数量经济学系列丛书

金融经济学教程

陈利平 编著

QUANTITATIVE ECONOMICS

清华大学出版社

数 量 经 济 学 系 列 丛 书

金融经济学教程

陈利平 编著

清华大学出版社
北 京

图书在版编目(CIP)数据

金融经济学教程/陈利平编著.--北京：清华大学出版社，2010.12
(数量经济学系列丛书)
ISBN 978-7-302-24317-5

Ⅰ.①金…　Ⅱ.①陈…　Ⅲ.①金融学－教材　Ⅳ.①F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 244873 号

责任编辑：龙海峰
责任校对：宋玉莲
责任印制：李红英
出版发行：清华大学出版社　　地　址：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　邮　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：清华大学印刷厂
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：185×230　印　张：10.25　字　数：215 千字
版　次：2010 年 12 月第 1 版　印　次：2010 年 12 月第1 次印刷
印　数：1～4000
定　价：25.00 元

产品编号：016873-01

前言 PREFACE

本教材是一门金融理论的高级教程，内容主要涉及投资组合理论、均衡资产定价理论、套利定价理论和行为金融学的一些基础知识。对象为大学高年级本科生、硕(博)士研究生和相关专业的研究工作者。学习本教材所需的基础知识是动态优化、动态规划、数学分析、概率论、高级宏微观经济学等。

本教材是作者在上海财经大学金融学院为研究生讲授金融经济学课程的讲稿基础上，参阅了许多国内外优秀教材，并结合学生的特点改写而成。本教材的写作目的是为了提高学生的金融经济学基础知识，使学生对风险回避概念、风险与收益的折中关系、风险的分散化和风险的定价有一个较清晰的了解，并能利用这些基础知识更好地学习公司金融、金融工程、风险管理等其他专业课。全书内容共分8章：

第一章是基本概念介绍，内容包括偏好表示、风险回避概念的引入及随机占优理论。偏好表示给出偏好关系可以用 von Neumann－Morgenstern 期望效用函数来刻画的充分必要条件；风险回避概念的引入给出风险回避概念和 Arrow－Pratt 意义下风险回避系数的定义及相关性质，并分析个体的投资决策问题和比较静态分析；随机占优理论，即资产优劣的比较理论，首先给出一阶随机占优、二阶随机占优概念的定义和等价条件，随后在两种风险资产的情形中讨论个体的投资决策问题和比较静态分析。

第二章介绍 Markowitz 的投资组合理论，在投资者仅关心资产的期望回报和方差的假定下，证明个体的最优投资组合可以用有效组合来刻画，且任意风险资产和可行投资组合都可以分解为一个前言组合和一个非系统性风险。

第三章介绍 CAPM 定理，内容包括零－贝塔 CAPM 和传统 CAPM，带约束的 CAPM 等，证明市场均衡时资产的期望回报率和市场组合的期望回报率之间存在一个线性关系。

第四章介绍多期均衡资产定价理论，内容包括市场完备化和配置效率、跨期均衡资产定价模型、股票溢价难题及其解决方法。

第五章介绍 Ross 的 APT 理论，内容包括套利机会的定义，无套利条件下的期权关系式、Ross 的 APT 理论和均衡 APT 理论。

第六章介绍离散时间跨期套利定价理论，内容包括等价鞅测度和无套利机会的等价性，并利用等价鞅测度来分析期权价格，在二叉树下推导 Black－Scholes 公式。

第七章介绍连续时间套利定价理论，内容包括布朗运动、Itô 公式及连续时间下

Black—Scholes公式的推导。

第八章介绍行为经济(金融)学基础,内容包括前景理论、认知偏差、心里账户、自我约束问题、噪声交易者和逃离限制等行为金融学的一些基本理论。

本书的写作得到了上海财经大学研究生精品课程项目的支持。在本书的写作中,得到了上海财经大学金融学院的戴国强教授、赵晓菊教授、陆世敏教授、施兵超教授、柳永明教授、邹平教授、刘莉亚教授、曹志广教授、曹啸教授、李宏等的热心帮助,在此表示衷心的感谢。我还要感谢这几年来我们上海财经大学金融学院货币银行专业、信用管理专业、证券期货专业、金融工程专业的05—10级硕士研究生,他们指出了本教材中的许多缺陷。我还要感谢在本书的写作中所有关心我的人。

陈利平

2010/11/20

目录
CONTENTS

第一章 基本概念[①]

1.1 偏好的期望效用表示

在金融经济学中，需要研究人们在不确定条件下的消费—投资决策和市场上资产价格的决定，这涉及面对不确定的选择对象时人们的判别标准。

在 17 世纪现代概率理论的发展中，帕斯卡(Blaise Pascal)和费尔玛(Pierre de Fermat)等大数学家假定，在一个随机回报为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$、相对应的概率为$(p_1,p_2,\cdots,p_n)$的赌博中，人们关心的是它的期望回报 $E[\tilde{x}]=\sum x_i p_i$。但该假定在 1728 年被 N. 伯努利(Nicholas Bernoulli)给出的一个例子所否定，该例子现在被称为著名的圣彼得堡悖论(St. Petersburg Paradox)：

假定一位个体面对一个抛硬币的赌博游戏，第一次抛出正面时该个体得到 1 元，游戏结束；否则继续抛第二次硬币。第二次抛出正面得到 2 元，游戏结束；否则继续抛第三次硬币。第三次抛出正面得到 4 元，游戏结束；否则继续抛第四次硬币。第四次抛出正面得到 8 元，游戏结束；否则继续抛第五次硬币……问该个体愿意支付多少财富来参与该赌博游戏？

按照帕斯卡和费尔玛等人的思路，个体愿意支付的财富等于该赌博游戏的期望回报。在该赌博游戏中，期望回报满足：

$$E[\tilde{x}]=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{8}\times 4+\cdots=+\infty$$

即个体愿意支付正无穷的财富，来参与该赌博游戏。这个结论显然是不合理的，因此被称作是一个悖论，叫做圣彼得堡悖论。

该悖论的解决由 N. 伯努利的堂兄弟 D. 伯努利(Daniel Bernoulli，1738/1954)给出。D. 伯努利认为，对个体而言，200 元的收益并不等于 100 元收益的两倍，他假定个体决策时会使用一个现在被称为 von Neumann 和 Morgenstern 期望效用函数的概念 $u(\cdot)$，从而个

① 本章的编写，主要参考了 Huang 和 Litzenberger(1998)、Campbell 和 Viceira(2002)、杨云红(2000)、王江(2006)等教材及相关论文。

体决策时不是直接计算游戏收益的期望值 $E[\tilde{x}]=\sum x_i p_i$，而是计算游戏收益的期望效用值 $E[u(\tilde{x})]=\sum u(x_i)p_i$。因此与上述游戏相当的财富值 ξ 应该满足：

$$u(w+\xi)=\frac{1}{2}u(w+1)+\frac{1}{4}u(w+2)+\frac{1}{8}u(w+4)+\cdots$$

此处 w 是个体当前的财富值。如果效用函数取对数效用形式 $u(w)=\ln w$，当前财富值取 $w=50\,000$ 元，则 $\xi\approx 9$ 元。因此，即使该游戏的期望收益趋于无穷，但对个体而言，该游戏的价值仅仅 9 元。

上述分析表明，由于不确定性的存在，我们需要引入期望效用函数的概念。通常，偏好的期望效用表示有两种推导方式：第一种推导方式由 von Neumann 和 Morgenstern(1953) 给出，他们的推导建立在个体对彩票选择的假定之上，其中彩票的收益和概率是预先指定的，因此他们的期望效用理论是一种客观期望效用理论；另一种推导方式由 Savage(1972) 给出，在他的处理中，概率是在特定公理体系下推导出来的，而不是预先给定的，因此 Savage 的理论是一种主观期望效用理论。下面我们介绍的是 von Neumann 和 Morgenstern(1953)的期望效用表示理论。

1.1.1 不确定条件下的选择问题

一、消费计划与偏好关系

考虑一个一期经济，假定个体在期初做出投资决策，期末将所有财富用于消费。为简化讨论，假定期末时只有一种消费品。由于经济中存在着不确定性，比如世界油价的飙升、局部战争的发生、恐怖事件的出现等等，个体所持有的金融资产期末的回报依赖于不确定的经济环境。这些影响期末回报的因素，例如整个经济和股票发行企业所在行业的景气程度、石油价格水平、公司利润和人们的信心指数等，在期初都是不知道的。

通常我们可以用一个概率空间(Ω,F,P)来刻画这种不确定的经济环境。其中 Ω 中的元素 $\omega\in\Omega$ 称作**自然状态**，是对从期初到期末的不确定环境的一个刻画，Ω 为这些自然状态的全体，P 刻画了各个自然状态发生的概率，在 von Neumann 和 Morgenstern(1953)的讨论中，该概率是预先给定的，是客观概率。个体在期初作投资决策时，可供选择对象的全体记为 X，X 由所有可行消费计划构成。

定义 1.1.1 一个消费计划是不同自然状态下消费数量的一个完备刻画。

每个消费计划都可以用一个可测函数 $x:\Omega\rightarrow Z(Z\subseteq\mathbf{R})$来刻画，当自然状态 ω 发生时，$x(\omega)$表示该状态下的可行消费数量。消费计划 x 是一个随机变量，在数学上常用$\tilde{x}$来表示，它可以是股票、债券等各种金融资产及其组合。如果对任意自然状态 $\omega\in\Omega$，我们有 $x(\omega)$等于常数，则 x 是一个确定性的消费计划。

例 1.1.1 假定经济中有五个自然状态 ω_1、ω_2、…、ω_5，每个自然状态都以相同的概率出现，表 1-1 给出了三个消费计划 x、y 和 z 在不同自然状态下的消费量。其中 x 是一个确定

性的消费计划，y 和 z 是两个或有消费计划，其期末回报依赖于自然状态的实现。

表 1-1 消费计划

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$x(\omega)$	3	3	3	3	3
$y(\omega)$	1	5	3	4	3
$z(\omega)$	5	3	4	1	3

给定可供选择消费计划的全体 X，我们可以在 X 上定义一个二项关系“$\succeq$”，其中 $x\succeq y$ 代表“x 至少要比 y 好”，$x\succ y$ 代表“x 严格地好于 y”，$x\sim y$ 代表“x 和 y 是无差异的”。

定义 1.1.2 称一个二项关系是一个**偏好关系**，如果该二项关系服从：

(1) 完备性：任意 $x,y\in X$，有 $x\succeq y$ 或 $y\succeq x$；

(2) 反身性：任意 $x\in X$，有 $x\sim x$；

(3) 传递性：任意 $x,y,z\in X$，如果 $x\succeq y$，$y\succeq z$，则有 $x\succeq z$。

在一定条件下，例如偏好关系满足连续性，我们可以给出偏好关系的效用函数表示(见 Mas-Colell、Whinston 和 Green(1995)或 Varian(1992))。

定义 1.1.3 一个函数 H: $X\rightarrow\mathbf{R}$ 称为是偏好关系“$\succeq$”的效用函数表示，如果对任意 $x,y\in X$，有 $x\succeq y\Leftrightarrow H(x)\geqslant H(y)$。

二、彩票与期望效用函数

事实上，个体在做决策时最为关注的并非是未来哪个事件会发生，而是未来能得到多少消费品，概率有多大。以上面的例 1.1.1 为例，或有消费计划 y 和 z 都是以 0.2 的概率得到 1 单位消费品，0.2 的概率得到 4 单位的消费品，0.2 的概率得到 5 单位的消费品，0.4 的概率得到 3 单位的消费品。由于个体决策时自然状态还未显示出来，虽然期末在自然状态显示后从这两个消费计划中可以得到的消费品数量并不相等，但在期初这两个消费计划对个体而言是完全等价的。因此这两个消费计划对期初的个体来说是无差异的。

记经济中所有可能实现的消费量的全体为

$$Z\equiv\{x(\omega)\mid\forall x\in X,\omega\in\Omega\}\tag{1.1.1}$$

则任意一个消费计划 $x\in X$，存在一个定义在 Z 上的概率密度函数 p_x 与之对应，满足：

$$p_x(z)=\Pr ob\{\omega\mid x(\omega)=z,\omega\in\Omega\}\tag{1.1.2}$$

相应地，累计概率分布为 $F_x(z)=\Pr ob\{\omega|x(\omega)\leqslant z,\omega\in\Omega\}$。

例 1.1.1(续) 在例 1.1.1 中，经济中可实现消费量的全体 $Z=\{1、3、4、5\}$；消费计划 x 对应的概率分布 p_x 可以表示为

$$p_x(1)=p_x(4)=p_x(5)=0,\quad p_x(3)=1$$

消费计划 y 对应的概率分布 p_y 可以表示为

$$p_y(1)=p_y(4)=p_y(5)=0.2,\quad p_y(3)=0.4$$

消费计划 z 对应的概率分布 p_z 可以表示为

$$p_z(1) = p_z(4) = p_z(5) = 0.2, \quad p_z(3) = 0.4$$

这样我们在或有消费计划与定义在 Z 上的概率分布之间建立了一个对应关系：

$$(\Omega, P) \xrightarrow{x} (Z, Px^{-1})$$

每一个 $x \in X$，对应着 Z 上的一个概率分布 Px^{-1}；反过来，Z 上的一个概率分布 Px^{-1} 可以有多个消费计划与之相对应，这些消费计划有相同的分布，它们是无差异的。我们将 Z 上概率分布的全体记为

$$\Psi = \{Z\text{ 上的概率分布}\}$$

这样一来，定义在 X 上的偏好关系可以简化为定义在 Ψ 上的偏好关系。Ψ 中每一个概率分布都可以被看做是一个彩票。

对任意的 $z \in Z$，记 P_z 为在点 z 处退化的概率分布，满足：

$$P_z(z') = \begin{cases} 1 & \text{如果 } z' = z \\ 0 & \text{如果 } z' \neq z \end{cases} \tag{1.1.3}$$

则 P_z 是一个确定性的消费计划，其持有者在任意状态都可以得到 z 单位的消费品。

如果 Z 是一个有限集合，记 $z^0 = \max\{z \mid z \in Z\}$，$z_0 = \min\{z \mid z \in Z\}$，则在 Ψ 中可以定义两个确定性的彩票 P_{z^0} 和 P_{z_0}，满足对任意的 $p \in \Psi$，有 $P_{z^0} \succeq p \succeq P_{z_0}$。

例 1.1.1（续） 在例 1.1.1 中，可以有四个确定性消费计划 P_1、P_3、P_4 和 P_5，这四个消费计划分别以 100%的概率得到 1 单位、3 单位、4 单位和 5 单位消费品。考虑到

$$z^0 = \max(1,3,4,5) = 5, \quad z_0 = \min(1,3,4,5) = 1$$

因此经济中存在一个最好的消费计划 P_{z^0} 和一个最坏的消费计划 P_{z_0}，满足：

$$P_{z^0}(z') = \begin{cases} 1 & \text{如果 } z' = z^0 = 5 \\ 0 & \text{如果 } z' \neq z^0 = 5 \end{cases}$$

$$P_{z_0}(z') = \begin{cases} 1 & \text{如果 } z' = z_0 = 1 \\ 0 & \text{如果 } z' \neq z_0 = 1 \end{cases}$$

von Neumann 和 Morgenstern(1953)在个体投资决策建立在对彩票选择的假定下，给出了定义在 Ψ 上的期望效用表示理论。对于定义在 Ψ 上的偏好关系"$\succeq$"，存在一个期望效用函数 $E[u(\cdot)]$，满足：

对任意 $x, y \in X$，$x \succeq y \Leftrightarrow p_x \succeq p_y$

$$\Leftrightarrow E[u(\tilde{x})] \geqslant E[u(\tilde{y})]$$

其中 $E[u(x)] = \int_\Omega u(x)\mathrm{d}P = \int_Z u(z)\mathrm{d}F_x(z)$。

特别地，当 Z 是一个可数集合时，期望效用函数可以简化为

$$E[u(x)] = \sum_{z \in Z} u(z)p(z)$$

例 1.1.2　旅游时购买意外伤害险的回报依赖于是否发生意外伤害事件，而后者具有不确定性。假定旅客的期望效用函数为 $E[\ln(\cdot)]$，假定买保险的成本为 ρ，w 为不发生危险的财富价值，$w-h$ 为发生危险的财富价值，假定发生危险的概率为 p，则不发生危险的概率为 $1-p$，假定买保险后发生危险时的补偿为 $\hat{h}$，则个体是否买保险可以通过比较买保险后的期望效用值 $(1-p)\ln(w-\rho)+p\ln(w-\rho-h+\hat{h})$ 与不买保险时的期望效用值 $(1-p)\ln w+p\ln(w-h)$ 来实现：

当 $(1-p)\ln\left(1-\frac{\rho}{w}\right)+p\ln\left(1+\frac{\hat{h}-\rho}{w-h}\right)>0$ 时，购买保险是划算的，否则不购买保险是划算的。

1.1.2　期望效用函数的存在性

一、复合彩票

定义　称彩票 $ap+(1-a)r$ 是一个由彩票 p 和 r 构成的复合彩票，如果该彩票以 a 的概率得到彩票 p，以 $1-a$ 的概率得到彩票 r。

复合彩票也可以看做是一个简单彩票，如果彩票 p 和 r 定义在集合 Z 上，则复合彩票 $ap+(1-a)r$ 也定义在 Z 上，且对任意的 $z\in Z$，其概率密度为 $ap(z)+(1-a)r(z)$，因此复合彩票也可以看做是一个简单彩票。

例 1.1.3　假定 p_x 和 p_y 为定义在 $Z=\{1、3、4、5\}$ 上的彩票，如例 1.1.1(续)刻画，彩票 p_x 的概率分布可以表示为

$$p_x(1)=p_x(4)=p_x(5)=0,\quad p_x(3)=1$$

彩票 p_y 的概率分布可以表示为

$$p_y(1)=p_y(4)=p_y(5)=0.2,\quad p_y(3)=0.4$$

则复合彩票 $\frac{1}{2}p_x+\frac{1}{2}p_y$ 代表 1/2 概率得到彩票 p_x，1/2 概率得到彩票 p_y，该复合彩票可以改写为一个简单彩票 p_w，其概率分布可以表示为

$$p_w(1)=p_w(4)=p_w(5)=0.1,\quad p_w(3)=0.7$$

反过来，一个简单彩票也可以写成几个简单彩票构成的复合彩票，在例 1.1.3 中的简单彩票 p_w 就可以改写为 $\frac{1}{2}p_x+\frac{1}{2}p_y$。特别地，一个简单彩票可以改写为由一些确定性彩票的复合彩票。例如，例 1.1.3 中的彩票 p_y 可以改写为

$$p_y=\frac{1}{5}P_1+\frac{1}{5}P_4+\frac{1}{5}P_5+\frac{2}{5}P_3$$

即以 1/5 的概率分别得到确定性彩票 P_1、P_4 和 P_5，以 2/5 的概率得到确定性彩票 P_3。这可以进一步推广到更一般的情形，即得如下引理：

引理 1.1.1 任意一个彩票都可以改写为一些确定性彩票的混合彩票，即如果 p 是定义在 Z 上的一个彩票，则彩票 p 可以改写为

$$p=\sum_{z\in Z}p(z)P_z$$

其中 $p(z)$ 为该彩票得到 z 的概率，而 P_z 是与 z 相对应的确定性彩票。

证明 要证明该引理，只需证明对任意的 $z'\in Z$，有 $p(z')=\sum\limits_{z\in Z}p(z)P_z(z')$。

注意到 $P_z(z')=\begin{cases}1 & z'=z\\0 & z'\neq z\end{cases}$。因此 $\sum\limits_{z\in Z}p(z)P_z(z')=p(z')$，证毕。

公理 1 （独立性公理）对任意 $p,q,r\in\Psi$，$a\in(0,1]$，如果 $p\succ q$，则有 $ap+(1-a)r\succ aq+(1-a)r$。

独立性公理蕴涵，个体对这两个复合彩票的偏好程度不依赖于新引入的彩票 r，即消费者对特定事件中消费的满意程度不会随其他事件的发生而变化。

公理 2 （Archimedean 公理）对任意 $p,q,r\in\Psi$，如果 $p\succ q\succ r$，则存在 $a,b\in(0,1]$，使得 $ap+(1-a)r\succ q\succ bp+(1-b)r$。

公理 2 来自于数学中的 Archimedean 公理，该公理认为，对任意两个大于零的数 z 和 z'，不管 z' 有多大，总存在一个正整数 k，满足 $kz>z'$。此处公理 2 蕴涵，任意满足 $p\succ q\succ r$ 的消费计划 p、q 和 r，不管 p 有多好，总存在一个概率 b，q 要比复合彩票 $bp+(1-b)r$ 来得好；同样地，也不管 r 有多坏，总存在一个概率 a，q 要比复合彩票 $ap+(1-a)r$ 来得坏。

在公理 1 和公理 2 下，定义在 Ψ 上的偏好关系具有以下性质：

1. 如果 $p\succ q$，$0\leqslant a<b\leqslant 1$，则 $bp+(1-b)q\succ ap+(1-a)q$；
2. 如果 $p\succeq q\succeq r$，$p\succ r$，则存在唯一的 $a^*\in[0,1]$，满足
$$q\sim a^*p+(1-a^*)r$$
3. 如果 $p\succ q$，$r\succ s$，$a\in[0,1]$，则 $ap+(1-a)r\succ aq+(1-a)s$；
4. 如果 $p\sim q$，$a\in[0,1]$，则 $p\sim qp+(1-a)q$；
5. 如果 $p\sim q$，$a\in[0,1]$，则对任意的 $r\in\Psi$，有
$$ap+(1-a)r\sim aq+(1-a)r$$

二、期望效用函数的存在性

von Neumann 和 Morgenstern（1953）的期望效用表示定理建立在独立性公理和 Archimedean 公理之上。

定理 1.1.1 定义在 Ψ 上的偏好关系“$\succeq$”存在期望效用表示，当且仅当该偏好关系满足公理 1 和公理 2；该效用表示精确到一个仿射变换，即如果 u 是一个 von Neumann-Morgenstern 期望效用函数，则对于任意的 $c>0$ 和 d，$\hat{u}=cu+d$ 也是一个 von Neumann-Morgenstern 期望效用函数。

证明　(充分性)此处我们在 Z 是个有限集的假定下进行讨论，当 Z 是无限集合时，有兴趣的读者可阅 Fishburn(1970)的文章。当 Z 是个有限集合时，Ψ 中存在两个最好的和最坏的彩票 P_{z^0} 和 P_{z_0}，任意的 $p\in\Psi$，有 $P_{z^0}\succeq p\succeq P_{z_0}$。下面我们分两种情形来讨论：

1. $P_{z^0}\sim P_{z_0}$：在这种情形中，任意的 $p,q\in\Psi$，有 $p\sim q\sim P_{z^0}\sim P_{z_0}$。定义 $u(z)=k$，k 是任意的常数，则 $u(z)$是一个满足要求的 von Neumann-Morgenstern 期望效用函数。

2. $P_{z^0}\succ P_{z_0}$：对任意 $p\in\Psi$，我们可以定义 $H(p)=a$，其中 $a\in[0,1]$，满足 $aP_{z^0}+(1-a)P_{z_0}\sim p$。$H(p)$是使得复合彩票 $aP_{z^0}+(1-a)P_{z_0}$ 与 p 无差异的权重。根据性质 2，这样的 a 是唯一的，所以对任意的 $p\in\Psi$，$H(p)$是定义好了的，满足：

$$\begin{aligned} p\succeq q \;&\Leftrightarrow\; H(p)P_{z^0}+(1-H(p))P_{z_0}\succeq H(q)P_{z^0}+(1-H(q))P_{z_0} \\ &\Leftrightarrow\; H(p)\geqslant H(q) \end{aligned}\tag{1.1.4}$$

所以 $H(p)$是偏好关系“$\succeq$”的一个效用表示。下面我们来证明 $H(p)$可以改写成一个期望效用函数 $\sum_z u(z)p(z)$。

对任意 $p,q\in\Psi$，$a\in[0,1]$，由性质 5 得

$$\begin{aligned} ap+(1-a)q &\sim a[H(p)P_{z^0}+(1-H(p))P_{z_0}] \\ &\quad +(1-a)[H(q)P_{z^0}+(1-H(q))P_{z_0}] \\ &\sim (aH(p)+(1-a)H(q))P_{z^0} \\ &\quad +(1-aH(p)-(1-a)H(q))P_{z_0} \end{aligned}\tag{1.1.5}$$

因为 $H(\cdot)$是定义好了的，由式(1.1.5)得

$$H(ap+(1-a)q)=aH(p)+(1-a)H(q)\tag{1.1.6}$$

所以 H 是线性的。

根据引理 1.1.1，考虑到任意彩票 $p\in\Psi$，p 可以表示为 $\sum_{z\in Z}p(z)P_z$，所以我们有

$$H(p)=H\Big(\sum_{z\in Z}p(z)P_z\Big)=\sum_{z\in Z}p(z)H(P_z)\tag{1.1.7}$$

在 Z 上定义函数 $u(\cdot)$，满足：

$$u(z)\equiv H(P_z),\quad \forall\, z\in Z\tag{1.1.8}$$

则根据式(1.1.7)，我们有

$$H(p)=\sum_{z\in Z}p(z)u(z)=E[u(z)]\tag{1.1.9}$$

此处 $u(\cdot)$即为 von Neumann-Morgenstern 效用函数，$E[u(\cdot)]$即为偏好的期望效用表示。

(必要性)如果偏好关系“$\succeq$”存在一个期望效用表示

$$E[u(z)]=\sum_{z\in Z}p(z)u(z)$$

则对任意 $p,q,r\in\Psi$，如果 $p\succ q$，则有 $\sum_{z\in Z}p(z)u(z)>\sum_{z\in Z}q(z)u(z)$，如果 $a\in(0,1]$，则有

$$\sum_{z\in Z}[ap(z)+(1-a)r(z)]u(z)>\sum_{z\in Z}[aq(z)+(1-a)r(z)]u(z)$$

因此我们有 $ap+(1-a)r \succ aq+(1-a)r$，独立性公理成立。

对任意 $p,q,r\in\Psi, p\succ q\succ r$，在上述期望效用表示下，我们有

$$\sum_{z\in Z}p(z)u(z) > \sum_{z\in Z}q(z)u(z) > \sum_{z\in Z}r(z)u(z)$$

存在 $a\in(0,1]$，满足：$a\sum_{z\in Z}p(z)u(z)+(1-a)\sum_{z\in Z}r(z)u(z) > \sum_{z\in Z}q(z)u(z)$，所以我们有

$$\sum_{z\in Z}[ap(z)+(1-a)r(z)]u(z) > \sum_{z\in Z}q(z)u(z)$$

即 $ap+(1-a)r\succ q$。类似地可证明存在 $b\in(0,1]$，满足 $q\succ bp+(1-b)r$。

从上面的证明可以看出，如果 u 是一个 von Neumann-Morgenstern 效用函数，则 $\hat{u}=cu+d$ 也是一个 von Neumann-Morgenstern 效用函数。

证明完毕。

三、多期经济中的期望效用函数

考虑一个多期禀赋经济，整个消费过程横跨 $T+1$ 期，$t=0,1,2,\cdots,T$，记 $\mathbf{z}=(z_0,z_1,\cdots,z_T)$ 为个体可行的消费向量，其中 z_t 为 t 期消费量，记 Z 为 z 的全体。假定 Z 有限，$p(\cdot)$ 为定义在 Z 上的概率，$p(\cdot)$ 的全体记为 Ψ。类似地，我们可以证明如下定理：

定理 1.1.2 定义在 Ψ 上的一个偏好关系"$\succeq$"满足独立性公理和 Archimedean 公理，当且仅当存在一个 von Neumann-Morgenstern 效用函数 $u(\cdot)$，满足：

$$\sum_{z\in Z}u(z_0,\cdots,z_T)p(\mathbf{z}=z_0,\cdots,z_T) \geqslant \sum_{z\in Z}u(z_0,\cdots,z_T)q(\mathbf{z}=z_0,\cdots,z_T)$$

$$\Leftrightarrow p\succeq q, \qquad \text{任意 } p,q\in\Psi,$$

其中 $p(\mathbf{z}=z_0,\cdots,z_T)$ 指从时间 0 到 T 的消费等于 $(z_0,\cdots,z_T)$ 的概率。

证明：略。

如果 von Neumann-Morgenstern 效用函数是时间可加的(time-additive)，则存在一列函数 $\{u_t(\cdot)\}_{t=0}^{T}$，满足：

$$u(z_0,\cdots,z_T)=\sum_{t=0}^{T}u_t(z_t) \tag{1.1.10}$$

在许多时候，上述效用函数可以进一步简化为一个几何贴现效用函数：

$$u(z_0,\cdots,z_T)=\sum_{t=0}^{T}\beta^t u(z_t) \quad 0<\beta<1 \tag{1.1.11}$$

其中 β 为贴现因子。上述贴现形式称为几何贴现，由 Samuelson(1937)引入，通过将未来效用一期一期地贴现到现期，得到一个终生贴现效用函数，从而为跨时决策问题的解决提供了理论基础。在几何贴现下，任一时间点上将下一期效用贴现到该时间点的贴现因子是个常数，这蕴涵人们在今天对明天和处于明天对后天的耐心程度是一致的。在贴现因子是个常数的假定下，个体贴现呈现出几何级数的形式，所以这种贴现方法通常被称为几何贴现，因其简单易用，且近似地刻画了个体决策心理而为经济学家们广泛使用。