李洲圣　唐长红 著

三维空间张量分析的矩阵方法

SANWEI KONGJIAN ZHANGLIANG FENXI DE JUZHEN FANGFA

航空工业出版社

三维空间
张量分析的矩阵方法

李洲圣　唐长红　著

航空工业出版社
北　京

内容提要

本书采用非传统方法讨论张量的概念和运算。作者提出了一套新的符号系统和运算法则用于矢量和张量的运算，取代传统的上下指标表示和爱因斯坦求和约定的方法。其主要特点是把坐标系作为一种特别的数学变量，给出其表达的符号，规定其运算法则，与伴随矩阵一起表示一个张量，并且用来进行张量的计算。这种表示张量的方式被称作矢量和张量的解析表达式。通过张量的解析表达式完成张量的各种运算以及研究张量的性质和张量之间的运算规律。书中给出不同的示例用以演示本方法的具体操作，同时也简要讨论了某些应用张量理论的典型力学和数学问题。

图书在版编目（CIP）数据

三维空间张量分析的矩阵方法/李洲圣，唐长红著.
--北京：航空工业出版社，2010.11
ISBN 978-7-80243-649-7

Ⅰ.①三…　Ⅱ.①李…②唐…　Ⅲ.①张量分析
Ⅳ.①O183.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 227877 号

三维空间张量分析的矩阵方法
Sanwei Kongjian Zhangliang Fenxi de Juzhen Fangfa

航空工业出版社出版发行
（北京市安定门外小关东里 14 号　100029）
发行部电话：010-64815615　010-64978486

北京地质印刷厂印刷　　全国各地新华书店经售
2010 年 11 月第 1 版　　2010 年 11 月第 1 次印刷
开本：787×1092　1/16　　印张：23　　字数：554 千字
印数：1—1500　　定价：86.00 元

前　言

张量的理论和方法在许多领域里有着极其重要的应用，成为强有力的和不可替代的数学工具。但是学习和掌握张量的理论和方法比较困难。传统的张量上下指标表示方法的确是简洁数学符号的典范，但是因为它难以掌握，也成为张量理论在工程上广泛应用的一个障碍。初学张量的人会为张量的协变指标、逆变指标、协变分量、逆变分量、指标的上升和下降，何时以及为何要进行指标的升降等问题所困扰。对于高阶张量的数据结构难以想象，面对所谓的指标缩并运算带来的数据结构变化等不易掌握。其实这些还都是张量的最基本的运算，是张量分析的基础，至于进一步的推演会使人们感觉更加抽象。

本书采用了一套新的符号系统和运算法则用于矢量和张量的运算，取代传统的上下指标表示和爱因斯坦求和约定的方法。其主要特点是把坐标系作为一种特别的数学变量，给出其表达的符号，规定其运算法则，与伴随矩阵一起表示一个张量，并且用来进行张量的计算。这种表示张量的方式被称作矢量和张量的解析表达式。通过张量的解析表达式完成张量的各种运算以及研究张量的性质和张量之间的运算规律是本书的核心内容。本书的方法与传统张量分析方法有一些明显的不同。比如，传统方法中度量张量是一个非常重要的张量，而本方法更多使用度量矩阵，它是一个用于协变与逆变坐标系之间转换的矩阵。又如，本书方法定义了克里斯托费尔张量，它是一个三阶张量，与克里斯托费尔符号（记号）不同，克里斯托费尔符号不是张量，传统方法中没有克里斯托费尔张量。本书方法研究的所有量都被清楚地区分为标量、矩阵、坐标系和张量（矢量是一阶张量），除此之外没有其他量。

虽然本质上张量是与坐标系无关的，但是张量在表现它的数据时又与坐标系密切相关，为了讨论问题方便起见，将张量按照使用坐标系的不同进行一个大概的分类。最常用的坐标系就是直角笛卡儿坐标系（简称 RCC 坐标系），使用这种坐标系的张量称作笛卡儿张量。本书的第一部分限于讨论笛卡儿坐标系和笛卡儿张量，同时也在建立本方法的基本思想。笛卡儿坐标系和笛卡儿张量也是讨论其他坐标系和其他张量的基础。本书的第二部分讨论 RCC 坐标系之外的坐标系和与之对应的张量，主要是讨论曲线坐标系和曲面坐标系，以及由曲面坐标系建立的 S 族坐标系。与曲线坐标系对应的是一般张量，与曲面坐标系对应的是曲面张量。而且，曲面坐标系可以看作是曲线坐标系的一种特例。为了能够容易地从直角笛卡儿坐标系过渡到曲线坐标系，在第二部分一开始讨论了仿射坐标系，或者称作倾斜笛卡儿坐标系。为了理解上的方便，本书仅限于讨论三维空间的问题。本书的第 10 章讨论了张量在某些力学领域的应用，也是对本方法综合应用的练习。

采用解析表达式的好处，一是对张量的数据结构能够有一个非常清晰的了解，二是便于张量之间的运算和公式的推导。这种方法虽然不如传统方法那样书写简洁，但是运算和推导过程变得非常清晰和易于掌握。采用当今流行的面向对象编程（OOP）方法，通过张量的解析表达式，使得张量运算的编程变得容易实现，从而也为张量理论的工程应用找到

一条途径。为此，作者使用 MATLAB 语言特别编写了采用本书方法的类库，并在书中插入了许多程序例子用以检查和验证书中的公式和结论。

本书的大部分结论和公式都有推导过程，这些也可以看作是本方法的练习。但是本书的论述方式并不过分追求数学上的严密，比如，当写出 $\partial\varphi/\partial x$ 时就认为 φ 一定是 x 的函数，并对 x 是可求导的，然而这些数学上的严密用语一般都被忽略。这样做旨在阐述本方法的思想和操作。读者只要具备微积分、矩阵运算和场论的基本知识就可以阅读本书。

张量分析的方法在连续介质力学、电磁场、微分几何和相对论等多个领域里有着广泛深入的应用。作者运用本书的方法在“飞豹”系列飞机和其他型号的设计中获得了成功的运用。但是作者深知所做的讨论还十分肤浅，书中定有表述不当或浅薄谬误之处，敬请读者不吝赐教。

作 者

2010 年 9 月

基本符号含义

这里给出了书中各章节一贯使用的保留符号习惯。而书中其他大多数符号常常可能被重复定义，它们都会在出现的时候予以说明。

$\vec{\chi}$[①]：泛指一个任意直角笛卡儿坐标系；

$\vec{\chi}_0$：绝对参考直角笛卡儿坐标系；

$\vec{\chi}_i$：用下标 i 指示某个特指的直角笛卡儿坐标系；

$\vec{\chi}^{\mathrm{T}}$：坐标系 $\vec{\chi}$ 的转置形态用右上标 T 表示；

$\vec{a}$，$\vec{b}$，…：矢量用上面带箭头的拉丁或者希腊字母表示；

$\vec{a}^{\mathrm{T}}$，$\vec{b}^{\mathrm{T}}$，…：矢量的转置矢量用右上标 T 表示；

$\vec{\vec{d}}$，$\vec{\vec{t}}$，…：二阶张量用上面带两个箭头的拉丁或者希腊字母表示；

$\vec{\vec{A}}_{i,j}$：两个坐标系 $\vec{\chi}_i$ 和 $\vec{\chi}_j$ 之间的坐标转换张量；

$\vec{\vec{A}}_i$：坐标系 $\vec{\chi}_i$ 与绝对坐标系 $\vec{\chi}_0$ 之间的坐标转换张量；

$\hat{\vec{a}}$，$\hat{\vec{b}}$，…：矢量的升张量用上面带一个箭头和符号“∧”的拉丁或者希腊字母表示，升张量是具有特殊定义的二阶张量；

$\vec{\vec{d}}^{\mathrm{T}}$，$\vec{\vec{t}}^{\mathrm{T}}$，$\vec{\vec{A}}_{i,j}^{\mathrm{T}}$…：张量的转置张量用右上标 T 表示；

$\vec{\vec{d}}^{-1}$，$\vec{\vec{t}}^{-1}$，…：二阶张量的逆张量用右上标 –1 表示；

ξ，$\vec{\alpha}$：坐标系 $\vec{\chi}$ 的欧拉数和欧拉矢量，合称欧拉–罗德里格参数，特定用于一个任意坐标系 $\vec{\chi}$ 与绝对坐标系 $\vec{\chi}_0$ 之间的欧拉转动；

$\{a\}$，$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$…：一个矢量 $\vec{a}$ 的伴随矩阵是含有三个分量的列矩阵，列矩阵用{　}表示；

$\tilde{t}$，$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}$…：一个二阶张量 $\vec{\vec{t}}$ 的伴随矩阵是一个方阵，用张量字母上面加符号“~”表示；

$\vec{0}$，$\vec{\vec{0}}$：零矢量和零张量。其伴随矩阵的所有分量全部为零；

$\vec{\vec{I}}$：单位张量；

① 按 GB 3102.11—93 规定，印刷体应写为黑体（$\boldsymbol{x}$）。考虑到本书书写的特殊需要，故本书的矢量、张量均用手写体（$\vec{\chi}$，$\vec{\vec{\chi}}$）形式。

——编者注

$\tilde{I}$：单位对角矩阵，$\tilde{I}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$；

$\dot{\bar{\chi}}$，$\dot{\bar{a}}$，$\ddot{\bar{a}}$，$\dot{\bar{\bar{d}}}$…：坐标系、矢量或者张量对时间的导数用字母上面加圆点表示；

*：表示坐标系之间，或者矢量之间，或者矢量与张量之间以及张量与张量之间的点积运算；

$L()$，$L^{-1}()$：将一个括号中的矢量升阶为一个升张量和将一个升张量降阶为一个对应矢量的运算操作符；

$\bar{\nabla}$：算子矢量，表示对一个场求空间导数；

$\bar{\psi}$，$\bar{\Psi}$：一个任意非直角笛卡儿坐标系的协变坐标系和逆变坐标系；

$\bar{e}_1$，$\bar{e}_2$，$\bar{e}_3$：曲线坐标系的协变坐标系的基矢量；

$\bar{h}_1$，$\bar{h}_2$，$\bar{h}_3$：曲线坐标系的逆变坐标系的基矢量；

$\tilde{\backepsilon}$，$\tilde{\exists}$：一个非直角笛卡儿坐标系与一个直角笛卡儿坐标系之间的转换矩阵；

$\tilde{\triangleright}$，$\tilde{\triangleleft}$：一个非直角笛卡儿坐标系的协变坐标系与逆变坐标系之间的转换矩阵，也称作一个非直角笛卡儿坐标系的度量矩阵；

Ω，Ω'：一个非直角笛卡儿坐标系的协变度量六面体的体积和逆变度量六面体的体积，这两个量之间总保持有 $\Omega\,\Omega'=1$；

$\bar{\bar{\bar{\mathfrak{J}}}}$：Eddington 张量，可以用来完成两个矢量的叉乘积运算；

$\bar{\bar{\bar{\Gamma}}}_1$，$\bar{\bar{\bar{\Gamma}}}_2$：第一类和第二类克里斯托费尔张量；

$\bar{\bar{\bar{\mathfrak{R}}}}_1$，$\bar{\bar{\bar{\mathfrak{R}}}}_2$：第一类和第二类曲率张量；

$\bar{\bar{\bar{\mathfrak{R}}}}$：黎曼－克里斯托费尔张量。

目　录

基本符号含义

第1篇　直角笛卡儿坐标系和笛卡儿张量

第1章　概论……3
　1.1　什么是张量……3
　1.2　空间与坐标系……4
　1.3　坐标系的表示和初等运算……5
　1.4　位置矢量和一般矢量……7
　1.5　张量的表示方式……8
第2章　基本约定和运算……10
　2.1　矢量和张量的解析表达式……10
　2.2　不同坐标系之间的转换……12
　2.3　几种特殊张量……12
　2.4　张量和它的参考坐标系……14
　2.5　矢量和张量的基本运算法则……14
　2.6　张量的数据结构、高阶张量……20
　2.7　二阶张量的主坐标系、映射特性和 Cayley-Hamilton 方程……25
第3章　欧拉–罗德里格参数法与坐标系转换……32
　3.1　坐标系转换张量……32
　3.2　欧拉转动、方位矢量与坐标系转换张量……33
　3.3　欧拉–罗德里格参数与方位矢量……34
　3.4　坐标系转换张量与欧拉–罗德里格参数……35
　3.5　参数张量和转换张量……35
　3.6　由转换矩阵求欧拉–罗德里格参数……36
第4章　矢量和张量对时间的导数……40
　4.1　绑定坐标系的定义……41
　4.2　坐标系对时间的导数……41
　4.3　矢量对时间的导数……42
　4.4　张量对时间的导数……44
　4.5　关于欧拉–罗德里格参数的等式……45
　4.6　坐标系的瞬时角速度矢量 $\vec{\omega}$……45
　4.7　欧拉–罗德里格参数方程……46
　4.8　作一般运动的刚体内各点的速度和加速度……47

4.9 动量、动量矩和惯量矩张量 48
4.10 刚体运动的一般方程 51
4.11 飞机飞行力学中的基本方程 53
4.12 半摇臂式起落架落震试验动力学仿真 55
4.13 多刚体动力学仿真计算的直接牛顿－欧拉法 61
第 5 章 笛卡儿张量场 68
5.1 物理场定义 68
5.2 张量在空间方向上的变化率、微分矢量算子 69
5.3 流体流场、无黏性流体的欧拉方程 72
5.4 应变张量和应力张量 74

第 2 篇 曲线坐标系和一般张量

第 6 章 仿射坐标系中的矢量和张量 87
6.1 仿射坐标系与它的互易坐标系、协变与逆变坐标系 87
6.2 仿射坐标系中矢量的解析表达式 92
6.3 两个不同仿射坐标系之间的坐标系转换 94
6.4 仿射坐标系与直角坐标系之间的转换 95
6.5 仿射坐标系中的二阶张量 97
6.6 仿射坐标系中矢量的点积和叉乘积运算 106
6.7 高阶张量的数据结构转换和转置运算 108
第 7 章 曲线坐标系和一般张量 112
7.1 曲线坐标系和当地仿射坐标系的基矢量 112
7.2 两个不同曲线坐标系之间的转换 124
7.3 一般张量、曲线坐标系中的特殊张量 127
7.4 高阶张量及其点积和并积运算 127
7.5 一般张量的双点积运算和多点积运算 130
7.6 张量方程的阶、纯张量方程 133
7.7 二阶张量的不变量 133
第 8 章 张量分析 136
8.1 笛卡儿坐标系中对张量求空间导数的规则 136
8.2 一般坐标系中的微分矢量算子 $\vec{\nabla}$ 141
8.3 克里斯托费尔张量 142
8.4 矢量的空间导数（矢量场的梯度场） 154
8.5 梯度、散度、旋度和拉普拉斯 158
8.6 方向导数 170
8.7 积分定理 173
8.8 二阶张量的空间导数 176
8.9 张量的微分 178
8.10 克里斯托费尔张量的空间导数、黎曼－克里斯托费尔张量 180

8.11　Ricci 张量和 Einstein 张量 …… 186
8.12　关于欧氏空间与黎曼空间的讨论 …… 192
第 9 章　曲面张量和 S 族坐标系 …… 196
9.1　曲面坐标系 …… 196
9.2　曲面坐标系的克里斯托费尔张量和曲率张量 …… 201
9.3　空间曲线的曲率、Frenet-Serret 方程 …… 206
9.4　基础坐标曲面的曲率 …… 210
9.5　曲面域的面积 …… 217
9.6　Weingarten 方程和高斯方程 …… 218
9.7　测地线和测地线方程 …… 221
9.8　两个不同曲面坐标系之间的转换 …… 225
9.9　S 族坐标系 …… 226
第 10 章　张量在物理学中的某些应用 …… 230
10.1　矢量的物理分量 …… 230
10.2　质点运动的动力学方程 …… 232
10.3　连续介质力学的基本方程 …… 239
10.4　流体力学中的 Navier－Stokes 方程 …… 242
10.5　相对论 …… 257
附录 A　带有微分矢量算子的常用张量计算公式 …… 261
附录 B　双三次 B 样条拟合曲面 S 族坐标系中的 Navier-Stokes（N-S）方程 …… 264
附录 C　一般张量类库函数 …… 293
参考文献 …… 357

第 1 篇　直角笛卡儿坐标系和笛卡儿张量

第 1 章　概　　论

本章从张量的基本定义出发，介绍本书表示张量的新方法。特别是坐标系的表示方法及其基本代数运算，由此产生所谓的张量解析表达式。对坐标系从初等运算到微分运算，一直是本书方法的基础，也是与传统的张量表示方法和运算方法有所区别的起因。

1.1　什么是张量

对于不了解张量的人，回答这个问题确实有些困难，虽然在许多学科领域都会出现类似的情况。关于张量的定义，不同地方的叙述是不一样的，即使对于什么是矢量这样的问题，也要看是什么人来回答，学生、工程师与数学家的回答就不同。将 vector 翻译为矢量，矢者，箭也。射出一支箭前，一定是先瞄准一个方向，所以“矢”就有方向的含义，矢量就被理解为具有方向的量。这个理解虽然不够专业，但是大体不错。将 tensor 翻译为张量，就没有办法产生什么联想。张量也实在不好简单地想象，如果希望了解它，只好认真下一些功夫，从对张量性质的不断深入了解中认识张量。参考文献[7]中有这样的叙述：“张量是这样一种量，它遵守一定的转换规则。这就是，标量、矢量、矩阵和高阶数组都可以作为张量的分量。我们所感兴趣的，是去发现这些分量在不同的坐标系中应当如何被描述。我们需要这些转换法则的知识，以便我们能够以与坐标系无关的形式来描述各种物理规律。”参考文献[1]中的叙述是这样的：“张量的概念如同矢量一样，是一种不变的概念。这里的意思是指它是一种与任何参照坐标系无关的实体。然而如同矢量一样，针对特定的坐标系，它可以用它的一组所谓分量来表示。这组分量可以是常数或者函数，用它们描述张量的方法关键在于它们如何随坐标系的改变而转换。”我们以为这可以作为张量的一般定义。我们也从参考文献[11]中会看到一些令人十分困惑的叙述，比如“所有的矢量都不是张量，虽然所有的一阶张量都是矢量……”传统的方法中对于张量和矩阵在表示和叙述时常常混淆在一起，这些都不利于对张量的理解和运算方面的深入研究。当我们更深入地了解张量的性质、运算规律，以及如何利用张量方程描述物理定律时，我们对于什么是张量这个问题才能获得最终的理解。

标量和矢量是为人们所熟知并且广为应用的量，矢量的应用为许多物理问题的分析带来了极大的方便。然而，在物理学和应用数学领域，仅仅用标量和矢量并不能描述所有的量，因而需要一种数据结构更为复杂的所谓张量。我们知道一个矢量对应于坐标系有三个分量，这三个分量以固定的顺序构成一组数据。张量则对应有更多的分量，这些分量也有固定的组织结构。从本质上看，矢量和张量是与坐标系无关的量，但是它们的分量是与坐标系密切相关的，对应于不同坐标系，它们的分量必定按照确定的规律随之改变。借用一个不确切的比方，就像一根杆子，光源放在不同的位置看到的影子不同，这根杆子就是张量，光源是坐标系，影子就是张量的分量。

我们用张量的阶数来表示张量分量数据结构的复杂程度，阶数愈高的张量，其结构愈为复杂。根据一般的实际使用需要，本书仅讨论四阶以下（包括四阶）的张量。按照本书

的方法，张量只有两种生成方式：一是由张量之间的运算必定生成新的张量（包括零阶张量）；二是一个低阶张量的所有分量如果用相同阶数的其他张量取代，则生成高阶张量。本书的方法特别规定，任何矩阵或者数组都不是张量，也不可以作为张量的一个分量。按照本方法，矩阵或者数组与张量无论在概念上或者表示方式上是有严格区分的。

按照上面的定义，一个任意标量（一个实数）与坐标系是无关的，那么它是否是张量呢？回答是肯定的，任意标量是零阶张量。但是如果拿出某一点在某个坐标系的 x 轴的坐标，比如为 P_x，这个 P_x 是个标量，但是因为它的意义不能离开坐标系，是与坐标系相依赖的，按照张量的定义它就不能是零阶张量。所以零阶张量一定是标量，而标量不一定都是零阶张量。类似的情况也会发生在矢量上，即一阶张量一定是矢量，而并非所有的矢量都是一阶张量。这个现象是客观的存在，也是易于区分的。因为这个缘故，我们把独立于坐标系的张量称为纯张量，反之为准张量。同阶数的纯张量与准张量其分量的数据结构是一样的，运算规则也相同，但是其作用的范围不同。以后我们把纯张量与准张量统称张量，包括所谓的纯标量与准标量、纯矢量与准矢量等。张量研究的重点是纯张量，但在张量运算的中间过程，或者研究针对具体坐标系的运算时，就会出现准张量。在必要的时候我们会对它们予以区分，并说明区分的意义。

1.2 空间与坐标系

把空间中的几何图形作为数学来研究早在古希腊就有辉煌的成就，最有名的要数欧几里得以及欧几里得几何。直到欧洲文艺复兴时期，一位法国的哲学家和数学家笛卡儿将坐标系的概念引入几何学，开创了用代数的方法研究空间几何图形的新时代。“坐标几何的引进，对于几何的研究是一个很重要的转折点。我们现在学解析几何的时候觉得很容易，可是事实上整个观念的改变是划时代的贡献”。这样一来，几何的问题就不再只是几何证明和计算，而是可以绕过欧几里得几何公理来研究空间的几何图形。这个方法还让我们对一维、二维和三维空间的理解和表述变得容易，也让我们进入对高维空间的想象。所以坐标系概念的出现是几何学研究的一个重要转折点，也是人们对空间理解的一个重要转折点。从此以后，当我们讨论空间这个概念时，再也无法抛开坐标系这个概念，坐标系成为描述空间的基本工具，当然它也是本书中最为基础的概念之一。

笛卡儿所定义的坐标系是直角坐标系，我们称之为笛卡儿坐标系，它的基本要素是：指定空间的一个点作为坐标系的原点；过坐标原点作三个相互垂直的单位矢量 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$，这三个单位矢量 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 称作坐标系的基矢量。对于用笛卡儿坐标系描述的空间任意点，当地坐标尺都是一样的（同样的 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$）。这件事看起来是简单而又自然的，然而从深层想，它所描述的空间与欧几里得的几何空间是一致的。在这种空间中，基准方向处处不变，空间的度量尺度在任何方向上相同并且不会拉长也不会缩短，沿着一个不变方向走出去是空间中的一条直线，欧几里得几何的定理只有在这种空间中才是成立的。显然，对于平直的几何图形，用这种空间描述是最简单而又方便的了。

然而，并非所有的问题使用笛卡儿坐标系来描述都是方便的，本书在第 2 篇中着重讨论的是曲线坐标系。在曲线坐标系中，空间任意一点的当地坐标系的三个基矢量不一定是

互相垂直的，三个基矢量的长度也不一定相等，甚至三把尺子的性质都不一样，比如一把是量长度的直尺，另外两把是量角度的量角器。此外，不同空间点的当地基矢量之间可能不是平行的，基矢量的长度也可能变化。可以想象这种空间既是扭曲的，也有被拉长或者收缩出现。根据张量的定义，张量是与坐标系无关的量，因此用张量写出的方程也与坐标系无关。某些复杂的物理场在笛卡儿坐标系中描述起来可能非常困难，但是如果建立适当的曲线坐标系则会变得容易。设想一只甲虫在双曲面上爬行，甲虫的爬行轨迹当然是一条三维空间曲线，而对于甲虫来说，它只知道是在二维的面上爬行。如果采用双曲面坐标系来描述甲虫的运动，运动轨迹就可以用二维空间的坐标来描述。如果幸好甲虫是沿着双曲面上一条曲线坐标轴爬行，运动轨迹就能用一维坐标描述。一维和二维的数学处理总比三维要简单一些，这也能够符合甲虫的感受。

对于研究所限定的某个空间域，可以定义多个坐标系。这多个坐标系可以是不同的直角笛卡儿坐标系，也可以包括不同的曲线坐标系，这完全取决于研究问题的需要和方便。对于一个复杂的物理现象的研究，有时需要同时定义多个不同的坐标系，使得不同的张量在其最容易描述的坐标系中定义，然后实现它们之间的运算。因此，坐标系之间的转换和运算是完成张量之间运算的前提或工具。也因为这些原因，所谓的笛卡儿张量与一般张量其实只是解析表达式中的坐标系类型不同而已。一个张量无论转换到哪个坐标系，这个张量所描述的物理量的本质并没有改变。根据需要进行张量解析表达式中坐标系的转换是本书最基本最常用的方法。因为这些原因，当一个数学或者物理规律可以用张量的紧缩方式写出时，这样的方程适用于任何合理定义的坐标系，反映了客观世界最为本质的规律。

按照本书的观点，空间被看作是客观的实体，一切物理现象都在时间和空间中发生。至于是用平直的笛卡儿坐标系，还是用各种不同的曲线坐标系来描述空间，要看实际需要，其目的不过是为了方便，或者更容易描述物理规律而已。因为空间的唯一性，所以任何坐标系之间必定可以相互转换。在我们研究一般坐标系和一般张量时，我们不是仅对某些个别曲线坐标系，而是研究任意坐标系的共同性质和运算规律。

1.3 坐标系的表示和初等运算

因为笛卡儿坐标系与其他坐标系具有较大的区别，我们首先讨论笛卡儿坐标系的符号表示及其运算法则。本书的第一部分只讨论笛卡儿坐标系和笛卡儿张量，所以在这些章节里提到的坐标系都是指笛卡儿坐标系。

对于一个工程问题或者所研究的理论问题，首先要求指定一个参考坐标系，如同我们引入时间变量 t 时需要指定起始时刻 t_0 一样。静止的，或者只作匀速直线运动而没有旋转的坐标系称为惯性坐标系。本书使用的惯性坐标系为静止坐标系，我们也称作绝对参考坐标系，或简称绝对坐标系。比如指定地球坐标系为绝对坐标系来研究飞机的运动，指定太阳坐标系为绝对坐标系来研究行星的运动，或者在机床的底座上指定一个绝对坐标系来研究机床的运动等。对于所研究的问题，这个被指定的绝对坐标系是已知的和唯一的，它规定了所研究问题的空间范围的上界。对于所研究的任何问题，时间是唯一的，空间也是唯一的。在数学描述上，因为时间是标量，时间的唯一性表现在起始时刻是唯一的、已知的和固定不变的。空间的唯一性表现在绝对坐标系是唯一的、已知的和固定不变的。虽然在一

个研究问题中可以定义多个坐标系，这些坐标系又可以随时间而运动，但是它们始终与绝对坐标系之间保持唯一确定的变换关系，所以它们所描述的始终都只是由绝对坐标系所指示的同一个空间。这也如同可以有不同的时刻 t 或者 t_1，t_2 等，但是它们都是属于由起始时刻 t_0 所指示的同一个时间体系，并与起始时刻 t_0 保持唯一确定的关系。

当指定绝对参考坐标系时，不仅意味着方位被指定，其坐标原点也同时被指定。绝对参考坐标系是对空间描述的出发点。当我们讨论一个问题时，都假定适当的绝对坐标系已经被指定。

当需要建立多个坐标系时，如果其他坐标系的原点不与绝对参考坐标系的原点重合，这个坐标系的原点可以用绝对参考坐标系的一个位置矢量来表示。坐标系的方位可以利用坐标系的三个基矢量来描述。两个不同坐标系之间的转换应当包含因为坐标系原点不同的转换和方位不同的转换。坐标系原点不同需要进行的转换计算只涉及位置矢量的计算，是非常简单的，因此我们将着重讨论方位不同的转换。因为张量自身是与坐标系的原点无关的（它可以是位置矢量的函数），所以，当我们考虑用一个符号表示坐标系时，只打算表示坐标系的方位，把坐标系原点的描述留给位置矢量去解决。

如果孤立地看待每一个基矢量，它们只是普通的一个矢量，但是当把三个基矢量 $\bar{i}$，$\bar{j}$，$\bar{k}$ 始终放在一起看待时，它们确定了坐标系在空间中的方位，就具有非同一般的意义。一个任意坐标系用特定符号 $\bar{\chi}$ 表示，$\bar{\chi}$ 被定义为由三个基矢量构成的行矩阵，即

$$\bar{\chi} = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}) \tag{1-1}$$

虽然坐标系 $\bar{\chi}$ 与矢量的关系密切，表示方式也与矢量相同，但它不是一个矢量，本质上它是由三个矢量组成的数组或者行矩阵。除非特别需要，我们以后将不再使用式（1-1）来描写坐标系，而将 $\bar{\chi}$ 看成一个具有特定含义的基本符号和变量（比如是时间的函数）。我们还约定基矢量 $\bar{i}$，$\bar{j}$，$\bar{k}$ 之间符合右手的叉乘积关系，这样的坐标系称作右手坐标系。为方便起见，我们约定本书讨论的都是右手坐标系。

用 $\bar{\chi}^{\mathrm{T}}$ 描述坐标系 $\bar{\chi}$ 的另一种形态，称作坐标系的转置形态，上标 T 表示转置，与矩阵转置的含义相同。但是 $\bar{\chi}^{\mathrm{T}}$ 并不具备实际的物理或者几何含义，而是为了将来坐标系运算的需要，这是本方法的一个特定的表示。根据转置运算的一般规则，则有

$$\bar{\chi}^{\mathrm{T}} = \begin{Bmatrix} \bar{i}^{\mathrm{T}} \\ \bar{j}^{\mathrm{T}} \\ \bar{k}^{\mathrm{T}} \end{Bmatrix} \tag{1-2}$$

式中：$\bar{i}^{\mathrm{T}}, \bar{j}^{\mathrm{T}}, \bar{k}^{\mathrm{T}}$ 是三个基矢量的转置矢量。

矢量及其转置是两个形态，本质上是同一个矢量。因此 $\bar{\chi}^{\mathrm{T}}$ 是由三个基矢量构成的列矩阵。$\bar{\chi}$ 与 $\bar{\chi}^{\mathrm{T}}$ 之间是互为转置的关系，它们表示的是同一个坐标系。

定义坐标系的初等运算包括：坐标系的点积运算、转置运算、并积运算和坐标系转换。这些运算的法则出自坐标系的原始定义式（1-1）和式（1-2）以及矩阵的一般运算法则，也可以仅仅看作是一种特别约定，本书的所有运算规则都与这些约定有关。

（1）定义一个坐标系的转置形态与该坐标系的点积等于单位对角矩阵，简称单位矩阵，即

$$\tilde{\chi}^{\mathrm{T}} * \tilde{\chi} = \tilde{I}, \qquad \tilde{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1-3}$$

以后如无特别声明，我们都用符号“*”表示坐标系之间、矢量之间、张量之间或者矢量与张量之间的点积运算。按照本书的方法将会看到，张量之间的点积运算，通过解析表达式体现为坐标系之间的点积运算和伴随矩阵之间的矩阵运算。如果从矩阵运算的角度来看，式(1-3)是由矩阵运算 $\tilde{\chi}^{\mathrm{T}} * \tilde{\chi} = \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix} * (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = \begin{bmatrix} \vec{i}*\vec{i} & \vec{i}*\vec{j} & \vec{i}*\vec{k} \\ \vec{j}*\vec{i} & \vec{j}*\vec{j} & \vec{j}*\vec{k} \\ \vec{k}*\vec{i} & \vec{k}*\vec{j} & \vec{k}*\vec{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 得到。

（2）坐标系的点积运算不符合交换律。$\tilde{\chi} * \tilde{\chi}^{\mathrm{T}}$ 没有定义。

（3）坐标系转置形态 $\tilde{\chi}^{\mathrm{T}}$ 的转置还原为 $\tilde{\chi}$。

（4）坐标系与它的转置形态的一般积（并积）被定义为一个单位张量（二阶张量），通常记作 $\bar{\bar{I}}$，并且有

$$\bar{\bar{I}} = \tilde{\chi}\tilde{\chi}^{\mathrm{T}} = \tilde{\chi}\tilde{I}\tilde{\chi}^{\mathrm{T}} \tag{1-4}$$

（5）通过坐标系与转换矩阵的运算，可以实现从一个坐标系到另一个坐标系的转换。具体的转换运算法则将在下一章讨论。

1.4 位置矢量和一般矢量

本书关于矢量的概念和定义与传统的概念并无大的区别。因为后面的所有概念将由矢量引出，所以有必要对矢量的定义提前予以梳理。具有大小同时具有方向属性的量定义为矢量，或者称之为一般矢量。我们用字符上面带有单翼箭头表示矢量，如 $\vec{a}$，$\vec{B}$ 等。一点在空间的位置可以用坐标系原点到该点的有向线段来表示，这个有向线段也具有矢量的属性（即大小和方向），但是又具有与一般矢量不同的地方，通常被称为位置矢量。位置矢量与一般矢量常常被混淆，但是按照本书的方法，这两种量应当被严格区分。一般矢量符合张量的定义，它的属性（大小和方向）与坐标系无关。位置矢量只是描述空间一点的位置，具有唯一的几何意义，它还与坐标系原点的位置有关，因此它并不属于张量。本书将把位置矢量作为一种特别的量给予对待，并使用带箭头的字母表示，如 $\vec{r}$，$\vec{\rho}$ 等。在应用中常常还会用到位置矢量对应的那个有向线段，我们称其为矢径。做出这样的区分能够使我们分析问题时在概念上更加清晰。如果利用本书的方法编程，那就更是不可缺少。

我们熟知的力、速度、加速度、位移等物理量都具有矢量的属性，但是我们不主张说某一物理量就是一个矢量，因为单就一个矢量的属性可能不足以描述这个物理量。当我们把一个物理量用矢量表示时，只是表示它的矢量属性的部分。比如一个力的大小和方向用一个矢量表示，力的作用点的位置则需要用位置矢量来表示。同样，用矢量表示一个速度时，这个矢量也只是描述了速度的矢量属性部分，至于这个速度是物体上哪一点的速度，这一点也可能十分重要，这个点的位置同样需要借助一个位置矢量来描述。有时候，我们只关心方向，比如曲面上一点的法线方向，可以用一个法向矢量来表示。我们总是把这个