ZHONGJI JILIANG
JINGJIXUE

经济管理类研究生重点课程教材
西南财经大学硕士研究生重点建设课程教材

中级计量经济学

主　编　张卫东
副主编　喻开志　郭建军

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

ZHONGJI JILIANG JINGJIXUE

经济管理类研究生重点课程教材

西南财经大学硕士研究生重点建设课程教材

中级计量经济学

主　编　张卫东

副主编　喻开志　郭建军

西南财经大学出版社

Southwestern University of Finance & Economics Press

图书在版编目(CIP)数据

中级计量经济学/张卫东主编.—成都:西南财经大学出版社,2010.9
ISBN 978-7-81138-951-7

Ⅰ.①中… Ⅱ.①张… Ⅲ.①计量经济学—高等学校—教材
Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 184884 号

中级计量经济学

主　编:张卫东
副主编:喻开志　郭建军

责任编辑:向小英
助理编辑:周　芸　植　苗
封面设计:杨红鹰
责任印制:封俊川

出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街55号)
网　　址	http://www.bookcj.com
电子邮件	bookcj@foxmail.com
邮政编码	610074
电　　话	028-87353785　87352368
印　　刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	170mm×240mm
印　　张	13.75
字　　数	235 千字
版　　次	2010 年 10 月第 1 版
印　　次	2010 年 10 月第 1 次印刷
印　　数	1—2000 册
书　　号	ISBN 978-7-81138-951-7
定　　价	26.00 元

前　言

计量经济学是现代经济学和管理学的重要组成部分，自其诞生以来取得了飞速的发展，产生了众多重要的理论与应用成果。在我国，尽管只有短短三十年的历史，计量经济学的理论研究和实际应用已为许多人所重视，其作用也日益突出。计量经济学课程也成为高等院校经济管理类专业本科生和研究生的核心课程。正是在这样的背景下，本着“重思想，重方法，重应用”的原则，我们编写了这本经济管理类专业硕士研究生的教材。

本教材在回顾计量经济学经典方法的基础上，重点讲授20世纪70年代以后出现的新方法，同时辅以计算机实践等内容。通过本课程的学习，要求学生能够掌握计量经济分析中基本方法的原理（包括背景与思想）和运用操作，训练、提高计量经济思维与分析问题的能力。一方面，学生要能够运用所学方法对实际经济问题进行判断与分析；另一方面，在此基础上学生要能够继续学习计量经济学中的进一步问题。在学习本课程之前，要求学生已经学习过线性代数、概率论与数理统计、计量经济学（初级）。

西南财经大学经济管理类各专业硕士研究生开设的计量经济分析、中级计量经济学等课程已有长达10年的历史。本书是在这些课程使用的讲义和课件的基础上，经过3～5年的多次修改总结而编写完成的。书中带*号的部分理论性较强，对于侧重应用的读者初次学习时可跳过。

本书第一章由张卫东、李南成编写；第二章由张卫东编写；第三章由郭建军编写；第四章由周惠彬、任栋编写；第五章由李南成编写；第六、七、八、九章由喻开志编写；第十章由龚金国、李伊编写。全书由张卫东统稿，张卫东、郭建军、喻开志审定。在本书的编纂过程中得到了庞皓教授、黎实教授的悉心关心和指导，在此表示由衷的谢意。

作为西南财经大学研究生重点课程——中级计量经济学建设的重要环节，本书的编写得到了西南财经大学研究生部的大力支持，在此表示衷心的感谢。而在本书的出版过程中，西南财经大学出版社给予了大力

帮助，这里也表示由衷的谢意。同时，本书的编写过程中参考了大量的文献，包括许多教材和课件讲义等，在此对这些专家作者表达真诚的感谢和敬意。

由于编者学识有限，本书难免存在这样或那样的疏漏和失误，敬请读者批评指正，以便进一步改进完善。

编者

2010年8月于成都

目　录

第一章　导论

第一节　计量经济学的作用和意义

1933 年《Econometrica》杂志的创刊和世界计量经济学会的成立，标志着计量经济学的诞生。《Econometrica》杂志主编和第一任世界计量经济学会会长——挪威经济学家弗瑞希（R. Frisch）说：用数学方法探讨经济学可以从好几个方面着手，但任何一个方面都不能和计量经济学混为一谈。计量经济学与经济统计学绝非一码事；它也不同于我们所说的一般经济理论，尽管经济理论大部分具有一定的数量特征；计量经济学也不应视为数学应用于经济学的同义语。经验表明，统计学、经济理论和数学这三者对于真正了解现代经济生活的数量关系来说，都是必要的，但本身并非是充分条件。三者结合起来，就是力量，这种结合便构成了计量经济学。

当代意义下的计量经济学，本质上并没有离开上述精髓，但有了新的发展，如数学和统计方法的内容已有很大的扩展，同时还包括了很重要的工具——计算机的普及和统计软件的应用。

计量经济学在国外经济学中占有非常重要的地位。10 位直接因为对计量经济学发展的贡献而获得诺贝尔经济学奖的代表人物是：R. Frisch 和 J. Tinbergen（1969 年），W. Leotief（1980 年），L. R. Klein（1980 年），R. Stone（1984 年），T. Haavelmo（1973 年），J. J. Heckman 和 D. L. McFadden（2000 年）R. F. Engle 和 W. J. Granger（2003 年）。克莱因（R. Klein）曾说：计量经济学已经在经济学科中居于最重要的地位。在大多数大学和学院中，计量经济学的讲授已经成为经济学课程表中最有权威的一部分。萨缪尔森（P. Samuelson）也说过，第二次世界大战后的经济学是计量经济学的时代。

为什么计量经济学研究与应用会出现蓬勃发展的状况？

作为实证社会科学的（西方）经济学，其一般方法论与自然科学方法论有相似之处，即两者都属于实证科学。这表现为：一是它们是基于对客观事实观察和观测；二是它们的理论科学性都要依靠事实来检验。这两点是实证方法论的核心，也是任何实证方法论的共同基础。

当然它们也有不同之处。作为社会科学的经济学,研究的问题是具有意识和理智的人们的经济行为,并且,社会经济现象的规律性主要是在千百万人的活动之中,而不是表现在个别人的行动中。因此,经济学不能完全靠在实验室里做实验来构造以及检验经济学理论。我们应该认识到社会经济现象的客观复杂性和经济学实证方法论的局限性。

经济学按研究的范式不同分为规范经济学(研究经济学中所涉及的道德规范、价值判断问题,力求说明"应该是什么"的问题)与实证经济学(在做出一定行为关系的假设下,分析与预测行为的经济后果,力求说明"是什么"的问题)。计量经济学是典型的实证经济学,它没有自己的经济理论,而是分析方法的应用和创新。在经济分析中引入数学和统计方法,是因为数学或统计方法具有很强的逻辑性、客观性、通用性和独立性。这也正体现了计量经济学作为典型的数量分析工具的作用和意义。

第二节　经典计量经济学概述

所谓经典计量经济学主要是指 1970 年以前的计量经济学。古扎拉蒂(Damodar N. Gujarati)在《Basic Econometrics(4th edition)》(2001)一书中,多处用到经典计量经济学和经典方法论(classical methodology)等词语。Paul. A. Ruud 2000 年出版一本教科书的名称就是《An Introduction to Classical Econometrics Theory》。2000 年 Wallace Huffman 也出版一本教科书《Classical Econometrics》。Franco Peracchi 在 2001 年的《Econometrics》中明确指出,该书提供了一个联系"Classical Econometrics"与最近若干年的新研究领域,例如非参数方法、面板数据等的桥梁。

在经典假设的前提下,计量经济学有一系列的理论、方法与应用。其方法论按如下路线进行:① 理论或假说的陈述;② 理论的数学模型的设定;③ 理论的计量经济模型的设定;④ 获取数据;⑤ 计量经济模型的参数估计;⑥ 有关模型的假设检验;⑦ 结构分析、政策评价、控制或预测。

对经典计量经济学作出重大贡献而获得诺贝尔经济学奖的经济学家有 6 位。挪威经济学家弗瑞希(R. Frish)和荷兰经济学家丁伯根(Jan Tinbergen)在 1969 年获得诺贝尔奖,颁奖词是"对经济过程的分析,发展和应用了的动态模型"。美国经济学家列昂惕夫(Wassily Leontief)在 1973 年获奖时的颁奖词是"发展了投入产出方法以及在重要经济问题上的应用"。而美国经济学家克莱因(Lawrence R. Klein)在 1980 年获得诺贝尔经济学奖则是因为"在分析经济波动和经济政策时计量经济模型的建立和应用"。英国经济学家斯通(Richard Stone)1984 年获得诺贝尔奖是因为"国家预算

数据系统发展的基础性贡献和由此极大地改进了经验经济分析的基础”。挪威经济学家数学家哈维尔默(Trygve Haavelmo)在1989年获得诺贝尔奖是因为“计量经济学中概率理论基础的澄清(clarification)以及联立经济结构的分析”。

换句话说，在计量经济学的发展过程中,R. Frish是主要创立者，Tenbergen建立第一个应用模型,T. Haavelmo建立了经典计量经济学的概率论基础,Stone发展数据基础,Leontief建立投入产出模型,L. R. Klein发展应用模型,成为其理论与应用的集大成者。而就其发展的时间顺序来看是20世纪30年代创立,四五十年代发展,60年代扩张。这些都是经典计量经济学的历史功绩。

而经典计量经济学具有的主要特征是:模型类型是随机模型。模型设立以理论背景为导向。模型结构为线性或者可以化为线性的形式,模型具有明确的形式和参数,分析变量间的依存关系,解释变量具有同等地位。数据类型以时间序列数据或者截面数据为样本。被解释变量为服从正态分布的连续随机变量(这可以认为是“经典”的核心)。估计方法是仅利用样本信息,以最小二乘方法为核心的方法来估计模型。

经典计量经济学的应用主要表现为:应用模型方法论基础的实证分析、经验分析和归纳。应用模型功能的结构分析、政策评价、经济预测、理论检验与发展。而应用模型的领域则包括诸如生产、需求、消费、投资、货币金融以及宏观经济等的传统的应用领域。

经典计量经济学为经济学的发展作出了重大贡献,许多在其他经济学领域获得诺贝尔经济学奖的经济学家都成功地应用了经典计量经济学的理论方法。经典计量经济学中的单方程模型仍然是最具应用价值的模型。

第三节　非经典计量经济学概述

以经典计量经济学为基石,促进了计量经济学在各领域的快速发展,即构成了所谓的“现代计量经济学”。比如时间序列计量经济学、微观计量经济学、非参数计量经济学等。

时间序列计量经济学,是现代宏观计量经济分析的主要工具。经典的宏观计量经济学主要是宏观计量经济学模型理论。而现代宏观计量分析的主要研究方向已发展为单位根检验、协整理论以及动态计量经济学。(可参见2001《Journal of Econometrics》第100期纪念专辑中的两篇经典文章C. W. Granger:“Macroeconometrics——Past and Future”。J. H. Stock:“Macroeconometrics”)当代宏观计量经济学或者时间序列计量经济学的前

沿研究方向已发展到结构变化的单位根和协整理论。

以“发现分析经济时间序列共同趋势（协整）的方法”而获得2003年诺贝尔奖的英国经济学家格兰杰（Clive W. J. Granger），发现了分析具有共同趋势的经济时间序列的方法——协整。发现了处理非平稳时间序列之间的虚假回归问题的方法。提出了协整的概念和协整的检验方法；区分和表述了非平稳时间序列之间的长期关系和短期影响；提出了著名的 Grange 表述定理，即如果变量 X 与 Y 是协整的，则它们间的短期非均衡关系总能由一个误差修正模型表述。

格兰杰的贡献已经被经济学家广泛用于经济时间序列分析，成为宏观经济分析的常用理论方法，成为宏观计量经济学的主流。在一个经济系统中，经济变量之间既存在长期均衡关系，又存在短期动态关系。格兰杰的协整分析已经成为建立动态计量经济学模型的基石。

一方面，作为现代计量经济学的一部分的动态时间序列计量经济学，注重模型设定理论，注重方法技术。以英国经济学家亨德瑞（D. F. Hendry）为代表的这一学派强调：从理论导向到数据导向；从简单到复杂的建模思路到从一般到简单的建模思路；从数据生成过程（DGP）到自回归分布滞后模型（ADL）；从自回归分布滞后模型（ADL）到误差修正模型（ECM）的演进。这一学派还考虑分布的约化、误差项的约化、参数的约化、滞后项的约化、函数形式的约化，使之能更好更方便地分析实际经济问题。

另一方面，作为计量经济学的一个相对独立的分支——金融计量经济学，由于金融市场分析的重要性，金融市场时间序列数据的特殊性，使得理论方法的发展成为迫切需要。而金融市场数据的可得性和充分性，为发展理论方法提供了条件，并使得理论方法能够得到广泛的应用。

以“发现分析经济时间序列时变波动方法”而获得2003年诺贝尔奖的美国经济学家恩格尔（Robert F. Engle）发现了分析随时间变化的波动性的经济时间序列的方法——自回归条件异方差（ARCH）模型。ARCH 模型假定随机误差项的方差是随时间变化的，而且具有自回归条件异方差的结构。ARCH 模型及其估计方法的提出，模型性质的证明以及 ARCH 模型的发展——GARCH 模型，使得金融市场计量经济学达到了新的高度。一些著名的模型，例如 CAPM 模型（Sharpe 1990），Black - Scholes 公式（Awarded the Nobel Economics Prize in 1997 to Merton and Scholes）等因此而得到修正与完善。

一般来讲，我们可以将计量经济模型写为条件期望和条件方差的和，即 $y = E(y \mid X) + S(X)\varepsilon$。如果条件方差 $Var(y \mid X) = S(X)$ 为常数，或特别的等于1，即 $y = E(y \mid X) + \varepsilon$，就是传统的经典计量经济模型。而对于

$S(X)\varepsilon$ 的讨论则构成自回归条件异方差模型,如 ARCH 模型、GARCH 模型等。这是现代的非经典计量经济学的活跃分支。

这种"均值 + 方差"的分析思路也可叫做计量经济分析的整体思路。

现代计量经济学的另一个重要分支是 2000 年正式提出的微观计量经济学。它的主要特征是:对个人和家庭的经济行为进行经验分析。微观计量经济学的原材料是微观数据。微观数据是通过调查得到的。微观数据的显著增加使得微观计量经济学得到发展。

美国经济学家赫克曼(J. J. Heckman) 和麦克范登(D. L. Mcfadden) 在微观计量经济学的基础性贡献,为他们赢得了 2000 年的诺贝尔奖。而 2000 年以后关于微观计量经济学的研究也形成高潮,主要包括一般离散选择模型(Discrete Choice Model)、嵌套离散选择模型(Nested)、排序离散选择模型(Ordered)、计数数据模型(Model for Count Data) 等。微观计量经济学中最前沿的理论方法研究是非参数和半参数方法。

面板数据(Panel Data) 分析是相对独立的计量经济学分支,包括宏观和微观 Panel Data 模型。形成了与截面数据模型相对应的较完整的内容体系,更多的应用于宏观。基本内容有模型的类型或分类、模型的估计方法、模型的选择比较检验与应用。其前沿研究方向是 Panel Data 单位根检验和协整分析,Panel Data 模型的非参数方法。

非参数计量经济学包括非参数模型和半参数模型(Nonparametric and Semiparametric Models),单方程模型和联立方程模型,随机设定模型和固定设定模型。非参数模型的估计方法有两大类:局部逼近(权函数方法) 和整体逼近(级数估计)。主要方法是权函数估计,最常见的权函数估计是核估计和局部线性估计。目前研究的重点仍然是估计方法及其性质(例如半参数模型的估计、级数估计、联立方程非参数模型的估计、窗宽、边界点等)。

除此之外,现代计量经济学还有其他方面的内容,比如广义矩方法(GMM)。比如模型检验,包括对于经济理论模型的具体设定验证;对于数据背后的经济规律发现,数据质量诊断;判断或检验模型的若干信息准则等。

以上种种构成了现代计量经济学的主要内容。本书后面各章将在经典计量经济学及其拓展的基础上,介绍非经典计量经济学也就是现代计量经济学的一些基本内容,在兼顾理论的同时,注重分析方法的思路和应用。

第二章　线性回归模型回顾与拓展

计量经济分析方法是通过设定模型和对观测数据本身统计规律的认识，对模型参数进行估计和检验，并由此对经济变量做出正确的推断预测和应用，从而客观科学地认识和表述经济现象和经济规律。

计量经济学产生于20世纪30年代，经过半个多世纪的发展，计量经济学在理论和应用两个方面都取得了长足的进步。尤其是自从1941年哈维尔默(Haavelmo)发表了以概率论和统计推断为依据的《计量经济学的概率方法》之后，计量经济学进入了一个以方法论研究为主的时期。随之而来的大量统计方法的出现，使经济领域(金融、投资、消费、贸易、工农业生产等)及社会生产等诸多方面进入了计量分析的时代。计量经济分析在各个领域的实用价值越来越显现出来。

计量经济分析是经济学科各分支进行理论分析和定量研究必不可少的工具。它能更精确、更深刻地揭示经济现象和经济规律，而其核心则是统计推断方法 —— 有关参数估计和假设检验的方法。

本章首先从矩阵角度对经典计量经济学的基本内容(包括条件期望，总体回归函数、样本回归函数、古典假定及其再认识)作简要的回顾总结。其次着重分析描述线性回归模型的估计方法与检验方法的拓展，主要包括实证经济分析中的一些重要的估计方法和检验方法的使用条件，数理过程，结论性质和实际应用效果等。使之成为应用于一般经济研究的计量分析方法的概览。

第一节　古典假定的再认识

首先回忆条件期望、条件方差、总体回归函数、样本回归函数等概念的具体含义。

条件期望的定义为：

$$m(x) \triangleq E[y \mid x] = \begin{cases} \int_y yf(y \mid x)dy \cdots\cdots \text{若 } y \text{ 是连续的} \\ \sum_y yP_{y|x}(y \mid x) \cdots\cdots \text{若 } y \text{ 是离散的} \end{cases}$$

条件期望是 x 的函数。它具有以下几个简单而有用的性质：

(1) 迭代期望律 (*Law of Iterated Expectations, LIE*)

$$E[y] = E[E[y \mid x]]$$

即条件期望的期望等于无条件期望。

(2) $E[g(y)h(x) \mid y] = g(y)E[h(x) \mid y]$

(3) $E[g(y)h(x)] = E\{g(y)E[h(x) \mid y]\}$

这是因为 $E[g(y)h(x)] = E(E[g(y)h(x) \mid y]) = E\{g(y)E[h(x) \mid y]\}$

(4) $E[ax + by \mid z] = aE[x \mid z] + bE[y \mid z]$

或者更为一般的情形是：设 $a_1(\boldsymbol{x}), a_2(\boldsymbol{x}), \cdots, a_G(\boldsymbol{x})$ 和 $b(\boldsymbol{x})$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的标量函数，$y_1, y_2, \cdots, y_G$ 为随机变量，那么：

$$E\left(\sum_{j=1}^{G} a_j(\boldsymbol{x})y_j + b(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x}\right) = \sum_{j=1}^{G} a_j(\boldsymbol{x})E(y_j \mid \boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{x})$$

(5) 对于任何二元变量的分布

$$Cov(x,y) = Cov(x,E[y \mid x]) = \int_x (x - E(x))E[y \mid x]f_x(x)dx$$

从这个性质中，可以得到

$$E(u \mid x) = 0 \Rightarrow Cov(x,u) = 0$$

由此可以帮助我们理解线性回归中的两个古典假设，即强外生假定（在 x_i 给定的条件下，u_i 的条件均值为零）和弱外生假定（随机扰动项与解释变量不相关）。

有了条件期望的定义和性质后，我们给出条件方差的概念。

条件方差的定义为：

$$Var[y \mid x] = E[(y - E[y \mid x])^2 \mid x]$$

它的简化公式是：$Var(y \mid x) = E(y^2 \mid x) - (E[y \mid x])^2$

条件方差是分组条件下的集中程度的度量，或者分组条件下的差异程度的度量。而下面是它常用的性质：

(1) $Var((a(\boldsymbol{x})y + b(\boldsymbol{x})) \mid \boldsymbol{x}) = (a(\boldsymbol{x}))^2 Var(y \mid \boldsymbol{x})$

(2) 方差分解定理：

$$Var[y] = Var[E(y \mid x)] + E[Var(y \mid x)]$$

条件期望和条件方差是计量经济学的分析工具。传统的经典计量经济分析一般分为模型设定、参数估计、模型检验、模型应用四大步骤。而模型通常设定为多元线性回归模型

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i \qquad (i = 1,2,\cdots n)$$

其中：Y 为被解释变量，$X_2, \cdots X_k$，为 $k-1$ 个解释变量，u 为随机扰动项或随机误差项，$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_K$ 则是 k 个待估计的参数。上式可写为矩阵形式：

$$Y = X\beta + u \tag{2.1}$$

其中 $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, X_{n\times k} = \begin{pmatrix} 1 & X_{21} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & \cdots & X_{kn} \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$

为了得到参数的最优估计量,有以下的古典假定:

(1)$E(u \mid X) = 0$ （u_i 的条件均值为零）

(2)$Var(u \mid X) = \sigma^2 I$ （u_i 同方差,无自相关,或称球形扰动）

(3)$E(X'u) = 0$ （解释变量非随机,或若随机也与 u 不相关,亦称为外生性）

(4)$Rank(X'X) = k$ （满秩性条件,解释变量无共线性,这里 $k < n$）

(5)$u \sim N(0,\sigma^2 I)$ （扰动项的分布）

在这些条件下,当我们获取样本容量为 n 的观测数据后,首要的任务就是由样本的回归方程

$$Y = X\hat{\beta} + e \tag{2.2}$$

通过普通最小二乘估计法(OLS),得出未知参数 β 的估计量 $\hat{\beta}$。

上述古典假定的作用在于:

第一,零条件均值假定,也称强外生性。它可以保证估计量的无偏性。

第二,球形扰动是指随机扰动项的方差一协方差矩阵为同方差和无自相关同时成立时的情况。违反此假设条件,被称为非球形扰动,将会影响到参数估计的有效性。

第三,外生性条件,表示随机扰动项中不包含有解释变量的任何信息。外生性条件的违反将影响到参数估计的一致性。

第四,满秩性条件,是为了保证条件期望的唯一性,参数可求解。

第五,正态性条件,主要与统计检验和推断有关,但在大样本的条件下,根据中心极限定理这个条件是可以放宽的。

在后面的有关内容中,将逐渐放宽这些假设条件,从而对这些假定进行更深入的理解和认识。

第二节　线性回归模型估计方法及拓展

一、最小二乘估计法(*OLS*)

最小二乘估计法的基本原理是,寻求使残差(扰动项的估计)平方和

$e'e$ 达到最小的 $\hat{\beta}$,即:

$$mine'e = \min(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) = \min(Y'Y - 2\hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta})$$

于是 $$\frac{\partial e'e}{\partial \hat{\beta}} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$

有 $$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \tag{2.3}$$

这就是最小二乘法估计的结果。仅估计结果而言,古典假定很多没起作用,只需要 $X'X$ 满秩。但在满足相应古典假定下,OLS 估计量具有优良的统计性质,即 $\hat{\beta}$ 是 β 的最佳线性无偏估计(BLUE)。并且可以证明 $\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2(X'X)^{-1})$。

此外,随机扰动项的方差也可基于 $\hat{\beta}$ 而估计出来,即 $\hat{\sigma}^2 = e'e/n - k$ 是 σ^2 的一致最小方差无偏估计(UMVUE)(当 u 服从正态分布时,BLUE 与 UMVUE 重合。此外可以证明上述的 OLS 估计 $\hat{\beta}$ 和 σ^2 是完备的充分统计量)。

OLS 是计量经济分析中最基本、最常用且具有良好统计性质的估计方法。

二、极大似然估计法(ML)

OLS 就估计而言,不需要 $u \sim N(0, \sigma^2 I)$(只是在有关检验时,才由此引出 $\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2(X'X)^{-1})$)。而另一种重要而常用的估计方法则需要知道 u 或者说 Y 的分布。这就是极大似然估计法。

极大似然估计法的基本思想是:在一次观测中某一事件出现了,我们则认为此事件出现的可能性大。在概率统计中,密度函数 $p(x,\theta)$ 扮演了重要的角色。当 θ 已知时,$p(x,\theta)$ 显示概率密度函数怎样随 x 变化。而当有了样本数据 x 后,则可考虑对不同的 θ,概率密度如何变化。它反映了对 x 的解释能力,这便是似然。极大似然估计就是要寻找使这种可能性或似然达到最大的未知参数 θ。

就线性回归模型(2.1)及5条古典假定,我们有 $Y \sim N(X\beta, \sigma^2 I)$。在获取样本后的联合密度函数,也就是似然函数为(矩阵形式):

$$L(X, Y; \beta, \sigma) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{2\sigma^2}\right\}$$

取对数:

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{2\sigma^2}$$

于是 $$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = -\frac{1}{2\sigma^2}(-2X'Y + 2X'X\beta) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}(Y - X\beta)'(Y - X\beta) = 0$$

得到 $$\hat{\beta}_{ML} = (X'X)^{-1}X'Y \tag{2.4}$$

$$\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{1}{n}(Y - X\hat{\beta}_{ML})'(Y - X\hat{\beta}_{ML}) \tag{2.5}$$

可以看出$\hat{\beta}_{ML}$与 OLS 的$\hat{\beta}$相同。$\hat{\sigma}^2_{ML}$与 OLS 的$\hat{\sigma}^2$不同,$\hat{\sigma}^2_{ML}$是σ^2的有偏估计,但可以证明是一致估计量。

极大似然估计法是统计推断中的一种重要而又应用广泛的方法,但也有其局限性和不足。比如你需要某些随机因素的分布,而且有时计算量很大;再比如在估计均匀分布$U(0,\theta)$中的θ时,$\hat{\sigma}_{ML} = X_{(n)}$,而$X_{(n)}$不是一个好的估计,因为,如果以均方误差做标准,$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$一致优于$X_{(n)}$。另外,以上所说的只是有限信息极大似然估计,而与联立方程模型有关的完全信息极大似然估计则会遇到工作量大,自由度难以确定等困难,实际中应用较少。

相比之下,在线性回归模型的参数估计时,OLS 较 ML 更为优越常用,但对于非线性模型有时 ML 比 OLS 有用。

三、带约束条件的最小二乘估计(拉格朗日估计)

在计量经济分析中,通常是通过样本信息对未知参数进行估计。但有些时候可能会遇到非样本信息——对未知参数的约束限制(如生产函数中的规模报酬不变等)。在这种情况下,我们就可以采用拉格朗日估计法。

对于线性模型(2.1),若其参数β具有某种线性等式约束:

$$H\beta = 0 \tag{2.6}$$

其中 H 是 $m \times k$ 矩阵($m < k, rank(H) = m$),β 是 $k \times 1$ 向量。(2.6)式表明未知参数$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_k$之间的某些线性关系的信息。

现在的问题是,寻求满足(2.6)式又使$(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})$达到最小的估计量$\hat{\beta}_H$。为此,构造拉格朗日函数($\lambda$ 是 $m \times 1$ 的向量)。

$$L = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) + \lambda' H\hat{\beta} \tag{2.7}$$

于是 $$\frac{\partial L}{\partial \hat{\beta}_H} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta}_H + H'\hat{\lambda}_H = 0 \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\lambda}_H} = H\hat{\beta}_H = 0 \tag{2.9}$$

由(2.8)式可得 $$\hat{\beta}_H = \hat{\beta} - \frac{1}{2}(X'X)^{-1}H'\hat{\lambda}_H \tag{2.10}$$

(2.10)式的$\hat{\beta}$是 OLS 的估计量。两边再左乘 H,并结合(2.9)式有:

$$0 = H\hat{\beta}_H = H\hat{\beta} - \frac{1}{2}H(X'X)^{-1}H'\hat{\lambda}_H$$