导数，并且有

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

(2) 类似地可以讨论变下限积分函数$\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$. 由规定知$\int_x^b f(t)\mathrm{d}t=-\int_b^x f(t)\mathrm{d}t$，于是

$$\left(\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right)'=\left(-\int_b^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=-f(x).$$

(3) 如果积分的上限和下限都是x的可导函数，则由复合函数的求导法则可得

$$\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)'=\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)'$$
$$=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\psi(x)]\psi'(x).$$

(4) 如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

就是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数.

(5)（牛顿-莱布尼兹公式）　如果函数$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的任一个原函数，则

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

4. 定积分的换元法

(1) 假设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，函数$x=\varphi(t)$满足条件：

① $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$;

② $\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$（或$[\beta,\alpha]$）上具有连续导数，且其值域不超出$[a,b]$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f([\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

(2) 与不定积分的不同之处在于：这里没有必要再求$x=\varphi(t)$的反函数，

因为在用换元法计算定积分时，随之确定了新变量的变化范围或积分限，因此不用再代回原来的变量.

5. 定积分的分部法

设函数 $u(x)$，$v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数 $u'(x)$，$v'(x)$，则有

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u.$$

6. 定积分的应用

(1) 平面图形的面积

① 由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b(a<b)$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积为

$$A=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

② 如果一块图形由连续曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 及直线 $x=a$，$x=b(a<b)$ 所围成，那么这块图形的面积的计算公式为

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x.$$

③ 如果一块图形由连续曲线 $x=f(y)$，$x=g(y)$ 及直线 $y=c$，$y=d(c<d)$ 所围成，那么这块图形的面积的计算公式为

$$A=\int_c^d |f(y)-g(y)|\mathrm{d}y.$$

(2) 体积

① 若立体介于平面 $x=a$，$x=b$ 之间，且在点 x 处垂直于 x 轴的截面面积为连续函数 $A(x)$，则立体体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$$

② 由连续曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b(a<b)$ 与 x 轴所围成曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积为

$$V_x=\int_a^b \pi y^2\mathrm{d}x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

③ 由连续曲线 $x=\varphi(y)$，直线 $y=c$，$y=d(c<d)$ 与 y 轴所围成曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积为

$$V_y=\int_c^d \pi x^2\mathrm{d}y=\pi\int_c^d \varphi^2(y)\mathrm{d}y.$$

④ "套筒法"：由连续曲线 $y=f(x)\geqslant 0$，直线 $x=a$，$x=b(0\leqslant a<b)$ 与 x 轴所围成曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积为

$$V_y = 2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 经济应用问题

① 已知边际成本为 $C'(Q)$,则总成本为 $C(Q)=\int_0^Q C'(Q)\mathrm{d}Q+C(0)$,其中 $C(0)$ 为固定成本.

② 已知边际收益为 $R'(Q)$,则总收益为 $R(Q)=\int_0^Q R'(Q)\mathrm{d}Q+R(0)$,其中 $R(0)=0$.

7. 广义积分

(1) 无穷限广义积分

设函数 $f(x)$ 在区间$[a,+\infty)$ 上连续,取 $b>a$,如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在,则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间$[a,+\infty)$ 上的反常积分,记作 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

这时称广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;如果上述极限不存在,就称广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散,这时仍用同样的记号,但已不表示数值了.

类似地可定义 $f(x)$ 在$(-\infty,b]$ 上的广义积分:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

如果对任意实数 c,$\int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛,我们说 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,并且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x.$$

上述积分统称为无穷限的广义积分.

(2) 暇积分

设函数 $f(x)$ 在$[a,b)$ 上连续,$x=b$ 是 $f(x)$ 的无界间断点(也称 $x=b$ 为 $f(x)$ 的瑕点).取 $\eta>0$,如果极限

$$\lim_{\eta\to0^+}\int_a^{b-\eta}f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的广义积分（暇积分），仍然记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to 0^+}\int_a^{b-\eta} f(x)\mathrm{d}x,$$

这时也称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 如果上述极限不存在，就称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

类似地，设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，$x=a$ 是 $f(x)$ 的瑕点. 取 $\eta>0$，如果极限

$$\lim_{\eta\to 0^+}\int_{a+\eta}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to 0^+}\int_{a+\eta}^{b} f(x)\mathrm{d}x,$$

否则，就称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

另外，设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除点 $c(a<c<b)$ 外连续，而 $x=c$ 是 $f(x)$ 的一个瑕点，如果两个广义积分 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to 0^+}\int_a^{c-\eta} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\eta'\to 0^+}\int_{c+\eta'}^{b} f(x)\mathrm{d}x,$$

否则，就称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

概念析疑

问 1　定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值与哪些因素有关?

答： $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 只与积分区间 $[a,b]$ 和被积函数 $f(x)$ 有关，而与积分变量无关，因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u.$$

定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，当 a,b,f 均确定时为一个常数.

问 2　定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是否总能表示曲边梯形的面积?定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的几何意义如何解释?

答: 只有当被积函数 $f(x)\geqslant 0(x\in[a,b])$ 时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 才表示由曲线 $y=f(x)$,直线 $x=a,x=b$ 及 x 轴所围的曲边梯形面积 A.

在一般情况下,即 $f(x)$ 在积分区间$[a,b]$上变号,则定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义就是由 $x=a,x=b$ 及 x 轴所围图形各部分面积的代数和.

思考　$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 代表什么?

问 3　$\int f(x)\mathrm{d}x,\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 各表示什么?它们之间有何区别?有何种联系?

答: $\int f(x)\mathrm{d}x$ 表示函数 $f(x)$ 的不定积分,即是 $f(x)$ 的一切原函数的表达式.

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上的定积分,它是一个和式的极限值,是一个确定的数.

$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 当 x 是自变量时表示一个函数,称之为变上限积分函数,它是函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上的一个原函数.

若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,有以下关系式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b,$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)\Big|_a^b,$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C.$$

问 4　函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积的必要条件是什么?充分条件是什么?

答: $f(x)$ 在$[a,b]$上可积的必要条件是 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界;

若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续或只有有限个第一类间断点,则 $f(x)$ 肯定在$[a,b]$上可积.

问 5　由问 4 知,若 $f(x)$ 在$[a,b]$上无界,则 $f(x)$ 在$[a,b]$上不可积. 不可积函数是否一定不存在原函数?

答: 不一定. 如

$$f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

在$[-1,1]$上无界，所以$f(x)$在$[-1,1]$上不可积，但函数

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

的导函数

$$F'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

即$F'(x)=f(x)$，故$f(x)$在$[-1,1]$上存在原函数$F(x)$.

思考　在例子中，$F(x)$在$x=0$处的导数为0是如何得到的？

问6　用牛顿-莱布尼茨公式$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b$时，会不会因原函数选取不同而给出不同的定积分值？

答：定积分值$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是不会因为原函数$F(x)$选取的不同而不同的，因为我们知道，$f(x)$的任意两个原函数至多只能相差一个常数，设$G(x)$和$F(x)$均是$f(x)$在$[a,b]$上的原函数，必有$G(x)=F(x)+C$（C是某一常数），由牛顿-莱布尼茨公式有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=G(x)\Big|_a^b=(F(x)+C)\Big|_a^b\\&=F(b)+C-[F(a)+C]\\&=F(b)-F(a)\\&=F(x)\Big|_a^b,\end{aligned}$$

即
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=G(x)\Big|_a^b=F(x)\Big|_a^b,$$

这表明$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的值与原函数的选取无关.

比如我们要计算$\int_a^b 0\mathrm{d}x$，我们知道1和2都是被积函数0的原函数，因此

$$\int_a^b 0\mathrm{d}x=1\Big|_a^b=1-1=0,$$

$$\int_a^b 0\mathrm{d}x = 2\Big|_a^b = 2-2=0.$$

结果是一样的.

思考　有同学得出 $\int_a^b 0\mathrm{d}x = C$，结论错在哪里?

问 7　定积分的换元积分法与不定积分的换元法有什么共同点，有什么不同点?

答: 共同点是显然的，它们都是建立在找被积函数的原函数基础之上的积分方法，但它们之间的差别还是存在的.

A. 不定积分换元法

不定积分的换元法的主要目的是通过换元，求出被积函数的原函数，有第一换元积分法和第二换元积分法两种. 第一换元积分法又称为“凑微分法”，其特点是逐步将被积函数的原函数凑出来，不必将原积分换成新变量的积分后再求其原函数. 第二换元法的特点是必须把原积分变成新变量的积分，然后求新变量积分的原函数，再在结果中将新变量换回到原来的变量，即令 $x=\varphi(t)$，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t)\Big|_{t=t(x)} + C,$$

其中 $t=t(x)$ 是 $x=\varphi(t)$ 的函数. 所以，第二换元法必须要求换元函数的反函数存在，即 $x=\varphi(t)$ 是单调函数. 这是与第一换元法不同的地方.

思考　$x=\varphi(t)$ 可导，若 $\varphi'(t)\neq 0$，$x=\varphi(t)$ 就是单调函数吗?

B. 定积分的换元法

定积分的换元法的唯一目标是求出积分值，这是它与不定积分换元法的不同之处. 定积分换元法在换元时，需相应地变换积分的上、下限，将原积分变成一个与其积分值相等的新积分. 所以，积分经过变换后，不必再去关心原积分的被积函数是什么，也不会去求变换函数的反函数，这是定积分换元法与不定积分换元法的最大差别.

思考　上面说到，定积分的换元法不必求变换函数的反函数，问变换函数 $x=\varphi(t)$ 单调这一条件能否去掉?

问 8　怎样计算分段函数和带有绝对值符号的函数的积分?

答: 当被积函数是分段函数时，最后均是将积分区间按分界点划分成几个积分之和，再分别计算合成.

被积函数含有绝对值符号时，计算的基本方法是用分段函数表示被积函数，以便去掉绝对值符号，然后利用定积分的可加性，分段进行计算.

问 9　下面过程是否正确？

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-(1-(-1))=-2.$$

答：显然是错误的，追其根源是对原函数概念没有搞清.

由于 $\left(-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}$ 在 $x=0$ 处不成立，因此 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 不是定积分，而是广义积分，考虑到

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x&=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{-\varepsilon}\\&=-\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-\varepsilon}\\&=-\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[-\frac{1}{\varepsilon}+1\right]\text{不存在},\end{aligned}$$

因此可断定 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 不存在.

典型例题解析

题型一　定积分和广义积分的计算

(一) 利用牛顿-莱布尼茨公式

1. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),\text{其中 }F'(x)=f(x).$$

例 1　计算 $\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x&=\int_1^2(x^2+x^{-\frac{1}{2}}+x^{-4})\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{1}{3}x^3+2x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}x^{-3}\right)\Big|_1^2\\&=\frac{5}{8}+2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

例 2　若 $f(x)=\begin{cases}\sin x, 0\leqslant x<\pi,\\ 2^x,\quad \pi\leqslant x\leqslant 4,\end{cases}$ 求 $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

解　这是一个分段连续的函数，在 $x=\pi$ 处有第一类间断点，所以 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上可积，只要把积分区间分为 $[0,\pi]$ 及 $[\pi,4]$，分别在每个子区间上用牛

顿-莱布尼茨公式即可，于是

$$\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x + \int_{\pi}^4 2^x\mathrm{d}x$$

$$= -\cos x\Big|_0^{\pi} + \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_{\pi}^4$$

$$= 2 + \frac{16-2^{\pi}}{\ln 2}.$$

例 3　已知 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 1+x^2, & x<0,\end{cases}$ 求$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\mathrm{d}x$.

解　此题不是直接求 $f(x)$ 的定积分，而是求 $f(x-1)$ 的定积分，因此我们不必马上分段计算，可先将 $f(x-1)$ 变成 $f(t)$ 再积分，实际上只要作变换 $t=x-1$ 即可.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\mathrm{d}x \xlongequal{x-1=t} \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (1+t^2)\mathrm{d}t + \int_0^1 e^{-t}\mathrm{d}t$$

$$= \left(t+\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} - e^{-t}\Big|_0^1$$

$$= \frac{37}{24} - \frac{1}{e}.$$

例 4　计算$\int_{-2}^{3} |x^2-2x-3|\mathrm{d}x$.

解　原式$=\int_{-2}^{3} |(x-3)(x+1)|\mathrm{d}x$

$$= \int_{-2}^{-1}(x-3)(x+1)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{3}(x-3)(x+1)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-2}^{-1}(x^2-2x-3)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)\mathrm{d}x$$

$$= 13.$$

例 5　计算$\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\mathrm{d}x$.

解　$\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\sqrt{2}\,|\sin x|\,\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{\pi}\sqrt{2}\sin x\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi}\sqrt{2}(-\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=-\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\pi}+\sqrt{2}\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$=4\sqrt{2}.$$

例 6　计算$\int_{-1}^{0}\frac{2x+3}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$.

解　$$\int_{-1}^{0}\frac{2x+3}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}+\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1}$$

$$=\ln(x^2+2x+2)\Big|_{-1}^{0}+\arctan(x+1)\Big|_{-1}^{0}$$

$$=\ln2+\frac{\pi}{4}.$$

2. 计算定积分最终都要使用牛顿-莱布尼茨公式，它在定积分计算中起主要作用. 但牛顿-莱布尼茨公式的使用条件是被积函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续或除有限个第一类间断点外连续，这有很大的局限性. 对于广义积分而言，无论是无穷限的广义积分还是无界函数的广义积分，一般不能直接用牛顿-莱布尼茨公式来进行计算，但若$f(x)$的原函数 $F(x)$在$[a,b]$上连续，则牛顿-莱布尼茨公式形式上可以在更广泛一些的范围内使用.

A. 对无界函数的广义积分，若 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，$x=a$ 为$f(x)$ 的无穷型间断点，但若其原函数 $F(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，即在 $x=a$ 处是连续的，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^-}[F(b)-F(a+\varepsilon)]=F(b)-F(a).$$

所以在原函数 $F(x)$ 在$[a,b]$ 上连续的条件下，牛顿-莱布尼茨公式对于无界函数的广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是成立的.

而且，若 $f(x)$ 的无穷型间断点在区间$[a,b]$ 中或者在$[a,b]$ 上同时有几个这样的间断点，只要原函数 $F(x)$ 在这些间断点上均连续，牛顿-莱布尼茨公式在$[a,b]$ 上仍能成立.

B. 对于无穷区间上的广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，若 $f(x)$ 在$[a,+\infty]$ 上连续，$F'(x)=f(x)$，且$\lim\limits_{b\to+\infty}F(b)$ 存在，记 $F(+\infty)=\lim\limits_{b\to+\infty}F(b)$，则

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}F(b)-F(a)=F(+\infty)-F(a),$$

所以在形式上可看作牛顿-莱布尼茨公式亦成立.

同理可记

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(-\infty),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(-\infty).$$

例 7　计算$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解　因 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $x=-1$ 右侧及 $x=1$ 左侧邻域内都无界，所以这是一个广义积分. 但因为其原函数 $F(x)=\arcsin x$ 在$[-1,1]$上连续，故

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

例 8　计算$\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}$.

解　这是无穷区间上的广义积分，

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2} = \int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3}\int_{2}^{+\infty}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}\Big|_{2}^{+\infty} = \frac{1}{3}\left(0-\ln\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3}\ln 2.$$

例 9　下列运算是否正确？若不正确，说明原因何在.

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{1}{x}\right) = \arctan\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}.$$

解　不正确.

因被积函数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2+1} < 0$,

其积分值必为负，之所以得到错误的结果其原因是不正确地使用了牛顿-莱布尼茨公式，因为 $f(x)$ 的原函数 $\arctan\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处不连续.

例 10　当 k 为何值时，广义积分$\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^k}\mathrm{d}x$ 收敛？k 为何值时，发散？

解　$k=1$ 时，因

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{2}^{A}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \lim_{A\to+\infty}\int_{2}^{A}\frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln x} = \lim_{A\to+\infty}\ln\ln x\Big|_{2}^{A}$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\ln\ln A - \ln\ln 2 \text{ 不存在},$$