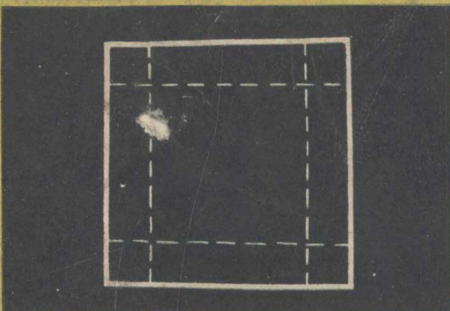
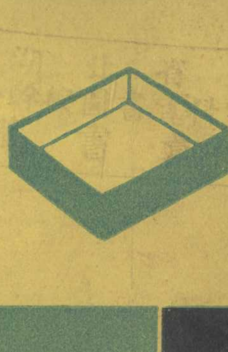


陈振宣编

极大与极小



上海科学技术出版社

极大与极小

陈振宣 編

（第二版）

上海科学技术出版社

內 容 提 要

关于极大极小的問題，本来在微积分里才讲到，为了使更多的人能够解这类問題，現介紹一些初等数学的解法．本书从极値的概念談起，举有很多用高中代数、三角求极大极小值的例題．最后还附有思考題，具有高中数学水平的人都能看懂．

本书初版于 1958 年，1963 年經作者修改后重排，作第二版发行．

极大与极小(第二版)

陈 振 宣 編

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）
上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

大东集成印刷厂印刷　　新华书店上海发行所发行

开本 787×1092 1/36　印張 1 20/36　排版字数 32,000
（原科普、科技版共印 13,000 册　1958 年 4 月第 1 版）
1959 年 2 月新 1 版印 4 次共印 13,200 册
1963 年 9 月第 2 版　1963 年 9 月第 1 次印刷　印数 1—8,700

統一书号 T 13119·139　定价(七) 0.13 元

目 次

引　　言

我們在日常生活和生产劳动中，常常遇到一些变动的量，这些量是在不断地变化着，但它們的变化并不是毫无規律的．这些变化規律，被我們发現，并归結成数学的形式写出来，这就是通常数学中所說的这些变量之間的函数关系．例如在一段电路上，如果电阻 R 不变，那么，电路两端的电压 U 和綫路上的电流 I 之間，就存在着如下函数关系：

$$U=RI$$

（R、U、I 的单位分别是欧姆、伏特、安培）

这一电路供給的电功率 N 也是 I 的函数：

$$N=RI^2 \quad (N \text{ 的单位是瓦特})$$

这种例子是很多的，在讲函数的书里有比較詳細的叙述，这里就不細談了．

現在就来看看极大极小的問題．假定有一个函数 $y=f(x)$，x 是自变量，y 是 x 的函数，我們要研究 x 等于什么数值的时候，y 值可以达到极大或极小，什么时候 y 值可以达到最大或最小（极大、极小和最大、最小的定义在后面介紹）．例如制造罐头食品容器的时候，同样是制造1斤装的罐头，但却可以做成各种尺寸和样子，我們需要研究的是用最少的鉄皮做成1斤装的

容积，这就是极小的問題．又如把圓木料鋸成横梁，怎样的矩形截面才使横梁最牢固，这就是最大的問題．在实际生产中，考虑象这类节省人力和材料，提高产量和质量的問題是很普遍的．

研究极大极小的問題統称为极值問題．

极值問題的解决是要凭借高等数学工具的，但对普遍的比較簡单的函数，它的极值問題在初等数学范圍内也可解决．本书試图用初等数学工具来解决这类問題，鉴于应用的是初等工具、对象是簡单的函数，因此比較多的問題是考虑函数的最大值和最小值問題．下面先讲述一下基本概念．

什么是函数的极大值、极小值，最大值、最小值呢？

图1是函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 到 $x=b$ 間的图象．图中点 x_2（或 x_4）的函数值比它邻近两侧各点的函数值都大，称函数在該点有极大值．可見函数在某点 c 有极大值的实质是存在一个以 c 为中心的小范圍，在此范圍内的函数值均小于 c 点的函数值．用数学的語言来說，我們定义函数在一点的极大值如下：

設 $y=f(x)$ 为定义在 $[a, b]$ 上的一个函数，c 为区間 (a, b) 内的一点．如果存在一个正数 δ（可以取得随便如何小），对于 $c-\delta<x<c+\delta$ 中的一切 x 均有关系式：

$$f(x)\leqslant f(c)$$

成立，則說函数 $f(x)$ 在点 c 有极大值．函数的极大值常常是图象上的峰（即凸起部分）的頂点．函数的极大

值用 $y_{\max}$ 表示.

图 1 中点 x_1 (或 x_3, x_5) 的函数值較它邻近两侧的函数值都小, 我們称函数在这些点有极小値. 与上相仿, 我們对函数的极小値定义如下: 如果存在一个正数 δ, 对于 $c-\delta<x<c+\delta$ 中的一切 x 均成立下面关系式:

$$f(x)\geqslant f(c),$$

则函数 $f(x)$ 在点 c 有极小値. 极小値常常是图象上的谷 (即凹下部分) 的底端. 函数的极小値用 $y_{\min}$ 来表示.

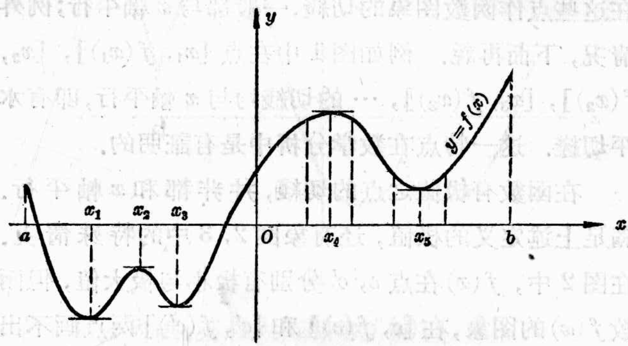


图 1

理解这两概念时应注意以下各点:

1. 这里所指的邻近諸点, 就是与 c 点的距离小于 δ 的諸点, 就是在区間 $(c-\delta,\ c+\delta)$ 内的一切点, 而 δ 可以充分小. 例如图 1 上函数 $f(x)$ 在点 x_2 有极大値, 但在离 x_2 适当远的点, 例如原点, $f(0)>f(x_2)$, 然而 $f(x_2)$ 仍不失为 $f(x)$ 的极大値, 因为以 c 为中心的小区間 $(c-\delta,\ c+\delta)$ 内的一切 x, 成立着 $f(x)\leqslant f(x_2)$.

这里所說的函数的极大値，是就区間$(c-\delta, c+\delta)$的局部区域来考察的，所以又叫局部极大値．极小値与此类似，不再詳述．

2．因为极大値或极小値是就离开c点很近的局部区域来考察的，所以有时某一点的局部极大値，可以比另一点的局部极小値小，例如图1中，函数$f(x)$在点x_2有极大値，在点x_5有极小値，但$f(x_2)$比$f(x_5)$小，即$f(x_2)<f(x_5)$．

3．函数有极大値、极小値之点，有共同的特点．在这些点作函数图象的切綫，一般都与x軸平行；例外情况，下面再說．例如图1中在点$[x_1, f(x_1)]$，$[x_2, f(x_2)]$，$[x_3, f(x_3)]$，… 的切綫均与x軸平行，即有水平切綫．这一特点在数学分析中是有証明的．

在函数有极値之点的切綫，并非都和x軸平行．满足上述定义的极値，还有象图2, 3中的特殊情况．在图2中，$f(x)$在点c, c'分别有极小与极大値，但函数$f(x)$的图象，在$[c, f(c)]$和$[c', f(c')]$两点画不出切綫．在图3中，$f(x)$在点c, c'分别有极大与极小値，而函数$f(x)$的图象，在$[c, f(c)]$和$[c', f(c')]$两点的切綫，却与y軸平行．这两种特殊情况在初等数学里暂时不会碰到，只要了解一下就可以了．

在弄清楚极大极小値的意义后，最大値、最小値的意义就不难理解了．

如果函数$f(x)$在点c的値$f(c)$，不小于$f(x)$在閉区間$[a, b]$上的一切点的値，即$f(c)\geqslant f(x)$；則$f(x)$在

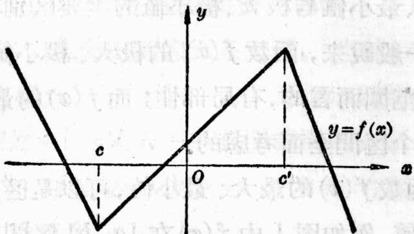


图 2

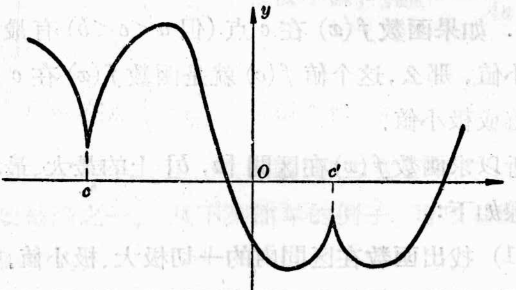


图 3

点 c 有最大值，其最大值即为 $f(c)$.

如果函数 $f(x)$，在点 c 的值 $f(c)$，不大于 $f(x)$ 在闭区間 $[a, b]$ 上的一切点的值，即 $f(c) \leqslant f(x)$，則 $f(x)$ 在点 c 有最小值，其最小值即为 $f(c)$.

显然，函数 $f(x)$ 在某一点的极大值未必就是函数的最大值．例如图 1 中 $f(x_2)$，$f(x_4)$ 并不是函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上的最大值．但是如果某一点是函数在开区間 (a, b) 内的最大值，那么，这一点也是它邻近范圍内函数 $f(x)$ 的极大值.

最大、最小值与极大、极小值的主要区别在于：

1．一般說来，函数 $f(x)$ 的极大、极小值，是就 c 点的邻近范圍而言的，有局部性；而 $f(x)$ 的最大、最小值是就整个区間全面考慮的。

2．函数 $f(x)$ 的最大、最小值，可以是区間一端端点的函数值，例如图 1 中 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 区間的最大值是 $f(b)$．但是区間的端点，不能是 $f(x)$ 的极大、极小值。

3．如果函数 $f(x)$ 在 c 点（但 $a<c<b$）有最大值或最小值，那么，这个值 $f(c)$ 就是函数 $f(x)$ 在 c 点的极大值或极小值。

所以求函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上的最大、最小值的步驟如下：

(1) 找出函数在区間內的一切极大、极小值。

(2) 将这些极值和函数在区間 $[a, b]$ 两端的值 $f(a)$、$f(b)$ 比較，取出其中最大的（或最小的）一个值，就是函数在区間 $[a, b]$ 內的最大值（或最小值）。

当然，这里所指的极值是包括上面所說的特殊情况的。因而研究最大、最小值的問題均可归納为求极大、极小值的問題。

函数极大、极小值的研究

应用高中代数学中有关不等量关系来研究函数的

极值問題，在初等数学中是經常遇到的．它的理論根据大致可以归納为下面的五条定理．当然，在具体解題时，还有很大的灵活性．为了更好地理解定理的实质，在証明之前，先插入一些說明性质的例題．

定理 1 函数 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 在区間 $(-\infty, +\infty)$ 内的极值为：

（i）$a>0$ 时，

$f(x)$ 在点 $\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ 有极小值，$y_{\min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；

（ii）$a<0$ 时，

$f(x)$ 在点 $\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ 有极大值，$y_{\max}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

这一定理是一元二次函数（卽二次三項式）討論中的重要結論之一．从下列簡单的例子，可以看出定理的精神实质．

例 1 求函数 $y=x^2-4x+7$ 的极小值．

〔解〕
$$\begin{aligned} y&=x^2-4x+7\\ &=x^2-4x+4+3\\ &=(x-2)^2+3. \end{aligned}$$

求极值时，x, y 不能是虚数，因为虚数是沒有大小意义的．当 x 为实数时，

$$(x-2)^2\geqslant 0.$$

$$\therefore\quad y=(x-2)^2+3\geqslant 3.$$

$\therefore$ 当 $x=2$ 时，$f(x)$ 有极小值，$y_{\min}=3$.

运用定理 1(i) 可以直接得到这一結論，讀者可自試之．

例 2 求函数 $z=-2x^2+6x+16$ 的极大值．

〔解〕 $z=-2x^2+6x+16$

$$=-2\left[x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]+2\left(\frac{3}{2}\right)^2+16$$

$$=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+20\frac{1}{2}.$$

$$\because\quad x\text{ 为实数时},\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\geqslant 0,$$

$$\therefore\quad -2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\leqslant 0.$$

$$z=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+20\frac{1}{2}\leqslant 20\frac{1}{2}.$$

$\therefore$ 当 $x=\dfrac{3}{2}$ 时，$\varphi(x)$ 有极大値，$z_{\max}=20\dfrac{1}{2}$.

运用定理 1(ii) 可直接得到同样的結果.

【証】 定理 1 可以按照上面相似的办法来証明.

$$y=f(x)=ax^2+bx+c$$

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

$$\because\quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0,$$

(i) 当 $a>0$ 时，有

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0,$$

$$\therefore\quad a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

但 $$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=a\left(-\frac{b}{2a}+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

$\therefore$ 当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$f(x)$ 有最小值；

$$y_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

（ii）当 $a<0$ 时，有

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\leqslant 0,$$

$$\therefore\quad a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\leqslant\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

$\therefore$ 当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$f(x)$ 有最大值；

$$y_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

实际上，从图象上观察可知二次函数的最大值或最小值也是它的极大值或极小值.

因为一元二次函数是最常見的函数之一，所以定理 1 应用很广泛，也是最基本的定理之一.

定理 2 求函数 $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ 的极值.

設

$$(b'^2-4a'c')y^2-2(bb'-2ac'-2a'c)y+b^2-4ac$$
$$=(b'^2-4a'c')[y-y_1][y-y_2]$$

其中 $y_1<y_2$；那么，

（i）$b'^2-4a'c'>0$ 时，

$$y_{\max}=y_1,\quad y_{\min}=y_2.$$

(ii) $b'^2-4a'c'<0$ 时，

$$y_{\min}=y_1,\quad y_{\max}=y_2.$$

(iii) $b'^2-4a'c'=0,\ bb'-2ac'-2a'c>0$ 时，

$$y_{\max}=\frac{b^2-4ac}{2(bb'-2ac'-2a'c)};$$

$b'^2-4a'c'=0,\ bb'-2ac'-2a'c<0$ 时，

$$y_{\min}=\frac{b^2-4ac}{2(bb'-2ac'-2a'c)}.$$

下面先举两个例子看一下.

例 3 求函数 $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ 的极值.

〔解〕 $$\because\quad y=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$$

$$\therefore\quad yx^2+yx+y=x^2-x+1$$

即 $$(y-1)x^2+(y+1)x+y-1=0.$$

$\because$ 当 y 有极值时 x 必须为实数，

$\therefore$ $\varDelta\geqslant 0$ ($\varDelta$ 即判别式 b^2-4ac)

即
$$\begin{aligned}\varDelta&=(y+1)^2-4(y-1)^2\\&=(y+1+2y-2)(y+1-2y+2)\\&=(3y-1)(3-y)\geqslant 0\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 3,$$

即

$$y_{\min}=\frac{1}{3},\quad y_{\max}=3.$$

运用定理 2 可得到与此相同的結果.

例 4 求函数 $y=\dfrac{4x+3}{x^2+2x+1}$ 的极值.

〔解〕 $$y=\frac{4x+3}{x^2+2x+1}$$

$$\therefore\quad yx^2+2yx+y=4x+3,$$

即 $$yx^2+2(y-2)x+y-3=0.$$

$\because$ 当 y 有极值时 x 必須为实数,

$$\therefore\quad \Delta=4(y-2)^2-4y(y-3)\geqslant 0,$$

$$4y^2-16y+16-4y^2+12y\geqslant 0,$$

即 $$-y+4\geqslant 0$$

故 $$y\leqslant 4$$

$$\therefore\quad y_{\max}=4.$$

运用定理 2 可得同样結果.

用和上述例子同样的方法,来証明定理 2.

【証】 $$\because\quad y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$$

$$\therefore\quad (a-a'y)x^2+(b-b'y)x+c-c'y=0.$$

$\because$ 当 y 有极值时, x 必須为实数,

$$\therefore\quad \Delta=(b-b'y)^2-4(a-a'y)(c-c'y)\geqslant 0$$

$$\left[\text{当 } \Delta=0 \text{ 时, } x=\frac{b'y-b\pm\sqrt{\Delta}}{2(a-a'y)}=\frac{b'y-b}{2(a-a'y)}\right].$$

即 $$(b'^2-4a'c')y^2-2(bb'-2ac'-2a'c)y$$
$$+b^2-4ac\geqslant 0, \tag{*}$$

为簡化起見,可以把上式分解成

$$(b'^2-4a'c')(y-y_1)(y-y_2)\geqslant 0,$$

其中 y_1, y_2 代表已知数,且 $y_1<y_2$.

（i） $b'^2-4a'c'>0$ 时，

$$(y-y_1)(y-y_2)\geqslant 0,$$

$$\therefore\ y\geqslant y_2,\quad y\leqslant y_1.$$

即在点 $\left\{\dfrac{b'y_2-b}{2(a-a'y_2)}\right\}$ 的近旁，

$$y=f(x)\geqslant f\left\{\frac{b'y_2-b}{2(a-a'y_2)}\right\}=y_2;$$

在点 $\left\{\dfrac{b'y_1-b}{2(a-a'y_1)}\right\}$ 的近旁，

$$y=f(x)\leqslant f\left\{\frac{b'y_1-b}{2(a-a'y_1)}\right\}=y_1.$$

$$\therefore\ y_{\min}=y_2,\quad y_{\max}=y_1.$$

（ii） $b'^2-4a'c'<0$ 时，

$$(y-y_1)(y-y_2)\leqslant 0,$$

$$\therefore\ y\geqslant y_1,\quad y\leqslant y_2.$$

同理可得：

$$y_{\min}=y_1,\quad y_{\max}=y_2.$$

(iii) $b'^2-4a'c'=0$ 时，(*)变为

$$-2(bb'-2ac'-2a'c)y+b^2-4ac\geqslant 0.$$

(1) 若 $bb'-2ac'-2a'c>0$，则

$$y\leqslant\frac{b^2-4ac}{2(bb'-2ac'-2a'c)},$$

$$\therefore\ y_{\max}=\frac{b^2-4ac}{2(bb'-2ac'-2a'c)};$$

(2) 若 $bb'-2ac'-2a'c<0$，则

$$y\geqslant\frac{b^2-4ac}{2(bb'-2ac'-2a'c)},$$

$$\therefore \quad y_{\min}=\frac{b^2-4ac}{2(bb'-2ac'-2a'c)}.$$

定理 2 可以不必記忆，主要是掌握它的証明方法. 这定理的应用对研究分子分母为二次或一次的有理函数特别有效.

一般地，如果所給的函数可以化成下列形式:

$$f_1(y)x^2+f_2(y)x+f_3(y)=0,$$

其中 f_1, f_2, f_3 是 y 的任意函数，那么，由于 x 必須是实数，

$$\therefore \quad \Delta=f_2^2(y)-4f_1(y)f_3(y)\geqslant 0,$$

只要这一不等式可解，y 的极值是可以求得的.

下面的定理是常要用到的.

定理 3 n 个正数的算术平均数不小于它們的几何平均数.

設这 n 个正数是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 所謂它們的算术平均数 A_n 和几何平均数 G_n 是

$$A_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

$$G_n=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

定理断言

$$A_n\geqslant G_n,$$

等号仅当这 n 个数全相等，即 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立.

我們用数学归納法来証明这个定理.

当 $n=2$ 时定理是显然成立的，因为

$$(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2\geqslant 0,$$