普通高等教育"十一五"规划教材

概率论与数理统计

鲜思东　主编

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书在编写过程中始终贯彻“以理论为基础，以应用为目标”的原则，深入浅出地介绍了概率论、随机过程与数理统计的基本理论、方法及应用，注意随机现象的思想与原理的叙述，特别强调概率论、随机过程与数理统计方法的应用，从实际问题入手，在不失理论严谨的前提下，淡化理论本身的数学推导，体现其应用性. 全书内容由概率论、随机过程和数理统计三部分组成，共分 8 章. 其中第一章为事件与概率，第二章为随机变量及其分布，第三章为随机变量的数字特征，第四章为随机过程，第五章为样本及抽样分布，第六章为参数估计，第七章为假设检验，第八章为回归分析，每章均安排有应用案例或实验，附录中给出了概率论与数理统计中常用的 MATLAB 基本命令等等.

本书可作为高等学校工科、理科（非数学专业）、生物、经管等专业的教材，也可作为数学建模与数学实验课程的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/鲜思东主编. —北京：科学出版社，2010
普通高等教育“十一五”规划教材
ISBN 978-7-03-028497-6

Ⅰ.①概… Ⅱ.①鲜… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 150060 号

责任编辑：窦京涛 张中兴/责任校对：张小霞
责任印制：张克忠/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2011 年 1 月第二次印刷 印张：17 1/2
印数：4 001—10 500 字数：350 000

定价：29.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

随着科学技术与计算技术的快速发展，概率论与数理统计的应用达到了前所未有的规模，其理论与方法几乎渗透到自然科学与社会科学的各个领域，是数学领域中一门具有独特魅力的分支，也是理论联系实际最活跃的数学学科之一. 从 20 世纪 80 年代起，概率论与数理统计已成为高等学校各专业开设的一门必修课. 为了适应信息技术的发展和高等院校培养复合应用型人才的需要，改变传统的大学教材注重理论的现状，提高大学数学的教学质量，有必要编写创新的教材. 经过多年的教学实践，我们认识到，只有深刻理解概率统计的思想，才能很好地应用概率统计方法解决实际问题. 为了让更多的读者领会概率统计的思想，灵活地应用概率统计方法来认识客观规律，并用它指导实际工作，我们精心编写了这本《概率论与数理统计》教材.

在教材的编写过程中，我们根据“以理论为基础，以应用为目标”的原则，通过多次讲义试用与调研，不断更新概率论与数理统计课程的教学内容，力求编写的教材具有以下特点：

(1)把握实质，注重思想. 紧扣研究随机现象的理论与方法的实质，注重理论的思想，淡化理论的证明，强化方法技巧与应用，在介绍传统的概率论与数理统计理论与方法的基础上，引入应用案例或实验，将概率论与数理统计的思想融入实际问题的解决之中.

(2)优化结构，体现思维. 新旧知识结合，既保持经典的内容不丢弃，又补充一些新的知识，如增加了随机过程和 MATLAB 统计计算等内容. 同时，强化了概率统计思想和方法，尤其是对非正态总体参数的估计与检验进行补充，并在此基础上介绍回归分析与建模，使学生学有所用，用有所依.

(3)与时俱进，学以致用. 理论与实际相结合，在实践中理解理论的精髓，每一章理论介绍结束后均安排有案例应用或实验探究；通过应用性案例和实验探究的引入，调动学生学习的积极性，达到学以致用的目的.

本书包括概率论、随机过程和数理统计三部分内容，共分 8 章. 其中第一章至第三章为概率论的知识，主要介绍了事件与概率、随机变量及其分布(一、二维)，以及随机变量的数字特征、极限定理. 第四章为随机过程，在介绍了随机过程基本概念及几类常见的随机过程的基础上，重点介绍了应用广泛的马尔可夫链. 第五章至第八章为数理统计，在介绍数理统计的基本概念与思想的基础上，主要讨论了参数估计与假设检验，并针对非正态总体的情况进行介绍，最后介绍了统计建模中的基本方法之一——回归分析. 概率论、随机过程与数理统计内容相互独立，随机过程与数理统计均以概率论为基础，可以根据不同专业的需要进行选用. 本书可作为高等学校工科、理科(非数学的专业)、经管、生物等专业概率论与数理统计课程或概率论与随机过程

课程的教材，也可作为各高校相关专业数学建模的教材或教学参考书.

本书在结构体系，内容安排，案例或实验选择、习题设置等方面努力满足信息时代高等院校培养复合应用型人才的要求. 全书以概念掌握为基础、以知识应用为目的、以适度拓展为原则，力求概念准确、叙述简明、文字流畅；注重学生基本运算能力的训练和分析、解决实际问题能力的培养；注意讲清概念、减少理论证明、加强理论与实践的联系；强调概率论、随机过程和数理统计方法的实际应用；案例或实验、例题和习题与教材内容紧密配合. 为了适应信息技术的发展和经济建设的需要，我们加强了随机数学建模或实验(软件)的内容，在每章内容结束前，安排有应用案例或实验，如投资风险决策、排队模型、财政收入预测、评委打分问题、蒙特卡罗方法等，在附录中给出了概率论与数理统计中常用的 MATLAB 基本命令等，并有意识地加强学习者的统计计算和解决实际问题能力的培养.

本书由鲜思东主编，并负责统稿定稿；副主编为潘显兵、胡学刚、陈六新、唐金芳；参加编写工作的还有四川文理学院的李正艳老师等，我的同事朱伟、郑继明、沈世云等参加了大纲的修订，并提出了许多宝贵的意见和建议. 我校教务处安世全教授、数理学院杨春德教授给予了大力的支持和帮助，同时，本书的出版得到了重庆邮电大学概率论与数理统计教材立项(JC2010-17)与重庆邮电大学数学与应用数学专业提升计划项目的资助，科学出版社的各位编辑老师也给了我们莫大的支持与帮助，在此一并表示衷心感谢.

由于我们水平有限，书中疏漏和不足之处在所难免，诚恳地希望读者批评指正.

编　者

2010 年 4 月

目　录

第一章　事件与概率

客观世界中有许多现象在其出现之前是可以被准确无误地预言的.例如,向上抛一石子必然下落.又如,同性电荷必不相互吸引.一般地,在一定条件下必然出现或一定不可能发生的现象称为确定性现象.在客观世界中也存在另一类现象.如,在相同条件下抛同一硬币,其结果可能是正面朝上,也可能是反面朝上,并且在每次抛掷之前无法肯定抛掷的结果是什么;又如,掷一枚匀称的骰子,并观察其点数.可以预言出现的点数为1,2,3,4,5,6.但究竟出现几点,在骰子投出之前是无法预料的.这类现象,在一定的条件下,可能出现这样的结果,也可能出现那样的结果,而在实验或观察之前不能预知确切的结果,这类现象称为随机现象.但人们经过长期的实践并深入研究之后,发现这类现象在大量重复实验或观察下,它的结果却呈现出某种规律性.例如,多次重复抛一枚硬币得到正面朝上结果的大致有一半,同一步枪射击同一目标的弹着点按照一定规律分布等.随机现象的这种在大量重复实验或观察中所呈现出的固有规律性,称为随机现象的统计规律性.概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学科学.

我们知道,生活中存在大量的随机现象.如何研究随机现象?随机试验的结果如何表示?随机试验某些结果发生的可能性是多少?这些问题将在本章进行一一介绍.

§1.1　随机事件

一、随机试验

为了研究随机现象内部存在的数量规律性,必须对所述随机现象进行观察或实验,今后我们把对随机现象所进行的观察或实验称为试验.试验通常用E表示.

例1.1.1　E_1:抛一枚硬币,观察正面H、反面T出现的情况.

例1.1.2　E_2:将一枚硬币抛掷三次,观察正面H、反面T出现的情况.

例1.1.3　E_3:将一枚硬币抛掷三次,观察正面出现的次数.

例1.1.4　E_4:检查一条生产线在24小时期间生产出的次品数.

例1.1.5　E_5:记录电话交换台一分钟内接到的呼唤次数.

例1.1.6　E_6:在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命.

例1.1.7　E_7:记录某地一儿童的身高和体重.

例1.1.8　E_8:向一个目标进行射击,对射击的结果进行观察.

通过分析可以发现,上述8个试验具有以下共同特点:

(1)试验可以在相同的条件下重复地进行;

(2)每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3)进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

具有上述三个特征的试验称为随机试验(experiment).显然,上述 8 个试验均是随机试验.今后我们提到的试验都是指随机试验.

对于随机试验,尽管在每次试验之前不能预知试验的结果,但试验的所有可能结果组成的集合是已知的,我们将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间(space),记为 S.样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为样本点.

例 1.1.9 请给出随机试验 E_2,E_3 的样本空间和相应的样本点.

解

$S_2=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$, $S_3=\{0,1,2,3\}$,
其中,S_2 和 S_3 中的每一个元素分别为 S_2 和 S_3 对应的样本点.

请同学们自己给出随机试验 $E_1,E_4,\cdots,E_8$ 的样本空间.

例 1.1.10 一个盒子中有 10 个完全相同的球,分别标以号码 $1,2,\cdots,10$,从中任取一球,令 $i=\{$取得球的标号为 $i\}$,则样本空间 $S=\{1,2,3,\cdots,10\}$.

通过上述例子可以发现:

(1)试验不同,对应的样本空间一般也不同.

(2)样本空间的元素是由试验的目的所确定的.例如,在 E_2 和 E_3 中同是将一枚硬币连抛三次,由于试验目的不一样,其样本空间也不一样.

(3)建立样本空间,就是建立随机现象的数学模型.因此,一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题.

二、随机事件

若某件事情在一次试验中一定发生,称这件事情为必然事件.显然必然现象的结果是必然事件.若某件事情在一次试验中一定不发生,称这件事情为不可能事件.例如,“在一幅扑克牌中任摸 5 张,其中花色各不相同”是不可能事件.显然,不可能现象的结果是不可能事件.必然事件与不可能事件互为对立的两面,它们都是事前可以预言的事情.

若某件事情在一次试验中可能发生也可能不发生,称这件事情为随机事件,简称事件.例如,抛掷一枚硬币,落下后它的正面向上(常把有币值的一面称为正面),这是一个随机事件,记作 $A=\{$正面向上$\}$;落下后正面向下也是一个随机事件,记作 $B=\{$正面向下$\}$.

根据事件的意义容易明白,试验的每一个可能结果是事件,因为这种事件不可能再分解为更简单的事件,所以我们特别称这种事件为基本事件.显然基本事件是含有一个样本点的单点集,而一般事件是含有若干个样本点的集合,即一般事件是由若干个基本事件复合而成的,它由若干样本点组成.因此,事件可以看成是样本空间 S 的一个子集.例如,“在投掷骰子的试验中,点数大于 3”的事件 $B=\{4,5,6\}$就是一个复合事件,B 为样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$的子集.

我们把不包含任何样本点的集合也看作是一个事件，因为一次试验必然要出现一个样本点，不含样本点的集合是不可能发生的，所以把不含样本点的集合作为一个事件就是不可能事件，用 Φ 表示. 样本空间 S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集，由于在每次试验中它总是发生的，因此 S 是必然事件.

在实际中，人们常常关心满足某种条件的那些样本点所组成的集合. 例如，若规定某种灯泡的寿命(小时)小于 500 为次品，则试验 E_6 中我们关心灯泡的寿命是否有 $t\geqslant 500$. 满足这一条件的样本点组成 S_6 的一个子集：$A=\{t\mid t\geqslant 500\}$，称 A 为 E_6 的一个随机事件. 显然，当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时，有灯泡的寿命 $t\geqslant 500$ 这个事件发生.

一般地，称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件，简称事件. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生.

下面给出几个事件的例子.

例 1.1.11　给出下列事件的描述.

在 E_2 中，事件 A_1："第一次出现的是 H"，即 $A_1=\{HHH,HHT,HTH,HTT\}$.

事件 A_2："三次出现同一面"，即 $A_2=\{HHH,TTT\}$.

在 E_6 中，事件 A_3："寿命小于 1000 小时"，即 $A_3=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant 1000\}$.

在 E_7 中，事件 A_4："身高在 1m 以内，体重在 35kg 以内的儿童"，即

$$A_4=\{(x,y)\mid 0<x\leqslant 100(\text{cm}),0<y\leqslant 35(\text{kg})\}.$$

例 1.1.12　一个盒子中有 10 个完全相同的球，分别标以号码 1，2，…，10，从中任取一球，可有 10 种不同的结果，$A_i=\{$取得球的标号为 $i\}$，$i=1,2,\cdots,10$，还有其他的可能结果，如 $B=\{$取得的数是偶数$\}$，$C=\{$取得的数小于 6$\}$，$D=\{$取得的数是 3 的倍数$\}$.

显然 $A_i(i=1,2,\cdots,10)$，B,C,D 都是随机事件. $A_i(i=1,2,\cdots,10)$是基本事件，B,C,D 是复合事件.

一个事件是否为基本事件是相对于试验目的来说的. 例如，在观察一次概率论与数理统计考试成绩的试验中，如果试验的目的仅是考查每个同学的成绩(分数)，对任意整数 $x\in[0,100]$，事件"某个同学的分数为 x"都是基本事件. 若考查同学的概率成绩是为了判断是否需要补考，这时只有两个基本事件.

三、事件的关系与运算

事件是一个集合，因而事件间的关系与运算自然按照集合论中集合之间的关系和集合运算来处理. 根据"事件发生"的含义，给出它们在概率论中的含义. 设试验 E 的样本空间为 S，而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$是 S 的子集.

1. 包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 包含于事件 B，记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$，如图 1.1.1 所示.

在例 1.1.10 中,若 $A=\{$球的标号为 4$\}$,$B=\{$球的标号是偶数$\}$,则 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

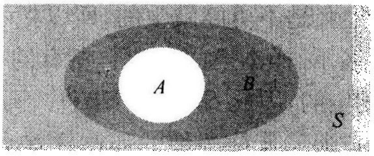


图 1.1.1　$B\supset A$ 或 $A\subset B$

2. 相等关系

若事件 B 包含事件 A,事件 A 也包含事件 B,即 $B\supset A$ 且 $A\supset B$,则称事件 A 与事件 B 相等,记为 $A=B$.

在例 1.1.10 中,若 $A=\{2,4,6,8,10\}$,$B=\{$球的标号是偶数$\}$,则 $A=B$.

3. 事件的和

事件 A 与事件 B 至少有一个发生,这一事件称为事件 A 与事件 B 的和,记为 $A\cup B$,如图 1.1.2 所示.

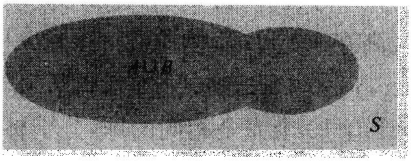


图 1.1.2　$A\cup B$

类似地,n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生,这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和,记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,简记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$.

在例 1.1.10 中,若 $A=\{$球的标号$\leqslant 3\}$,$B=\{$球的标号是偶数$\}$,则 $A\cup B=\{1,2,3,4,6,8,10\}$.

4. 事件的积

事件 A 与事件 B 同时发生,这一事件称为事件 A 与事件 B 的积,记为 $A\cap B$ 或 AB. 如图 1.1.3 所示. 类似地,n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生,这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积,记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$.

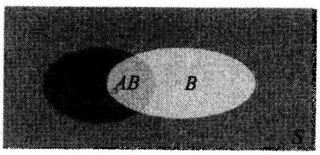
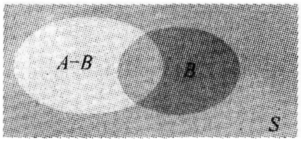


图 1.1.3　$A\cap B$

在例 1.1.10 中,若 $A=\{$球的标号$\leqslant 3\}$,$B=\{$球的标号是偶数$\}$,则 $A\cap B=\{2\}$.

5. 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的差，记为 $A-B$，如图 1.1.4 所示.



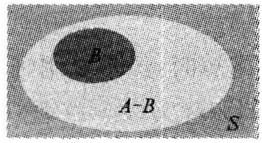


图 1.1.4　$A-B(B\not\subset A)$　$A-B(B\subset A)$

在例 1.1.10 中，若 $A=\{$球的标号$\leqslant 3\}$，$B=\{$球的标号是偶数$\}$，则 $A-B=\{$球的标号是 1,3$\}$.

6. 互不相容

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，亦即 $AB=\Phi$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容的，如图 1.1.5 所示.

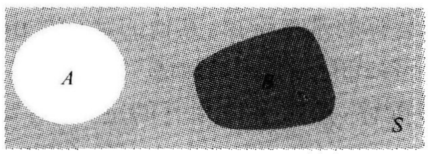


图 1.1.5　$AB=\Phi$

在例 1.1.10 中，若 $A=\{$球的标号为 3$\}$，$B=\{$球的标号是偶数$\}$，则 $AB=\Phi$.

7. 互逆关系

若在任何一次试验中，事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生，亦即事件 A 与事件 B 满足 $A\cup B=S$，$A\cap B=\Phi$，则称事件 A 与事件 B 互逆，又称 A 是 B 的对立事件(或 B 是 A 的对立事件)，记为 $A=\overline{B}$(或 $B=\overline{A}$).

在例 1.1.10 中，若 $A=\{$球的标号为奇数$\}$，则 $B=\overline{A}=\{$球的标号是偶数$\}$.

8. 完备事件组

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 E 的一组事件，若

(1) $A_iA_j=\Phi, i\neq j; i,j=1,2,\cdots,n$;

(2) $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=S$,

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 S 的一个完备事件组.

显然，当 $n=2$ 时，A_1,A_2 为对立事件，即对立事件为完备事件组的特殊情况.

例 1.1.13　设 A,B,C 是 S 中的随机事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列事件：

事件“A 与 B 发生，C 不发生”可以表示成 $AB\overline{C}$；

事件“A,B,C 中至少有两个发生”可以表示成 $AB\cup AC\cup BC$；

事件“A,B,C 中恰好发生两个”可以表示成 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；

事件“A,B,C 中有不多于一个事件发生”可以表示成 $\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\cup A\ \overline{B}\ \overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$；

在进行事件的运算时，经常要用到下述定律：设 A,B,C 为事件，则有

(1)交换律　$A\cup B=B\cup A, AB=BA$.

(2)结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (AB)C=A(BC)$.

(3)分配律　$A(B\cup C)=AB\cup AC, A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C)$.

(4)重叠律　$A\cup A=A, AA=A$.

(5)否定律　$\overline{\overline{A}}=A, \overline{S}=\Phi$.

(6)互逆律　$A\cup\overline{A}=S, A\overline{A}=\Phi$.

(7)差化积　$A-B=A\overline{B}$.

(8)吸收律　若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B, AB=A$；$AS=A, A\cup S=S$.

(9)对偶律(德·摩根律)$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

以上列出的都是事件运算的基本定律，其他的定律可由这些定律推导出来. 下面只给出分配律的证明. 其余各式的证明留给读者当成练习.

证明　我们仅证明分配律，按照事件相等的定义，需要证明：$A(B\cup C)\subset AB\cup AC$，且 $AB\cup AC\subset A(B\cup C)$. 事实上，假设 $A(B\cup C)$ 发生，那么 A 发生，且 $B\cup C$ 发生. $B\cup C$ 发生意味着 B,C 中至少有一个发生. 若 B 发生，则 AB 发生，从而有 $AB\cup AC$ 发生；若 C 发生，则 AC 发生，从而 $AB\cup AC$ 发生. 因此，$AB\cup AC\supset A(B\cup C)$. 反过来，假设 $AB\cup AC$ 发生，那么或者 AB 发生，或者 AC 发生. 如果 AB 发生，即 A 与 B 都发生，从而 A 与 $B\cup C$ 都发生，因此 $A(B\cup C)$ 发生；如果 AC 发生，即 A 与 C 都发生，从而 A 与 $B\cup C$ 都发生，因此 $A(B\cup C)$ 发生. 于是 $AB\cup AC\subset A(B\cup C)$. 所以，$AB\cup AC=A(B\cup C)$.

再来证明 $A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C)$. 假设 $A\cup BC$ 发生，那么或者 A 发生，或者 BC 发生. 如果 A 发生，那么 $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 都发生，从而 $(A\cup B)(A\cup C)$ 发生；如果 BC 发生，那么 B 与 C 都发生，从而 $(A\cup B)(A\cup C)$ 发生. 于是 $A\cup BC\subset(A\cup B)(A\cup C)$. 假设 $(A\cup B)(A\cup C)$ 发生，那么 A 可能发生，也可能不发生. 若 A 发生，则 $A\cup BC$ 发生；如果 A 不发生，那么由于 $A\cup B$ 发生，则必然 B 发生；又由于 $A\cup C$ 发生，必然 C 发生，因此 BC 发生. 从而 $A\cup BC$ 发生，因此 $(A\cup B)(A\cup C)\subset A\cup BC$. 所以，$A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C)$.

例 1.1.14　在例 1.1.11 中有 $A_1\cup A_2=\{HHH, HHT, HTH, HTT, TTT\}$，$A_1\cap A_2=\{HHH\}$，$A_2-A_1=\{TTT\}$，$A_1-A_2=\{THT, TTH, THH\}$.

§1.2　概率的定义与计算

随机试验中的随机事件有可能发生，也有可能不发生，人们不能事先知道，但它们发生的可能性大小却是客观存在的，即随机事件发生可能性大小是一个客观存在的量. 概率是对随机事件发生可能性大小的客观度量. 例如，对问题“这次概率论期末考试是否会顺利通过?”，有人会说“我有 90％的把握顺利通过概率论期末考试”. 每个进行投资决策的人都关心投入的资金获得最大利润的可能性有多大. 这些问题实际都涉及了随机事件的概率. 下面，我们用数量指标来反映事件发生可能性大小.

一、频率与概率的统计定义

定义 1.2.1　在相同的条件下，进行 n 次试验，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数. 比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率，记为 $f(A)$.

容易理解，频率反映了事件 A 在 n 次试验中平均每一次试验发生的可能性大小. 频率越大，事件 A 在一次试验中，发生的可能性越大；频率越小，事件 A 在一次试验中发生的可能性越小.

从频率的定义可见频率具有下列性质：

1°　非负性：$0 \leqslant f(A) \leqslant 1$；

2°　规范性：$f(S)=1$；

3°　有限可加性：对任意有限个两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，有

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} f(A_i).$$

尽管事件在一次试验中发生与否是偶然的，但在大量的实验中，事件发生的频率却随着试验次数的增加总在一个常数附近摆动，这种规律性称为频率的稳定性. 例如掷硬币的试验中，发生正面的频率应稳定在 0.5 左右. 历史上曾有不少科学家做过试验，其结果见表 1.2.1.

表 1.2.1　抛硬币试验的结果

实验者	抛掷次数 n	出现正面次数 n_A	频率 n_A/n
德·摩根	2048	1017	0.4966
德·摩根	2048	1048	0.5117
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
维尼	30000	14994	0.4998
德·摩根	2048	1039	0.5073
德·摩根	2048	1061	0.5181
皮尔逊	24000	12012	0.5005

从表 1.2.1 中数据可以看出:①频率具有随机波动性(即使对于同样的试验次数 n,所得的 $f(A)$ 是不尽相同);②抛掷硬币的次数 n 较小时,频率 $f(A)$ 随机波动的幅度较大,但随着 n 增大,频率 $f(A)$ 呈现出稳定性,即当 n 逐渐增大时 $f(A)$ 总是在 0.5 附近摆动,而逐渐稳定于 0.5.

又如,曾有人统计过某个国家每年因没有写清楚地址或其他原因而无法投递的信件数.这从常识看,似乎没有什么规律性,但经过统计以后惊人地发现,一年中这类信件在全体信件中所占比例几乎保持不变,如表 1.2.2 所示.

表 1.2.2　无法投递信件的频率

年份	信件总数 n	无法投递信件数 n_A	频率 n_A/n
1906	983×10^6	54861	56×10^{-6}
1907	1076×10^6	53500	50×10^{-6}
1908	1214×10^6	59627	49×10^{-6}
1909	1357×10^6	62088	46×10^{-6}
1910	1057×10^6	76164	51×10^{-6}

这类例子不胜枚举.这一切表明,当 n 较小时,频率 $f(A)$ 在 0 与 1 之间随机波动,其幅度较大.而当 n 逐渐增大时,频率 $f(A)$ 逐渐稳定于某个常数,即在大量的试验中事件 A 具有频率的稳定性,也就是统计规律性.它说明事件在一次试验发生可能性的大小是事件本身所固有的,因而我们可以对这种可能性的大小进行度量.为此给出概率的统计定义.

定义 1.2.2①　在相同的条件下,重复做 n 次试验.记 n 次试验中事件 A 发生的次数为 n_A,当试验次数很大时,如果频率 n_A/n 稳定地在某一数值 p 的附近摆动.并且一般说来,摆动的幅度随着试验的次数的增多而愈变愈小,则称数值 p 为随机事件 A 在该条件下发生的概率,记为

$$P(A)=p.$$

显然数值 p 是从数量上刻画在该条件下事件 A 发生的可能性的大小.由定义 1.2.2容易发现,随机事件的概率就是频率的稳定值.由于频率 n_A/n 介于 0 与 1 之间,即

$$0\leqslant\frac{n_A}{n}\leqslant1,$$

于是由定义 1.2.2 可知,对任何事件 A 都有

$$0\leqslant P(A)\leqslant1.$$

对于必然事件 S,由于它在每次事件中都必然发生,因此 S 的频率等于 1,而对于不可能事件 Φ,不管做多少次试验,其频率都是 0.所以 $P(S)=1,P(\Phi)=0$.

① 我们这里给出的概率的统计定义,它只是定性的定义,数学上不严格,在第三章中我们通过大数定律来说明.精确的概率定义将在后面给出.