普通高等教育“十五”国家级规划教材

（高职高专教育）

线性代数

第二版

骆承钦　编

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材
（高职高专教育）

线性代数

第二版

骆承钦　编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材，也是教育部高职高专规划教材。本书遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，强调基本概念及各个概念之间的联系，重视阐明基本理论的脉络而不过度追求严密论证，强调基本方法——矩阵方法，即把问题归结为矩阵，用矩阵的运算解决问题，加强基本运算的训练但不过度追求运算技巧，重视应用，重视提高数学素质。

本书可作为高等专科教育、高等职业教育、成人高等教育工程类各专业线性代数课的教材，也可供工程技术人员自学阅读。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/骆承钦编．—2 版．—北京：高等教育出版社，2003.4（2005 重印）

ISBN 7-04-011774-6

Ⅰ．线…　Ⅱ．骆…　Ⅲ．线性代数-高等学校-教材　Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 000418 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京东君印刷有限公司		
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	1999 年 7 月第 1 版
			2003 年 4 月第 2 版
印　　张	9.25	**印　　次**	2005 年 8 月第 4 次印刷
字　　数	210 000	**定　　价**	10.40 元

物料号　11774-00

出 版 说 明

为加强高职高专教育的教材建设工作,2000年教育部高等教育司颁发了《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》(教高司[2000]19号),提出了“力争经过5年的努力,编写、出版500本左右高职高专教育规划教材”的目标,并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施:先用2至3年时间,在继承原有教材建设成果的基础上,充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验,解决好高职高专教育教材的有无问题;然后,再用2至3年的时间,在实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上,推出一批特色鲜明的高质量的高职高专教育教材。根据这一精神,有关院校和出版社从2000年秋季开始,积极组织编写和出版了一批“教育部高职高专规划教材”。这些高职高专规划教材是依据1999年教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》(草案)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(草案)编写的,随着这些教材的陆续出版,基本上解决了高职高专教材的有无问题,完成了教育部高职高专规划教材建设工作的第一步。

2002年教育部确定了普通高等教育“十五”国家级教材规划选题,将高职高专教育规划教材纳入其中。“十五”国家级规划教材的建设将以“实施精品战略,抓好重点规划”为指导方针,重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设,特别要注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材;同时还要扩大教材品种,实现教材系列配套,并处理好教材的统一性与多样化,基本教材与辅助教材、文字教材与软件教材的关系,在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系。

普通高等教育“十五”国家级规划教材(高职高专教育)适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2002年11月30日

前　言

为满足21世纪我国大力发展高职高专教育的需要，编者编写了这本适合高职高专工程类专业的线性代数教材。本书是在同济大学数学教研室编《线性代数》(第三版)以及由骆承钦、谢国瑞、朱铉道、刘悦安、苏德矿等合编的成人教育《线性代数》这两本教材的基础上，参照高职高专工程类专业线性代数课程教学基本要求改编而成的。本书可作为高等专科教育、高等职业教育、成人高等教育工程类各专业线性代数课程的教材，也可供工程技术人员自学阅读。

遵循"以应用为目的，以必需、够用为度"的原则，确定编写本书的指导思想为：强调基本概念及各个概念之间的联系；重视阐明基本理论的脉络而不过度追求严密论证；强调基本方法——矩阵方法，即把问题归结为矩阵，用矩阵的运算(线性运算、乘法、初等变换)解决问题；加强基本运算的训练但不过度追求运算技巧；重视应用；重视提高学生的数学素质。

考虑到读者对线性方程组已有所了解，因此，本书从讨论线性方程组入手，用矩阵的运算作纽带，把线性方程组、矩阵、向量组三者联在一起来展开本课程的基本内容。在这样的安排下，向量组的线性相关性理论成为线性方程组理论的几何解释，这就使课程内容脉络分明且容易接受。

本书分五章：第一章行列式仅作为一种计算工具；第二章及第三章前面部分介绍矩阵及其运算；第三章介绍矩阵的初等变换和矩阵的秩，并用它建立线性方程组的理论及解法；第四章把线性方程组的理论"翻译"成几何语言，得出向量组的线性相关性理论；第五章介绍相似矩阵与二次型。其中加*号的内容(包括分块矩阵的运算及第五章)高职高专的大多数专业可不学，供对线性代数课程要求较高的读者选用。每章末增加了"教学基本要求"和"学习指导"等内容，并配备一定数量的习题，书末附习题答案。

教育部高教司、高等教育出版社以及同济大学高等技术学院和应用数学系对本书的编写和出版给予了热忱的关心和支持，谨在此表示衷心的感谢！

限于编者的水平，书中难免有不妥或疏漏之处，欢迎广大读者批评指正。

骆承钦

2002年10月于同济大学

目　　录

第一章　行　列　式

生产实践和科学研究中有许多问题可归结为一个线性方程组.行列式正是在对线性方程组的研究中建立起来的,并成为研究线性方程组的重要工具.当然,行列式除用于解线性方程组外,还有着广泛的应用.

§1　二阶和三阶行列式

我们先来用消元法解二元线性方程组,并从中建立起行列式的概念.

设有含两个未知数 x_1、x_2 的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$是未知数 $x_j(j=1,2)$的系数,$b_i(i=1,2)$是常数项.

在方程组(1)的第一个方程和第二个方程的两边分别乘以 a_{22}和 a_{12},然后两式相减,消去 x_2 得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

用同样的方法消去 x_1,得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,可求得方程组(1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

现在我们来分析一下(2)式的结构,希望从中找出某种规律.从(2)式中我们看到,x_1,x_2 的分子、分母都是两对数的乘积之差,其中分母都是 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,它是由方程组(1)的系数确定的.假如我们将方程组(1)的系数提出来,且保持原来的相对位置不变,排成二行二列(横的称为行,纵的称为列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

那么 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$刚好是表中主对角线(左上角至右下角的对角线)上两个数的乘积与副对角线(右上角至左下角的对角线)上两个数的乘积之差.我们规定:由上面的数表所确定的表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,称为这个数表的二阶行列式,并记作 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{3}$$

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为这个行列式的元素,简称为元.它的第一个下标 i 称为行标,表示该

元位于行列式的第 i 行；它的第二个下标 j 称为列标，表示该元位于行列式的第 j 列.行列式中位于第 i 行第 j 列的元称为 (i,j) 元.

由二阶行列式的概念，我们可以将(2)式中的 x_1,x_2 的分子分别写成

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则可以把线性方程组(1)的解(2)式写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{4}$$

其中 $D \neq 0$.

这个结果是很容易记忆的：x_1,x_2 的分母 D 是由方程组(1)的系数在方程组的一般形式下保持原来的相对位置不变所构成的二阶行列式(称为系数行列式)，x_1 的分子 D_1 是用方程组(1)的常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11},a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用 b_1,b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12},a_{22} 所得的二阶行列式.

上述用公式(4)表示线性方程组(1)的解的方法称为解线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

例 1 求解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 = 2. \end{cases}$$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 15 = -1 \neq 0,$$

又有

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 10 = -3,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1,$$

所以

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-3}{-1} = 3, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{-1} = -1.$$

例 2 求解方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 8, \\ 2x_1 + 7x_2 = 5. \end{cases}$$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 8 = 13 \neq 0,$$

又有
$$D_1=\begin{vmatrix}8&4\\5&7\end{vmatrix}=56-20=36,$$
$$D_2=\begin{vmatrix}3&8\\2&5\end{vmatrix}=15-16=-1,$$
所以
$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{36}{13},x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-1}{13}=-\frac{1}{13}.$$

类似地,可定义三阶行列式如下:

设有 9 个数 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$ 排成 3 行 3 列的数表
$$\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{matrix}$$
那么,规定
$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$
称为这个数表的三阶行列式.

可以看出,三阶行列式共有六项,每一项均为选自不同行,不同列的三个元的乘积,其中三项的前面为正号,另外三项的前面为负号.为方便记忆,作图 1-1,图中每条实线(共三条)所连结的三个数的乘积前面加正号,每条虚线(共三条)所连结的三个数的乘积前面加负号.

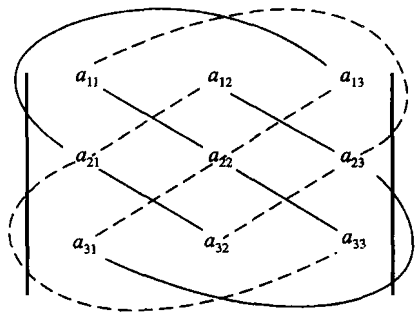

图 1-1

利用图 1-1 来记忆三阶行列式定义的方法称为对角线法则(显然二阶行列式也适用对角线法则).

例 3 计算三阶行列式
$$D_1=\begin{vmatrix}2&1&2\\-4&3&1\\2&3&5\end{vmatrix},$$
$$D_2=\begin{vmatrix}1&3&2\\-1&0&3\\2&1&5\end{vmatrix}.$$

解 按照对角线法则,可得
$$\begin{aligned}D_1&=2\times3\times5+1\times1\times2+2\times(-4)\times3\\&\quad-2\times1\times3-1\times(-4)\times5-2\times3\times2\\&=30+2-24-6+20-12\\&=10.\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}D_2&=1\times0\times5+3\times3\times2+2\times(-1)\times1\\&\quad-1\times3\times1-3\times(-1)\times5-2\times0\times2\end{aligned}$$

$$=0+18-2-3+15-0$$
$$=28.$$

利用三阶行列式,我们也有解三元线性方程组的克拉默法则.设有三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}\tag{5}$$

记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},$$
$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}.$$

这里,如同二元的情形一样,D 是由三元线性方程组(5)中三个未知数的系数保持原来的相对位置不变的情况下所构成的三阶行列式,称为(5)的系数行列式.而 $D_j(j=1,2,3)$ 是用 b_1、b_2、b_3 替换 D 中 x_j 的系数 a_{1j}、a_{2j}、a_{3j} 所得的行列式.

若系数行列式 $D\neq0$,则线性方程组(5)有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 4 求解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=0,\\3x_1+2x_2-5x_3=1,\\x_1+3x_2-2x_3=4.\end{cases}$$

解 因为

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}2&-1&1\\3&2&-5\\1&3&-2\end{vmatrix}\\&=2\times2\times(-2)+(-1)\times(-5)\times1+1\times3\times3\\&\quad-2\times(-5)\times3-(-1)\times3\times(-2)-1\times2\times1\\&=-8+5+9-(-30)-6-2\\&=28\neq0,\end{aligned}$$

又有

$$D_1=\begin{vmatrix}0&-1&1\\1&2&-5\\4&3&-2\end{vmatrix}=0+20+3-0-2-8=13,$$
$$D_2=\begin{vmatrix}2&0&1\\3&1&-5\\1&4&-2\end{vmatrix}=-4+0+12-(-40)-0-1=47,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\3 & 2 & 1\\1 & 3 & 4\end{vmatrix}=16+(-1)+0-6-(-12)-0=21,$$

所以得到
$$x_1=\frac{13}{28},x_2=\frac{47}{28},x_3=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$

现在我们来考察二阶行列式与三阶行列式之间的关系，由三阶行列式与二阶行列式的定义有

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}. \tag{6}$$

由此式可以看出，三阶行列式等于它的第一行每个元分别乘一个二阶行列式的代数和.

为了进一步了解这三个二阶行列式与原来的三阶行列式的关系，我们引入余子式和代数余子式的概念.

在三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

中，把(i,j)元 a_{ij}($i=1,2,3;j=1,2,3$)所在的第 i 行与第j 列删除，剩下的元保持原来的相对位置不变构成的二阶行列式称为(i,j)元 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}. 记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，A_{ij} 称为(i,j)元 a_{ij} 的代数余子式.

例如在三阶行列式 D 中，(1,2)元的余子式 M_{12}是在 D 中划去第 1 行和第 2 列后所构成的二阶行列式

$$M_{12}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\a_{31} & a_{33}\end{vmatrix},$$

而(1,2)元的代数余子式为

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

应用代数余子式的概念，(6)式可以写成

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13},$$

即三阶行列式等于它的第 1 行每个元与其代数余子式的乘积之和. 这个表达式通常称为：行列式按第 1 行展开的展开式.

如果我们定义一阶行列式$|a_{11}|=a_{11}$，那么三阶行列式的展开定理对于二阶行列式同样适用，例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}, \tag{7}$$

其中 $A_{11} = |a_{22}| = a_{22}$，$A_{12} = -|a_{21}| = -a_{21}$.

例 5 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

解 将行列式按第 1 行展开，即得

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\times 12 - (-22) + 2\times(-18) = 10.$$

行列式按第 1 行展开的结果还可以进一步推广为如下定理.

定理 1 三阶行列式等于它的任一行或任一列的每个元与它的代数余子式的乘积之和，即

$$\begin{aligned} D &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \\ &= \sum_{j=1}^{3} a_{ij}A_{ij} \quad (i = 1,2,3) \end{aligned} \tag{8}$$

或

$$\begin{aligned} D &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} \\ &= \sum_{i=1}^{3} a_{ij}A_{ij} \quad (j = 1,2,3). \end{aligned} \tag{9}$$

证明 证(9)式中 $j=2$ 的情况，其它情况可类似证明.

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{32}a_{11}a_{23} + a_{32}a_{13}a_{21} \\ &= -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \\ &= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}. \end{aligned}$$

此定理叫做行列式的展开定理，(8)式称为行列式按第 i 行展开的展开式，(9)式称为行列式按第 j 列展开的展开式.

例如把例 5 中的行列式按第 2 行展开，得

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -4 + 18 - 4 = 10,$$

或按第 3 列展开，得

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -36 - 4 + 50 = 10.$$

例 6 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 由于第 2 列中有两个元为零，故按第 2 列展开较简便：

$$D = 4 \times (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \times (-5) = -20.$$

§2 n 阶行列式

由上一节有关行列式按第 1 行展开的方法可知：二阶行列式等于它的第 1 行每个元与该元的代数余子式（一阶行列式）乘积之和，见(7)式；三阶行列式等于它的第 1 行每个元与该元的代数余子式（二阶行列式）乘积之和，见(6)式.

如果我们把(7)式和(6)式看作是二阶行列式和三阶行列式的定义的话，我们可以循着这个思路（即用低一阶的行列式来定义高一阶的行列式）给出 n 阶行列式的定义.

定义 1 由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的 n 阶行列式记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

当 $n=1$ 时，$D = |a_{11}| = a_{11}$；

当 $n \geqslant 2$ 时，

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}, \tag{10}$$

其中 A_{1j} 为 D 的 $(1,j)$ 元 a_{1j} 的代数余子式①.

例 7 按定义计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

解

---

① n 阶行列式中 (i,j) 元 a_{ij} 的代数余子式的定义与三阶行列式中所介绍的类似，不再重复.

$$D=2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&1&1\\-1&2&3\\0&5&1\end{vmatrix}+1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&1&1\\0&2&3\\2&5&1\end{vmatrix}$$

$$+(-2)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&0&1\\0&-1&3\\2&0&1\end{vmatrix}+4(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}3&0&1\\0&-1&2\\2&0&5\end{vmatrix}$$

$$=2(-5+1)-(6+6-4-45)-2(-3+2)-4(-15+2)$$

$$=-8+37+2+52=83.$$

例 8 计算下三角形行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11}&&&\\a_{21}&a_{22}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\text{ 及 }D_2=\begin{vmatrix}&&&a_{1n}\\&&a_{2,n-1}&a_{2n}\\&\iddots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}&a_{nn}\end{vmatrix}$$

(对角线以上的元均为 0).

解 按定义 1 有

$$D_1=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&&&\\a_{32}&a_{33}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}a_{33}&&\\\vdots&\ddots&\\a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$D_2=(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix}&&a_{2,n-1}\\&a_{3,n-2}&a_{3,n-1}\\\iddots&\vdots&\vdots\\a_{n1}\ \cdots&a_{n,n-2}&a_{n,n-1}\end{vmatrix}=(-1)^{1+n}a_{1n}(-1)^{1+n-1}a_{2,n-1}\begin{vmatrix}&a_{3,n-2}\\\iddots&\vdots\\a_{n1}\ \cdots&a_{n,n-2}\end{vmatrix}=\cdots$$

$$=(-1)^{(1+n)+n+\cdots+3}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

与三阶行列式一样，n 阶行列式也有如下的展开定理.

定理 2 n 阶行列式等于它的任一行或任一列的每个元及其代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\qquad(i=1,2,\cdots,n);$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\qquad(j=1,2,\cdots,n).$$

证明从略.

例 9 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1 & -2 & 4\\3 & 0 & 1 & 1\\0 & -1 & 2 & 3\\2 & 0 & 5 & 1\end{vmatrix}.$$

解 由于第 2 列的零元较多,故按第 2 列展开较简便.

$$D=1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\0 & 2 & 3\\2 & 5 & 1\end{vmatrix}+(-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & -2 & 4\\3 & 1 & 1\\2 & 5 & 1\end{vmatrix}$$

$$=37+46=83.$$

例 10 计算上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & a_{nn}\end{vmatrix}$$

(主对角线以下的元均为零).

解 根据定理 2,考虑到 D 的第 1 列除元 a_{11}外均为零,所以按第 1 列展开得到

$$D=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & a_{nn}\end{vmatrix},$$

同样,对上式右端的 $n-1$ 阶行列式按第 1 列展开得到

$$D=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ & \ddots & \vdots\\ & & a_{nn}\end{vmatrix},$$

依此类推可得

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

§3 行列式的性质

由上节的几个例题可以看出,在行列式的计算过程中,为了计算简便,可选择含零元较多的那一行(或列)展开.本节将介绍行列式的性质,利用这些性质可以将一个行列式中某行(或列)的元尽可能多地化为零,以使行列式的计算变得简单.

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

将 D 的各行都变为列，不改变它们的前后顺序而得到的新行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 D 的转置行列式，记作 D^{T} 或 D'.

性质 1 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等.

证明 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其转置行列式为

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & \cdots & a_{1n}' \\ a_{21}' & a_{22}' & \cdots & a_{2n}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}' & a_{n2}' & \cdots & a_{nn}' \end{vmatrix},$$

其中 $a_{ij}' = a_{ji} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$.

应用数学归纳法来证明. 当 $n=2$ 时，结论显然成立，即有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = D^{\mathrm{T}}.$$

假设对于 $n-1$ 阶行列式结论成立，即 $n-1$ 阶行列式与它的转置行列式相等. 我们将 D 按第 1 行展开，得到

$$D = (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}.$$

将 D^{T} 按第 1 列展开，由于 D^{T} 的 $(k,1)$ 元 $a_{k1}' = a_{1k}$，它的余子式是 D 中余子式 M_{1k} 的转置 M_{1k}^{T}，因此

$$D^{\mathrm{T}} = (-1)^{1+1}a_{11}M_{11}^{\mathrm{T}} + (-1)^{2+1}a_{12}M_{12}^{\mathrm{T}} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n}^{\mathrm{T}},$$

而 M_{1k}^{T} 与 $M_{1k}(k=1,2,\cdots,n)$ 均为 $n-1$ 阶行列式，根据归纳法假设，有

$$M_{1k}^{\mathrm{T}} = M_{1k}.$$

于是得到

$$D = D^{\mathrm{T}}.$$

由性质 1 可以看出行列式的行与列有同等的地位，凡是行所具有的性质，对于列也成立，反之也一样.

性质 2 若行列式中有某一行(或列)的元全是零，则这个行列式的值等于零.

证明 根据定理 2，把行列式按该行(或列)展开，即知结论成立.

性质 3 行列式中任何两行(或列)的元互相交换位置，行列式的值改变符号.

证明 先证明交换相邻两行的情形，设行列式

$$D=\begin{vmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \text{第 } i+1 \text{ 行} \\ \\ \end{array},$$

交换第 $i,i+1$ 两行后得到行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \text{第 } i+1 \text{ 行} \\ \\ \end{array}.$$

将 D 按第 i 行展开，得到

$$\begin{aligned} D &= a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1}+a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2}+\cdots+a_{in}(-1)^{i+n}M_{in} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}M_{ik}. \end{aligned}$$

将 D_1 按第 $i+1$ 行展开，由于 D_1 中 $(i+1,k)$ 元 a_{ik} 的余子式也是 D 中的 M_{ik}，因此

$$\begin{aligned} D_1 &= a_{i1}(-1)^{i+2}M_{i1}+a_{i2}(-1)^{i+3}M_{i2}+\cdots+a_{in}(-1)^{i+1+n}M_{in} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+1+k}M_{ik}. \end{aligned}$$

由此可看出 D 与 D_1 只相差一个符号，即

$$D_1=-D.$$

再证交换任意两行的情形. 设将行列式 D 的第 i、j（不妨设 $i<j$）两行交换后得到行列式 D_1. 设 $j-i=l$. 先将行列式 D 的第 j 行逐次与它的前面一行交换，经过 l 次相邻两行的交换，将 D 中的第 j 行的元换到了第 i 行的位置. 此时，D 中的第 i 行的元换到了第 $i+1$ 行的位置，再将它与后面各行逐行交换，经过 $l-1$ 次相邻两行交换后，D 中原来的第 i 行的元换到了第 j 行的位置. 这样，一共经过了 $2l-1$ 次的相邻两行的交换，实现了 D 中第 i,j 两行的交换，即将 D 变成 D_1，所以

$$D_1=(-1)^{2l-1}D=-D.$$

推论 如果行列式中有两行（或列）的元对应相等，则这个行列式等于零.

证明 设行列式 D 中的第 i,k 两行的元对应相等，把这两行互换得到行列式 D_1，由性质 2 知 $D_1=-D$. 另外，由于交换的两行的元对应相等，所以有 $D_1=D$，由此推得

$$D=-D, 2D=0,$$

故

$$D=0.$$

性质 4 若以一个数 λ 乘到行列式的某一行（或列）的全部元上，所得到的新行列式为原来行列式的 λ 倍. 因此，若行列式的某一行（或列）的全体元有公因数，则可以把这个公因数提出来. 即