

河南省普通高中新课程

高考复习 指导

HENANSHENG
PUTONGGAOZHONG
XINKECHENG
GAOKAOFUXI
ZHIDAO

河南省基础教育教学研究室 编

数学 (文)

SHUXUE

大象出版社

河南省普通高中新课程

高考复习 指导

HENANSHENG
PUTONGGAOZHONG
XINKECHENG
GAOKAOFUXI
ZHIDAO

河南省基础教育教学研究室 编

数学 (文)

SHUXUE

大象出版社

图书在版编目(CIP)数据

河南省普通高中新课程高考复习指导. 数学(文)/河南省基础教育教学
研究室编. —郑州: 大象出版社, 2010. 6
ISBN 978 - 7 - 5347 - 5885 - 0

I. ①河… II. ①河… III. ①数学课—高中—升学参考资料
IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 094924 号

本书编者

主 编: 张海营

副主编: 骆传枢 张海营 刘志凤 曹四清 李忠义 丁仲荐 张金领
胡家谷 赵小强 肖赵丽 陈 刚 孙士放

编 者: 骆传枢 张海营 刘志凤 曹四清 李忠义 丁仲荐 张金领
胡家谷 赵小强 肖赵丽 陈 刚 孙士放 王新峰 袁全超
芦国贤 姜 军 李海军 姚 强 戴叶辉 胡家谷 江振晓
王 艳 娄秀勤 陈 晓 刘红昌 杨要理 孙永前 谭欣欣
呼清旺 郭晓鹏

河南省普通高中新课程高考复习指导 数学(文)

河南省基础教育教学研究室 编

责任编辑 庞保军

文字编辑 庞保军

责任校对 李建平 马 宁 裴红燕 侯金芳 张迎娟

封面设计 刘 民

出 版 大象出版社 (郑州市经七路 25 号 邮政编码 450002)

网 址 www.daxiang.cn

发 行 河南省新华书店

印 刷 河南省瑞光印务股份有限公司

版 次 2010 年 6 月第 1 版 2010 年 6 月第 1 次印刷

开 本 890 × 1240 1/16

印 张 23

字 数 944 千字

定 价 37.00 元

若发现印、装质量问题,影响阅读,请与承印厂联系调换。

印厂地址 郑州市二环支路 35 号

邮政编码 450012

电话 (0371)63955319

编写说明

2011年，河南省将进行高中新课程后的首次高考。为了新课程实验在我省的顺利实施，为了更好地服务于河南考生，河南省基础教育教研室和大象出版社在深入调研、充分论证的基础上，组织开发了“河南省普通高中新课程高考复习指导”丛书。这套丛书将于2010年秋季开始在全省推广使用。

遵循推进课改、服务于河南考生的原则，由省内外教研专家和高中一线名师倾力打造的“河南省普通高中新课程高考复习指导”丛书具有以下特色：权威性——汇集省内外优秀教研专家组织编写，成书后又组织资深专家进行评审；针对性——瞄准高考，明确考试大纲的要求和高考命题规律，把握高考的脉动，提高复习的有效性；高效性——杜绝题海战术，精选经典习题，保证高质量、高效率的训练；适用性——丛书的训练内容分层设置，梯度合理，适合考生复习。

本丛书设置的主要栏目有：

考点点击 明确考试大纲，了解复习目标，指引复习方向。

知识梳理 使知识条理化、网络化，引领学生梳理总结所学知识，这些知识对新高考考点有较强的针对性。

要点突破 专家针对考纲中的考点，提炼解析重点、难点、易混点；通过典例分析，指导学生掌握解题技巧、方法、规律。

达标训练 通过经典习题训练，巩固考纲要求掌握的知识。

专题测试 通过综合性的训练，促进学生对本专题知识的全面掌握。

习题详解点拨 对习题提供详尽的答案和解题思路。

本套丛书包括语文、数学（文科、理科）、英语、物理、化学、历史、地理、生物、思想政治九个学科，共有十本书，按照考试大纲编写，适合各种版本教材使用。

祝考生梦想成真，开启人生灿烂的新篇章！

河南省基础教育教研室

目 录

CONTENTS

专题一 集合与常用逻辑用语

- 2 第1讲 集合及其基本运算
- 5 第2讲 命题和充要条件
- 10 第3讲 简单的逻辑联结词和量词
- 14 专题测试一

专题二 函数概念与基本初等函数 I

- 17 第1讲 函数的概念
- 22 第2讲 函数的性质
- 27 第3讲 指数和指数函数
- 30 第4讲 对数和对数函数
- 34 第5讲 幂函数
- 37 第6讲 函数与方程
- 40 第7讲 函数模型及其应用
- 46 专题测试二

专题三 不等式

- 50 第1讲 不等关系与不等式
- 53 第2讲 一元二次不等式及其解法
- 57 第3讲 二元一次不等式(组)与简单的线性规划
- 61 第4讲 基本不等式: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$
- 64 第5讲 推理与证明
- 69 专题测试三

专题四 基本初等函数 II

- 72 第1讲 任意角的三角函数、同角三角函数的关系式与诱导公式
- 76 第2讲 三角函数的图象与性质
- 81 第3讲 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象和性质
- 85 第4讲 两角的和、差公式和倍角公式
- 88 第5讲 解三角形
- 92 专题测试四

专题五 导数及其应用

- 95 第1讲 导数的概念及其基本运算
- 98 第2讲 导数的应用
- 103 专题测试五

专题六 数列

- 106 第1讲 数列的概念
110 第2讲 等差数列
114 第3讲 等比数列
118 第4讲 数列的综合应用
123 专题测试六

专题七 平面向量

- 127 第1讲 平面向量的概念及运算
132 第2讲 平面向量的数量积
135 第3讲 平面向量的应用
139 专题测试七

专题八 立体几何

- 142 第1讲 空间几何体和空间坐标系
147 第2讲 空间点、直线、平面之间的位置关系
152 第3讲 直线、平面平行的判定及其性质
157 第4讲 直线、平面垂直的判定及其性质
163 专题测试八

专题九 解析几何

- 167 第1讲 直线和方程
173 第2讲 圆与方程、直线与圆的位置关系
178 第3讲 椭圆
183 第4讲 双曲线
187 第5讲 抛物线
192 第6讲 直线与圆锥曲线的位置关系
198 专题测试九

专题十 概率

- 201 第1讲 事件与概率
205 第2讲 古典概型和几何概型
209 专题测试十

专题十一 统计

- 213 第1讲 随机抽样、总体估计和变量的相关性
218 第2讲 统计案例
223 专题测试十一

专题十二 算法、框图和复数

- 227 第1讲 算法、程序和基本语句
232 第2讲 算法案例和框图
236 第3讲 复数的概念及运算
239 专题测试十二

专题十三 几何证明选讲

- 242 第1讲 相似三角形的判定及有关性质
246 第2讲 直线与圆的位置关系及圆锥曲线性质探讨
251 专题测试十三

专题十四 坐标系与参数方程

- 253 第1讲 坐标系
258 第2讲 参数方程
263 专题测试十四

专题十五 不等式选讲

- 266 第1讲 不等式和绝对值不等式
270 第2讲 不等式的证明
273 第3讲 特殊不等式
275 第4讲 数学归纳法
279 专题测试十五

专题一 集合与常用逻辑用语

考点击

1. 集合

(1) 集合的含义与表示

- ①了解集合的含义、元素与集合的属于关系.
- ②能用自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题.

(2) 集合间的基本关系

- ①理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.
- ②在具体情境中,了解全集与空集的含义.

(3) 集合的基本运算

- ①理解两个集合的并集与交集的含义,会求两个简单集合的并集与交集.
- ②理解在给定集合中一个子集的补集的含义,会求给定子集的补集.
- ③能使用韦恩(Venn)图表达集合的关系及运算.

2. 常用逻辑用语

(1) 命题及其关系

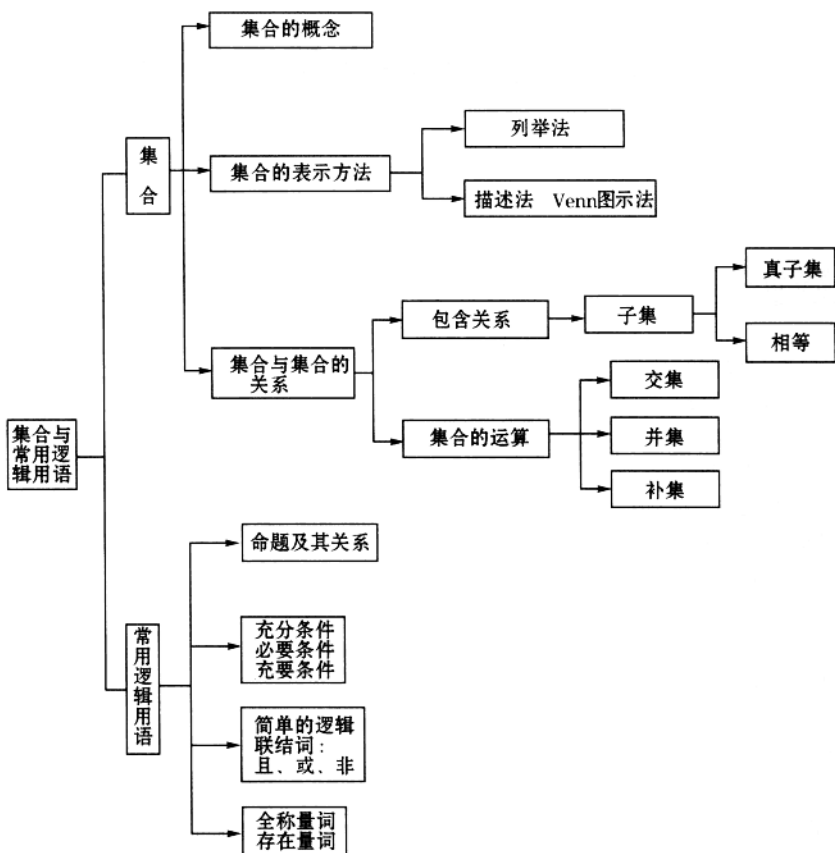
- ①理解命题的概念.
- ②了解“若 p ,则 q ”形式的命题及其逆命题、否命题与逆否命题,会分析四种命题的相互关系.
- ③理解必要条件、充分条件与充要条件的意义.

(2) 简单的逻辑联结词

了解逻辑联结词“且”、“或”、“非”的含义.

(3) 全称量词与存在量词

- ①理解全称量词与存在量词的意义.
- ②能对含有一个量词的命题进行否定.



第1讲 集合及其基本运算

知识梳理

1. 对于一个给定的集合,任何一个对象或者是这个集合的元素或者不是它的元素,称为集合中元素的_____ ; 相同的对象归入任何一个集合时,只能算这个集合的一个元素,称为集合中元素的_____ ; 在一个集合中,通常不考虑元素之间的顺序,称为集合中元素的_____ .

2. 请你用自然语言、列举法、描述法各举一例表示集合:

3. 如果两个集合 A, B 满足 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$, 则称 _____, 记作 $A = B$.

4. 如果两个集合 A, B 满足 $A \subseteq B$, 存在 _____, 我们称集合 A 是集合 B 的真子集.

5. 并集的性质:

(1) _____; (2) _____;

(3) _____; (4) _____.

交集的性质:

(1) _____; (2) _____;

(3) _____; (4) _____.

6. Venn 图表示集合 $A \cap B$ 如 _____、_____、_____、_____、_____、_____、_____、_____、_____、_____ ; Venn 图表示集合 $A \cup B$ 如 _____、_____、_____、_____、_____、_____、_____、_____、_____、_____.

7. 当一个集合有 n 个元素时,其子集个数为 _____, 真子集个数为 _____, 非空真子集个数为 _____.

要点突破

要点一 集合的概念、集合的元素性质的应用

正理解集合的概念必须掌握构成集合的两个要素:元素是具体的,其属性是确定的.在判定一些个体是否构成集合,或者说是不是集合的元素时,明确集合的元素的“互异性、确定性、无序性”是非常重要的.

典例 1 若 $-3 \in \{a-3, 2a-1, a^2-4\}$, 求实数 a 的取值.

【考点解析】 本题考查知识点:集合中元素的性质、元素与集合的属于关系、集合的概念及分类讨论数学思想.高考中常与解方程、求参数的范围等结合进行综合考查.易错点是忽视集合的元素性质的应用、分类讨论不全面,有遗漏.

【解】 $\because -3 \in \{a-3, 2a-1, a^2-4\}, \therefore -3 = a-3$ 或 $-3 = 2a-1$ 或 $-3 = a^2-4$.

若 $-3 = a-3$, 则 $a=0$, 集合为 $\{-3, -1, -4\}$, 符合题意.

若 $-3 = 2a-1$, 则 $a=-1$, 集合为 $\{-4, -3, -3\}$, 不符合集合元素的互异性, 故 $a=-1$ 舍去.

若 $-3 = a^2-4$, 则 $a=1$ 或 $a=-1$ (舍去), 集合为 $\{-2, 1, -3\}$, 符合题意.

综上知, $a=0$ 或 $a=1$.

【方法技巧】 本题重点考查集合元素的确定性、互异性, 利用确定性可解出所有可能的 a 值, 再根据互异性对集合进行检验, 这一点必须引起足够的重视. 解决此类题的方法是集合中元素的性质、分类讨论数学思想的应用.

变式训练 1

(1) 下面有四个命题:

①集合 N 中最小的数是 1; ②若 $-a$ 不属于 N , 则 a 属于 N ; ③若 $a \in N, b \in N$, 则 $a+b$ 的最小值为 2; ④ $x^2+1=2x$ 的解可表示为 $\{1, 1\}$.

其中正确命题的个数为 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

(2) 已知集合 $A = \left\{x \in N \mid \frac{8}{6-x} \in N\right\}$, 试用列举法表示集合 A .

要点二 集合间关系的应用

集合间的关系在高考中常以了解、理解的层次出现在容易题、中等题中. 理解集合之间的包含与相等的含义, 并能识别子集、真子集、集合相等是集合间关系的应用的基础.

典例 2 已知集合 $A = \{x \mid x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + 4x = 0\}$, 若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

【考点解析】 本题考查子集概念及集合间的包含关系、一元二次方程的根的讨论.

【解】 由 $x^2 + 4x = 0$ 得 $B = \{0, -4\}$, 由 $A \subseteq B$, 讨论如下:

(1) 若 $A = \emptyset$, 则 $\Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 1) < 0$, 得 $a < -1$.

(2) 若 $A \neq \emptyset$, 则 $A = \{0\}$ 或 $A = \{-4\}$ 或 $A = \{0, -4\}$.

当 $0 \in A$ 时, 得 $a = \pm 1$; 当 $-4 \in A$ 时, 得 $a = 1$ 或 $a = 7$, 但当 $a = 7$ 时, $A = \{-4, -12\}$, 不合题意. 故由 (1)(2) 得实数 a 的取值范围是 $|a| \leq -1$ 或 $a = 1$.

【方法技巧】 本题求解中, 要首先确定集合 B , 当集合 B 求出以后, 再对集合 A 的各种情况即对方程的根的情况进行讨论. 不能忽视 $A = \emptyset$, 即 A 中方程无根的情况; A 中只有一个元素, 即方程有相等的实数根, 如果不用判别式求出, 需进行检验.

变式训练 2

设集合 $A = \{x \mid -x^2 + x + 12 \geq 0\}$, 集合 $B = \{x \mid m-1 \leq x \leq 3m-2\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 m 的取值范围.

要点三 集合的基本运算的应用

集合中的交集、并集、补集是集合运算中的基本运算, 理解和掌握其基本知识和运算是集合的基本运算应用的关键. 同时应特别重视解决集合运算问题的两种通法, 即数轴分析法、Venn 图示法.

典例 3 (2009 · 全国) 设集合 $A = \{4, 5, 7, 9\}$, $B = \{3, 4, 7, 8, 9\}$, 全集 $U = A \cup B$, 则集合 $\complement_U(A \cap B)$ 中的元素共有

()

A. 3 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

【考点解析】 本题同时考查了集合的交集、并集、补集三种运算.

【答案】 $A \cup B = \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}$, $A \cap B = \{4, 7, 9\}$, 所以 $\complement_U(A \cap B) = \{3, 5, 8\}$. 故答案为 A.

【方法技巧】 用列举法或 Venn 图示法或用摩根律: $\complement_U(A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$.

变式训练 3

已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, 且 $(\complement_U A) \cap B = \{1, 9\}$, $A \cap B = \{2\}$, $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{4, 6, 8\}$, 求集合 A, B .

要点四 集合及集合的基本运算的综合应用

典例 4 已知集合 $A = \{x \mid -2 < x < -1 \text{ 或 } x > 0\}$, $B =$

$\{x|a \leq x \leq b\}$, 满足 $A \cap B = \{x|0 < x \leq 2\}$, $A \cup B = \{x|x > -2\}$, 求 a, b 的值.

【考点解析】 本题主要考查集合的交集、并集的定义和数集之间的运算及不等式的解法.

【解】 将集合 $A, A \cap B, A \cup B$ 分别在数轴上表示, 如图 1.1-1 所示.

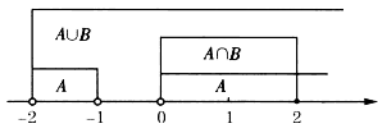


图 1.1-1

由 $A \cap B = \{x|0 < x \leq 2\}$, 知 $b = 2$ 且 $-1 \leq a \leq 0$; ①

由 $A \cup B = \{x|x > -2\}$, 知 $-2 < a \leq -1$; ②

综合①②知 $a = -1, b = 2$.

【方法技巧】 熟悉集合的交集与并集的含义, 掌握在数轴上表示集合的交集与并集的方法, 数形结合综合应用是解决此类题的关键.

变式训练 4

设全集为 U , 集合 A, B 满足 $A \subseteq B \subseteq U$, 则下列集合中, 一定为空集的是 ()

- A. $A \cap (\complement_U A)$ B. $B \cap (\complement_U A)$
C. $(\complement_U B) \cap (\complement_U A)$ D. $A \cap B$

典例 5

已知集合 $A = \{x|x^2 - 4x + 3 = 0\}$, $B = \{x|x^2 - 2(a-1)x + (a-1)^2 = 0\}$, $C = \{x|x^2 - mx + 1 = 0\}$, 且 $A \cup B = A, A \cap C = C$, 求 a, m 的值或取值范围.

【考点解析】 本题考查集合 A 与 B, A 与 C 之间的关系及对一元二次方程的根的分类讨论.

【解】 $A = \{1, 3\}, B = \{x|x[x - (a-1)]^2 = 0\}$.

$\therefore A \cup B = A, \therefore B \subseteq A. \therefore a-1 = 3$ 或 $a-1 = 1$.

$\therefore a = 4$ 或 $a = 2$.

$\therefore A \cap C = C, \therefore C \subseteq A$.

若 $C = \emptyset$, 则 $\Delta = m^2 - 4 < 0, \therefore -2 < m < 2$.

若 $1 \in C$, 则 $1^2 - m + 1 = 0, \therefore m = 2$, 此时 $C = \{1\}$, $A \cap C = C$.

若 $3 \in C$, 则 $9 - 3m + 1 = 0, \therefore m = \frac{10}{3}$, 此时 $C = \{3, \frac{1}{3}\} \not\subseteq A, \therefore m \neq \frac{10}{3}$.

综上所述, $a = 2$ 或 $a = 4, -2 < m \leq 2$.

【方法技巧】 先求出集合 A , 由 $A \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A$, 由 $A \cap C = C \Rightarrow C \subseteq A$, 然后根据方程根的情况分类讨论.

变式训练 5

已知集合 $A = \{x|x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}, B = \{x|x^2 - 5x +$

$6 = 0\}, C = \{x|x^2 + 2x - 8 = 0\}$, a 取何值时, $A \cap B \neq \emptyset$ 与 $A \cap C = \emptyset$ 同时成立?

达标训练

A 级

一、选择题

1. 有下列四组对象, 能构成集合的是 ()

- A. 中国有名的大学 B. 中国的著名科学家
C. 中国的小河流 D. 中国的四大发明

2. (2010 · 广东) 若集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 4\}$, 则集合 $A \cup B$ 等于 ()

- A. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ B. $\{1, 2, 3, 4\}$
C. $\{1, 2\}$ D. $\{0\}$

3. 设集合 $A = \{x|-2 \leq x \leq 2\}, B = \{x|x \leq -1$ 或 $x > 3\}$, 则 $A \cup B$ 等于 ()

- A. $\{x|-2 \leq x \leq 3\}$ B. $\{x|x \leq 3\}$
C. $\{x|x \leq -2$ 或 $x > 3\}$ D. $\{x|x \leq 2$ 或 $x > 3\}$

4. 已知全集 $U = \{x|x \geq -1\}, A = \{x|-1 < x \leq 2\}$, 则 $\complement_U A$ 等于 ()

- A. $\{x|x < -1$ 或 $x \geq 2\}$ B. $\{x|x \leq -1$ 或 $x > 2\}$
C. $\{-1\} \cup \{x|x > 2\}$ D. $\{x|x > 2\}$

5. 满足 $M \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$ 的集合 M 的个数是 ()

- A. 2 B. 4
C. 8 D. 16

6. 已知集合 $M = \{x|x^2 - px + 15 = 0\}, N = \{x|x^2 - 5x + q = 0\}$, 若 $M \cap N = \{2, 3, 5\}$, 则有 ()

- A. $M = \{2, 3\}, N = \{3, 5\}$ B. $M = \{3, 5\}, N = \{2, 3\}$
C. $M = \{2, 5\}, N = \{3, 5\}$ D. $M = \{3, 5\}, N = \{2, 5\}$

7. 已知全集 $U = A \cup B$ 中有 m 个元素, $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$ 中有 n 个元素. 若 $A \cap B$ 非空, 则 $A \cap B$ 的元素个数为 ()

- A. mn B. $m + n$
C. $n - m$ D. $m - n$

8. 已知集合 $A = \{0, 1\}, B = \{y|x^2 + y^2 = 1, x \in A\}$, 则 A 与 B 的关系是 ()

- A. $A \supseteq B$ B. $B \subsetneq A$
C. $A = B$ D. $A \subseteq B$

二、填空题

9. 设 $A = \{x|2x^2 - px + q = 0\}, B = \{x|6x^2 + (p+2)x + 5 + q = 0\}$, 若 $A \cap B = \{\frac{1}{2}\}$, 则 $A \cup B =$ _____.

10. 满足 $\{a, b\} \cup B = \{a, b, c\}$ 的集合 B 的个数是 _____.

11. 集合 $\{x, 3, x^2 - 2x\}$ 中, x 应满足的条件是_____.

12. 已知 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 = 0\}$, $B = \{x | ax - 1 = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 则 a 的值为_____.

三、解答题

13. 已知集合 $A = \{x | x^2 + (2-a)x + 1 = 0\}$, 若 $A \subseteq \text{正实数}$, 求实数 a 的取值范围.

14. 已知集合 $B = \{x | ax^2 - 3x + 2 = 0, a \in \mathbf{R}\}$, 若 B 中元素至多只有一个, 求实数 a 的取值范围.

B 级

1. 设 $A = \{x | x \text{ 是斜三角形}\}$, $B = \{x | x \text{ 是锐角三角形}\}$, 则 $\complement_A B$ 等于 ()

- A. $\{x | x \text{ 是锐角三角形}\}$ B. $\{x | x \text{ 是钝角三角形}\}$
C. $\{x | x \text{ 是直角三角形}\}$ D. $\{x | x \text{ 是等腰三角形}\}$

2. 已知全集 $U = P \cup Q = \{x \in \mathbf{N} | x \leq 6\}$, $P \cap (\complement_U Q) = \{1, 3, 5\}$, 则集合 Q 是 ()

- A. $\{2, 4\}$ B. $\{0, 2, 4\}$
C. $\{2, 4, 6\}$ D. $\{0, 2, 4, 6\}$

3. 已知集合 A, B 均为全集 U 的子集, 且 $A \subseteq B$, 则以下结论正确的是 ()

- A. $A \cup (\complement_U B) = U$ B. $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) = U$
C. $A \cap (\complement_U B) = \emptyset$ D. $B \cap (\complement_U A) = \emptyset$

4. 若集合 $A = \{x | x > 0\}$, $B = \{-2, -1, 1, 2\}$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $A \cap B = \{-2, -1\}$ B. $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cup B = \{x | x < 0\}$
C. $A \cup B = \{x | x > 0\}$ D. $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \{-2, -1\}$

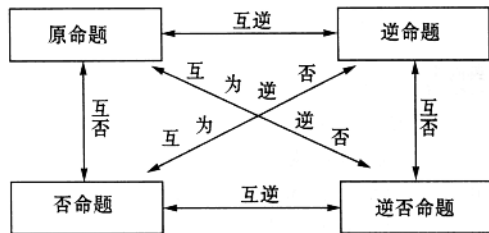
5. 已知全集 $U = \{x | x \text{ 是不大于 30 的质数}\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{5, 13, 23\}$, $B \cap (\complement_U A) = \{11, 19, 29\}$, $(\complement_U B) \cap (\complement_U A) =$

$\{3, 7\}$, 求集合 A, B .

第2讲 命题和充要条件

知识梳理

- _____ 叫做命题.
- 如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的 _____ 和 _____, 那么这两个命题叫做互逆命题; 如果一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的 _____ 和 _____, 那么这两个命题叫做互否命题.
- 原命题: 若 p , 则 q ;
逆命题: 若 _____, 则 _____;
否命题: 若 _____, 则 _____;
逆否命题: 若 _____, 则 _____.
- 四种命题之间的关系:



由于逆命题和否命题也是互为逆否命题, 因此四种命题的真假性之间的关系如下:

- _____;
- _____.

5. 如果由命题的条件 p 通过推理一定可以得出命题的结论 q , 那么这样的命题叫做 _____; 如果由命题的条件 p 通过推理不一定可以得出命题的结论 q , 那么这样的命题叫做 _____.

6. 定义: 如果命题“若 p , 则 q ”为真命题, 即 $p \Rightarrow q$, 那么我们就说 _____ 是 _____ 的充分条件; _____ 是 _____ 的必要条件.

7. 一般地, 如果 $p \Rightarrow q$, 又有 $q \Rightarrow p$, 就记作 $p \Leftrightarrow q$, 称 p 是 q 的充分必要条件, 简称充要条件. 如果 p 是 q 的充要条件, 那

么 q 是 p 的_____.

概括地说,如果 $p \Leftrightarrow q$,那么 p 与 q 互为_____.

8. 一般地,若 $p \Rightarrow q$,但 $q \not\Rightarrow p$,则称_____ ;若 $p \not\Rightarrow q$,但 $q \Rightarrow p$,则称_____ ;若 $p \not\Rightarrow q$,且 $q \not\Rightarrow p$,则称_____.

9. 反证法的步骤:

(1) _____.

(2) _____.

(3) _____.

10. 反证法中引出矛盾的四种常见形式:

(1) _____.

(2) _____.

(3) _____.

(4) _____.

11. 若 $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C$,则 A _____ C ;若 $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$,则 A _____ B ;若 $A \Leftrightarrow B, B \Leftrightarrow C$,则 A _____ C .

12. 判断充要条件的主要方法有_____、_____、_____和_____.

要点突破

要点一 命题及其关系

学习命题,关键要理解命题、真命题、假命题及原命题、逆命题、否命题、逆否命题的概念,清楚命题的构成,掌握四种命题的关系,掌握反证法.

典例 1 (2009·重庆)命题“若一个数是负数,则它的平方是正数”的逆命题是 ()

- A. 若一个数是负数,则它的平方不是正数
- B. 若一个数的平方是正数,则它是负数
- C. 若一个数不是负数,则它的平方不是正数
- D. 若一个数的平方不是正数,则它不是负数

【考点解析】 本题考查原命题、逆命题、否命题、逆否命题的概念,及学生的阅读与分析能力.常出现在高考数学试卷中,侧重涉及某些数学问题的正确推理.

【答案】 逆命题为“若一个数的平方是正数,则它是负数”,故答案为 B.

【方法技巧】 此考点常见两大题型:一是写出逆命题、否命题,并对其真假进行判断;二是利用互为逆否命题的等价性来解决问题.

变式训练 1

在下列命题中,真命题是 ()

A. 命题“若 $ac > bc$,则 $a > b$ ”

B. 命题“若 $b = 3$,则 $b^2 = 9$ ”的逆命题

C. 命题“当 $x = 2$ 时, $x^2 - 3x + 2 = 0$ ”的否命题

D. 命题“相似三角形的对应角相等”的逆否命题

典例 2 证明:对任意非正数 c ,若 $a \leq b + c$ 成立,则 $a \leq b$.

【考点解析】 证明一个命题为真命题,首先要弄清命题的结构,然后依据条件和定理进行推理证明.特别是要证明原命题为真命题时,可以考虑证明它的逆否命题为真命题.

【证明】 “对任意非正数 c ,若 $a \leq b + c$ 成立,则 $a \leq b$ ”的逆否命题是“对任意非正数 c ,若 $a > b$,则 $a > b + c$ ”.而若 $a > b$,由 $c \leq 0$,知 $b \geq b + c$,所以 $a > b + c$.所以原命题的逆否命题为真,从而原命题为真命题.即“对任意非正数 c ,若有 $a \leq b + c$ 成立,则 $a \leq b$ ”为真命题.

【方法技巧】 在证明时,一定要正确写出已知命题的逆否命题.

变式训练 2

证明:已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数, $a, b \in \mathbb{R}$,若 $f(a) + f(b) \geq f(-a) + f(-b)$,则 $a + b \geq 0$.

典例 3 用反证法证明:钝角三角形最大边上的中线小于该边长的一半.

【考点解析】 考查反证法的应用.依据题意,写出已知、求证,再用反证法,即否定结论,把假设和已知条件结合起来去推出矛盾.

已知:如图 1.2-1,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A > 90^\circ$, D 是 BC 边上的中点,求证: $AD < \frac{1}{2}BC$.

【证明】 假设 $AD \geq \frac{1}{2}BC$. (1) 若 $AD = \frac{1}{2}BC$,由平面几何中定理“三角形一边上的中线等于该边长的一半,那么,这条边所对的角为直角”知, $\angle A = 90^\circ$,与题设矛盾.所以, $AD \neq \frac{1}{2}BC$. (2) 若 $AD > \frac{1}{2}BC$,因为 $BD = DC = \frac{1}{2}BC$,所以在 $\triangle ABD$ 中, $AD > BD$,从而 $\angle B > \angle BAD$,同理 $\angle C > \angle CAD$.所以, $\angle B + \angle C > \angle BAD + \angle CAD$,即 $\angle B + \angle C > \angle A$.因为 $\angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A$,所以 $180^\circ - \angle A > \angle A$,则 $\angle A < 90^\circ$,与题设矛盾.由(1)(2)知 $AD < \frac{1}{2}BC$.

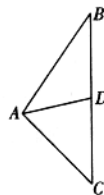


图 1.2-1

【方法技巧】正确地作出反设(即否定结论)是正确运用反证法的前提,要注意一些常用的“结论否定形式”.另外,需注意作出的反设必须包括与结论相反的所有情况,也只有证明了与结论相反的所有情况都不成立,才能保证原来的结论一定成立.

变式训练 3

求证:如果一个三角形的两条边不相等,那么这两条边所对的角也不相等.

要点二 充分条件、必要条件、充要条件的含义及判定

若 $A \Rightarrow B$ (即由 A 成立可得 B 成立), 则称 A 是 B 的充分条件或称 B 是 A 的必要条件(即若 B 不成立, 则 A 一定不成立);

若 $A \Leftrightarrow B$, 则称 A 是 B 的充要条件, 也称 B 是 A 的充要条件.

A 和 B 的条件关系有四类:

(1) A 是 B 的充分不必要条件($A \Rightarrow B$, 且 $B \not\Rightarrow A$);

(2) A 是 B 的必要不充分条件($A \not\Rightarrow B$, 且 $B \Rightarrow A$);

(3) A 是 B 的充要条件($A \Rightarrow B$, 且 $B \Rightarrow A$);

(4) A 既不是 B 的充分条件也不是 B 的必要条件($A \not\Rightarrow B$, 且 $B \not\Rightarrow A$).

同时注意充分条件的传递性, 若 $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, C \Rightarrow D$, 则 $A \Rightarrow D$, 利用这一结论即“推理法”可研究多个命题之间的关系.

证明 A 是 B 的充要条件, 既要证明命题“ $A \Rightarrow B$ ”为真, 又要证明命题“ $B \Rightarrow A$ ”为真, 前者证明的是充分性, 后者证明的是必要性.

典例 4

已知 p, q 都是 r 的必要条件, s 是 r 的充分条件, q 是 s 的充分条件, 那么, (1) s 是 q 的什么条件? (2) r 是 q 的什么条件? (3) p 是 q 的什么条件?

【考点解析】此题主要考查对充分条件、必要条件、充要条件含义的理解及对推理法的掌握情况.

【解】由图 1.2-2 知, (1) $\because q \Rightarrow s, s \Rightarrow r \Rightarrow p, \therefore q \Rightarrow p$, 即 q 是 p 的充分条件.

(2) $\because r \Rightarrow q, q \Rightarrow s \Rightarrow r, \therefore r$ 是 q 的充要条件.

(3) $\because q \Rightarrow s \Rightarrow r \Rightarrow p, \therefore p$ 是 q 的必要条件.

【方法技巧】“ $\Rightarrow$ ”图在解决较多个条件的问题时经常用到, 推理法是理解充分条件、必要条件、充要条件的重要方法. 如本题将已知 r, p, q, s 的关系作一个“ $\Rightarrow$ ”图, 使得 $r, p, q,$

s 的关系非常明了, 便于正确解决问题.

变式训练 4

已知 p 是 q 的充分条件, q 是 r 的必要条件, q 是 s 的充分条件, r 是 s 的必要条件, 那么, (1) p 是 r 的什么条件? (2) s 是 q 的什么条件? (3) r, p, q, s 中哪几对互为充要条件?

典例 5

已知甲: $x \neq 1$ 且 $y \neq 21$, 乙: $x + y \neq 22$, 则甲是乙的什么条件?

【考点解析】此题考查命题及充分条件、必要条件、充要条件的综合运用.

【答案】非甲: $x = 1$ 或 $y = 21$; 非乙: $x + y = 22$. 非甲 $\Rightarrow$ 非乙, 非乙 $\Rightarrow$ 非甲.

$\therefore$ 甲 $\Rightarrow$ 乙, 乙 $\Rightarrow$ 甲, 即甲是乙的既不充分也不必要条件.

【方法技巧】互为逆否命题的等价性, 可用来判断充要条件.

变式训练 5

若命题“若 p , 则 q ”为真, 则 ()

A. $q \Rightarrow p$ B. $\neg p \Rightarrow \neg q$

C. $\neg q \Rightarrow \neg p$ D. $\neg q \Rightarrow p$

典例 6

若 $p: x\sqrt{3-2x} = x^2, q: 3-2x = x^2$, 则 p 是 q 的 ()

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【考点解析】本题考查命题、方程的解法和解集、充要条件等.

【答案】方程 $3-2x = x^2$, 即 $x^2 + 2x - 3 = 0$ 的解集为 $\{x | x = 1 \text{ 或 } x = -3\}$.

$$\begin{aligned} \text{方程 } x\sqrt{3-2x} = x^2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ 3-2x \geq 0, \\ x^2(3-2x) = x^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq \frac{3}{2}, \\ x^2(x^2+2x-3) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ 或 } x = 1. \end{aligned}$$

所以, 方程 $x\sqrt{3-2x} = x^2$ 的解集为 $\{x | x = 0 \text{ 或 } x = 1\}$, 即答案为 D.

【方法技巧】从集合的角度分析 p 与 q 的逻辑关系, 直观简明, 是判定充要条件的一种好方法.

图 1.2-2

变式训练 6

“ $a > 1$ ”是“ $\frac{1}{a} < 1$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

要点三 充分条件、必要条件、充要条件在高考中的应用

高考要求:理解充分条件、必要条件、充要条件的含义,并掌握它们的判定和综合运用.

典例 7

(2008·安徽)下列选项中, p 是 q 的必要不充分条件的是 ()

- A. $p: a+c > b+d, q: a > b$, 且 $c > d$
B. $p: a > 1, b > 1, q: f(x) = a^x - b (a > 0$, 且 $a \neq 1)$ 的图象不过第二象限
C. $p: x = 1, q: x^2 = 1$
D. $p: a > 1, q: f(x) = \log_a x (a > 0$, 且 $a \neq 1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数

【考点解析】本题侧重考查充分条件、必要条件、充要条件、必要不充分条件、充分不必要条件的判定,同时考查了不等式的性质以及指数函数、对数函数的图象与性质.

【答案】选项 A 中,由 $a > b$ 且 $c > d$,得 $a+c > b+d$,而 $a+c > b+d \nRightarrow a > b$,且 $c > d$,所以选项 A 正确. 选项 B 中, $p \Leftrightarrow q$,所以, p 是 q 的充要条件. 选项 C 中, $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$,从而 $p \Rightarrow q$,且 $q \nRightarrow p$,所以, p 是 q 的充分不必要条件. 选项 D 中, $p \Leftrightarrow q$,所以, p 是 q 的充要条件. 综上选 A.

【方法技巧】在解答此题时,考生有充分的把握选择 A 选项,则可避免后面三个选项的研究,为高考答题赢得时间.

变式训练 7

(2010·山东)设 $\{a_n\}$ 是等比数列,则“ $a_1 < a_2 < a_3$ ”是“数列 $\{a_n\}$ 是递增数列”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

典例 8

(2008·福建)设 m, n 是平面 α 内的两条不同直线, l_1, l_2 是平面 β 内的两条相交直线,则 $\alpha \parallel \beta$ 的一个充分不必要条件是 ()

- A. $m \parallel \beta$, 且 $l_1 \parallel \alpha$ B. $m \parallel l_1$, 且 $n \parallel l_2$
C. $m \parallel \beta$, 且 $n \parallel \beta$ D. $m \parallel \beta$, 且 $n \parallel l_2$

【考点解析】本题考查立体几何中点、线、面的位置关系

及充分不必要条件等知识点. 以点、线、面为切入点,通过充分不必要条件的寻找,使试题呈现出一种开放性,能较为全面地考查学生的基础知识和思维能力.

【答案】要得到 $\alpha \parallel \beta$, 必须是其中一个平面内的两条相交直线分别与另外一个平面平行,而两个平面平行,则一个平面内的任一条直线必平行于另一个平面. 对于选项 A,不是同一平面的两条直线,显然既不充分又不必要;对于选项 B,由于 l_1, l_2 是平面 β 内两条相交的直线,而且,由于 $m \parallel l_1$, 且 $n \parallel l_2$, 故可得 $\alpha \parallel \beta$, 充分性成立,而 $\alpha \parallel \beta$ 不一定能得到 $m \parallel l_1$, 它们可以异面,故必要性不成立. 对于选项 C,由于 m, n 不一定相交,故是必要不充分条件;对于选项 D,可转化为选项 C,故不符合题意. 综上所述答案为 B.

【方法技巧】注意数学三种语言的结合,掌握立体几何中点、线、面的位置关系和充分不必要条件的推理方法.

变式训练 8

设 a, b 是两条直线, α, β 是两个平面,则 $a \perp b$ 的一个充分条件是 ()

- A. $a \perp \alpha, b \parallel \beta, \alpha \perp \beta$ B. $a \perp \alpha, b \perp \beta, \alpha \parallel \beta$
C. $a \subset \alpha, b \perp \beta, \alpha \parallel \beta$ D. $a \subset \alpha, b \parallel \beta, \alpha \perp \beta$

达标训练

A 级

一、选择题

1. 下列命题中属于真命题的是 ()

- A. 若 $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$, 则 $x = y$ B. 若 $x^2 = 1$, 则 $x = 1$
C. 若 $x = y$, 则 $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ D. 若 $x < y$, 则 $x^2 < y^2$

2. 命题“若函数 $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 在其定义域内是减函数, 则 $\log_a 2 < 0$ ”的逆否命题是 ()

- A. 若 $\log_a 2 < 0$, 则函数 $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 在其定义域内不是减函数
B. 若 $\log_a 2 \geq 0$, 则函数 $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 在其定义域内不是减函数
C. 若 $\log_a 2 < 0$, 则函数 $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 在其定义域内是减函数
D. 若 $\log_a 2 \geq 0$, 则函数 $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 在其定义域内是减函数

3. 给出命题:若函数 $y = f(x)$ 是幂函数, 则函数 $y = f(x)$ 的图象不过第四象限. 在它的逆命题、否命题、逆否命题三个命题中, 真命题的个数是 ()

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

4. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $A > B$ ”是“ $\cos A < \cos B$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 与直线 $y = kx + 2$ 没有公共点的充要条件是 ()

- A. $k \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
B. $k \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
C. $k \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
D. $k \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

6. 已知直线 $l \perp$ 平面 α , 直线 $m \subset$ 平面 β , 下列四个命题中是真命题的是 ()

① $\alpha // \beta \Rightarrow l \perp m$; ② $\alpha \perp \beta \Rightarrow l // m$; ③ $l // m \Rightarrow \alpha \perp \beta$; ④ $l \perp m \Rightarrow \alpha // \beta$.

- A. ①② B. ③④
C. ②④ D. ①③

7. “ $m > n > 0$ ”是“方程 $mx^2 + ny^2 = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆”的 ()

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

8. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $A > 30^\circ$ ”是“ $\sin A > \frac{1}{2}$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

9. A: 两曲线 $F(x, y) = 0$ 和 $G(x, y) = 0$ 相交于点 $P(x_0, y_0)$, B: 曲线 $F(x, y) + \lambda G(x, y) = 0$ (λ 为常数) 过点 $P(x_0, y_0)$, 则 A 是 B 的 _____ 条件.

10. 下列四个命题:

- ① “ $a > b$ ”是“ $2^a > 2^b$ ”成立的充要条件;
② “ $a = b$ ”是“ $\lg a = \lg b$ ”成立的充分不必要条件;
③ 函数 $f(x) = ax^2 + bx$ ($x \in \mathbf{R}$) 为奇函数的充要条件是

“ $a = 0$ ”;

④ 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y = f(x)$ 是偶函数的必要条件是“ $\frac{f(-x)}{f(x)} = 1$ ”.

其中真命题的序号是 _____. (把真命题的序号都填上)

11. 已知集合 $A = \{x | x > 5\}$, 集合 $B = \{x | x > a\}$, 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分不必要条件, 则实数 a 的取值范围是 _____.

12. 已知 p : 关于 x 的不等式 $x^2 + 2ax - a > 0$ 的解集是 $\mathbf{R}$, q : $-1 < a < 0$, 则 p 是 q 的 _____ 条件.

三、解答题

13. 设 A 是 C 的充分不必要条件, B 是 C 的充分条件, D 是 C 的必要条件, D 是 B 的充分条件, 问: (1) A 是 B 的什么条件? (2) D 是 A 的什么条件? (3) A, B, C, D 中哪些互为充要条件?

14. 已知 $p: \left| 1 - \frac{x-1}{3} \right| \leq 2, q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0$ ($m >$

0), 且 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件, 求实数 m 的取值范围.

15. 用反证法证明: 如果 $a > b > 0$, 那么 $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

B 级

1. 给定下列四个命题:

①若一个平面内的两条直线与另一个平面都平行,那么这两个平面相互平行;

②若一个平面经过另一个平面的一条垂线,那么这两个平面相互垂直;

③垂直于同一直线的两条直线相互平行;

④若两个平面垂直,那么一个平面内与它们的交线不垂直的直线与另一个平面也不垂直.

其中,为真命题的是 ()

- A. ①② B. ②③
C. ③④ D. ②④

2. 命题“若 $a > b$, 则 $a - 1 > b - 1$ ”的否命题是 ()

- A. 若 $a > b$, 则 $a - 1 \leq b - 1$
B. 若 $a \geq b$, 则 $a - 1 < b - 1$
C. 若 $a \leq b$, 则 $a - 1 \leq b - 1$
D. 若 $a < b$, 则 $a - 1 < b - 1$

3. “ $x > 0$ ”是“ $x \neq 0$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 如果 A 是 B 的充分条件,那么 $\neg A$ 是 $\neg B$ 的 _____ 条件, $\neg B$ 是 $\neg A$ 的 _____ 条件;如果 A 是 B 的必要不充分条件, B 是 C 的充分必要条件, D 是 C 的充分不必要条件,那么 A 是 D 的 _____ 条件.

5. 已知 x, y 是非零实数,且 $x > y$,求证: $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ 的充要条件是 $xy > 0$.

称量词. 常见的全称量词还有“_____”、“_____”、“_____”、“_____”等.

4. _____ 叫做全称命题.

5. 短语“_____”、“_____”在逻辑中通常叫做存在量词. 常见的存在量词还有“_____”、“_____”、“_____”、“_____”等.

6. _____ 叫做特称命题.

7. 全称命题 $p: \forall x \in M, p(x)$ 的否定 $\neg p$: _____; 全称命题的否定是 _____ 命题.

8. 特称命题 $p: \exists x_0 \in M, p(x_0)$ 的否定 $\neg p$: _____; 特称命题的否定是 _____ 命题.

要点突破

要点一 简单的逻辑联结词及逻辑联结词构成的命题的真假判定

在重点研究逻辑联结词“且”、“或”、“非”构成的命题时,了解逻辑联结词的准确含义是高考考纲的要求,要弄清命题的准确构成形式,特别是逻辑中的“且”、“或”、“非”与日常用语中的“且”、“或”、“非”的意义不全相同.“且”、“或”、“非”构成的命题的真值表如下:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
真	真	真	真
真	假	假	真
假	真	假	真
假	假	假	假

p	$\neg p$
真	假
假	真

判定逻辑联结词“且”、“或”、“非”构成的命题的真假,主要利用真值表来判断,其步骤为:(1)确定逻辑联结词“且”、“或”、“非”构成的命题的构成形式;(2)判断其中各命题的真假;(3)利用真值表判断逻辑联结词“且”、“或”、“非”构成的命题的真假.

典例 1 指出下列命题的真假.

- (1) -1 是偶数或奇数;
(2) $\sqrt{2}$ 属于集合 $\mathbf{Q}$, 也属于集合 $\mathbf{R}$;
(3) $A \subseteq (A \cup B)$.

【考点解析】考查逻辑联结词“且”、“或”、“非”构成的命

第 3 讲 简单的逻辑联结词和量词

知识梳理

1. _____ 叫做逻辑联结词.
2. 由逻辑联结词构成的命题的表达形式: 且: p _____
 q ; 或: p _____ q ; 非: $\neg p$.
3. 短语“_____”、“_____”在逻辑中通常叫做全