课标本

教材完全解读

王后雄学案

总策划：熊 辉

高中数学 必修4

丛书主编：王后雄
本册主编：郑晓玲

小熊图书

接力出版社 Jieli Publishing House
全国优秀出版社

中国教辅十年畅销品牌　推动学习模式全面升级

《教材完全解读》6大奇迹引发学、考革命

国际首创：讲、例、练三位一体对照技术，颠覆传统资料的低效辅导模式！

同步突破：学习重点、疑点、盲点三级递进突破，扫清考试思维盲区！

考向指引：统计5年学科考点频度，精准揭示考试命题规律和命题形式！

典例导思：十年磨砺凝聚名师独创解题思维模板，激活学生解题思维！

考试工具：考试研究专家亲授模式解题技法，教您破题和考场得分秘技！

核心预测：深度揭示从常规题到考试题的变式过程，让您拥有制胜法宝！

教材完全解读·高中课标本 丛书目录

必修1	必修2	必修3	必修4	必修5
语文（人教版）	语文（人教版）	语文（人教版）	语文（人教版）	语文（人教版）
语文（粤教版）	语文（粤教版）	语文（粤教版）	语文（粤教版）	语文（粤教版）
语文（鲁人版）	语文（鲁人版）	语文（鲁人版）	语文（鲁人版）	语文（鲁人版）
语文（苏教版）	语文（苏教版）	语文（苏教版）	语文（苏教版）	语文（苏教版）
语文（语文版）	语文（语文版）	语文（语文版）	语文（语文版）	语文（语文版）
语文（北京版）	语文（北京版）	语文（北京版）	语文（北京版）	语文（北京版）
数学（人教A版）	数学（人教A版）	数学（人教A版）	数学（人教A版）	数学（人教A版）
数学（人教B版）	数学（人教B版）	数学（人教B版）	数学（人教B版）	数学（人教B版）
数学（苏教版）	数学（苏教版）	数学（苏教版）	数学（苏教版）	数学（苏教版）
数学（北师大版）	数学（北师大版）	数学（北师大版）	数学（北师大版）	数学（北师大版）
英语（人教版）	英语（人教版）	英语（人教版）	英语（人教版）	英语（人教版）
英语（外研版）	英语（外研版）	英语（外研版）	英语（译林牛津版）	英语（译林牛津版）
英语（译林牛津版）	英语（译林牛津版）	英语（译林牛津版）	英语（外研版）	英语（外研版）
英语（北师大版）	英语（北师大版）	英语（北师大版）	英语（北师大版）	英语（北师大版）
物理（人教版）	物理（人教版）	生物（人教版）	政治（人教版）	
物理（粤教版）	物理（粤教版）	生物（苏教版）		
物理（鲁科版）	物理（鲁科版）	生物（浙科版）		
物理（教科版）	物理（教科版）	政治（人教版）		
物理（沪科版）	物理（沪科版）	历史（人教版）		
化学（人教版）	化学（人教版）	历史（人民版）		
化学（苏教版）	化学（苏教版）	历史（岳麓版）		
化学（鲁科版）	化学（鲁科版）	地理（人教版）		
生物（人教版）	生物（人教版）	地理（鲁教版）		
生物（苏教版）	生物（苏教版）	地理（湘教版）		
生物（浙科版）	生物（浙科版）	地理（中图版）		
政治（人教版）	政治（人教版）			
历史（人教版）	历史（人教版）			
历史（人民版）	历史（人民版）			
历史（岳麓版）	历史（岳麓版）			
地理（人教版）	地理（人教版）			
地理（鲁教版）	地理（鲁教版）			
地理（湘教版）	地理（湘教版）			
地理（中图版）	地理（中图版）			

ISBN 978-7-80732-623-6
03>
9 787807 326236
ISBN 978-7-80732-623-6
定　价:22.30元

课标本

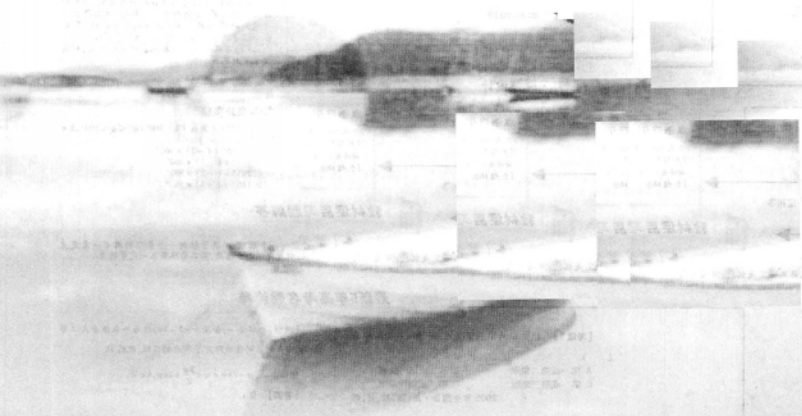
教材完全解读

王后雄学案

高中数学　必修4

配人教A版

丛书主编：王后雄
本册主编：郑晓玲
编　　委：马春华　章雄钢
周建国　左建华
吴海林　杨海林
秦　俭　李　进
马　玥　姚火生
王与雄　黄光文
张　莹　张新平
肖建章　王新佑



小熊图书
接力出版社 Jieli Publishing House　全国优秀出版社

总 策 划：熊　辉
责任编辑：李朝晖
责任校对：潘　曼
封面设计：木头羊

JIAOCAI WANQUAN JIEDU
GAOZHONG SHUXUE

教材完全解读

高中数学 必修4　配人教A版

丛书主编：王后雄　本册主编：郑晓玲

*

社　长：黄　俭　总编辑：白　冰

接力出版社出版发行

广西南宁市园湖南路9号　邮编：530022

E-mail：jielipub@public.nn.gx.cn

孝感市三环印务有限责任公司印刷　全国新华书店经销

*

开本：889毫米×1194毫米　1/16　印张：13　字数：347千

2009年9月第4版　2010年9月第5次印刷

ISBN 978-7-80732-623-6

定价：22.30元

教材完全解读

本书特点

基础教育新课标改革已如火如荼地展开，新课程教材助学助考的开发问题已成为人们关注的焦点。应广大读者的要求，我们特邀来自国家新课程改革试验区和国家级培训班的专家编写课标版《教材完全解读》丛书。该系列丛书能帮助学生掌握新的课程标准，让学生能够按照课程理念和教材学习目标要求科学、高效地学习。该书以“透析全解、双栏对照、服务学生”为宗旨，助您走向成功。

这套丛书在整体设计上有两个突出的特点：一是双栏对照，对教材全解全析，在学科层次上力求讲深、讲透、讲出特色；另一个就是注重典型案例学习，突出鲜活、典型和示范的特点。

为了让您更充分地理解本书的特点，挑战学习的极限，请您在选购和使用本书时，先阅读本书的使用方法图示。

明确新课学习要求

以课标为依据，三维目标全解教材学习要求，提供总体的学习策略，提出具体的学习要诀，体现目标控制学习规则。

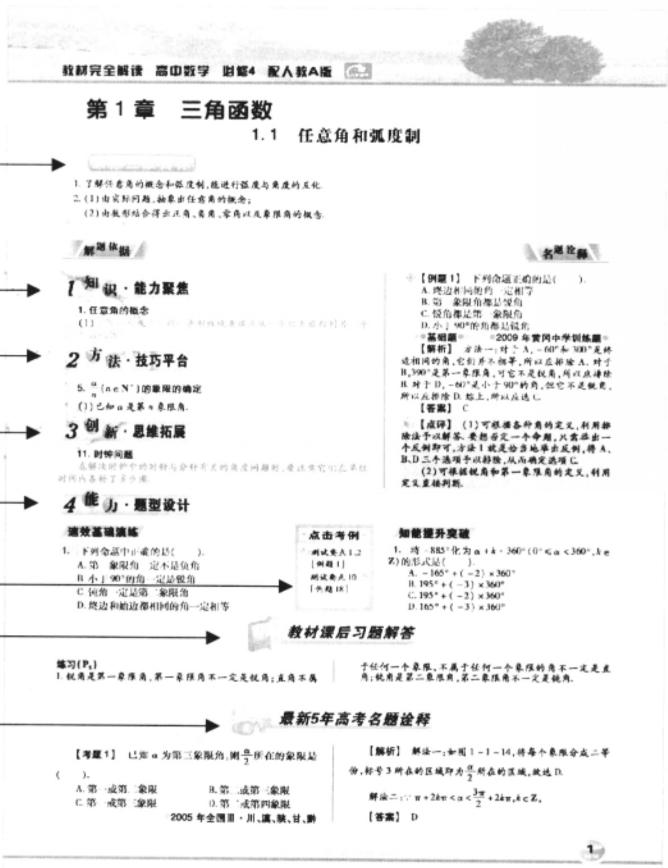
从知识、方法、思维三个方面诠释教材知识点和方法点，帮您形成答题要点、解题思维，理清解题思路、揭示考点实质和内涵。

针对本节重点、难点、考点及考试能力达标所设计的题目。题目难度适中，是形成能力、考试取得高分的必经阶梯。

“点击考例”栏目导引每一道试题的“测试要点”。当您解题出错时，建议您通过“测试要点”的指向，弄清致错原因，找到正确答案。

帮助您弥补课堂上听课的疏漏。答案准确，讲解繁简适度、到位、透彻。

汇集高考名题，讲解细致入微，教纲、考纲，双向例释；练习、考试，讲解透彻；多学、精练，效果显著。


教材完全解读 高中数学 必修4 配人教A版

第1章 三角函数

1.1 任意角和弧度制

1. 了解任意角的概念和弧度制，能进行弧度与角度的互化.
2. (1) 由实际问题，抽象出任意角的概念；
(2) 由数形结合得出正角、负角、零角以及象限角的概念.

解题依据

1 知识·能力聚焦

1. 任意角的概念

2 方法·技巧平台

5. $\frac{\alpha}{n}(n\in N^*)$的象限的确定

(1) 已知α是第n象限角.

3 创新·思维拓展

11. 时钟问题

名题诠释

【例题1】 下列命题正确的是(　　).
A. 终边相同的角一定相等
B. 第一象限角都是锐角
C. 锐角都是第一象限角
D. 小于90°的角都是锐角

基础题　2009年黄冈中学训练题

【解析】 方法一：对于A，−60°和300°是终边相同的角，它们并不相等，所以应排除A. 对于B，390°是第一象限角，可它不是锐角，所以应排除B. 对于D，−60°是小于90°的角，但它不是锐角，所以应排除D. 综上，所以应选C.

【答案】 C

【点评】 (1)可根据各种角的定义，利用排除法予以解答. 要想否定一个命题，只需举出一个反例即可，方法1就是恰当地举出反例，将A、B、D三个选项予以排除，从而确定选项C.
(2)可根据锐角和第一象限角的定义，利用定义直接判断.

4 能力·题型设计

速效基础演练

1. 下列命题中正确的是(　　).
A. 第一象限角一定不是负角
B. 小于90°的角一定是锐角
C. 钝角一定是第二象限角
D. 终边和始边都相同的角一定相等

点击考例
测试要点1.2
[例题1]
测试要点10
[例题18]

知能提升突破

1. 将−885°化为$\alpha+k\cdot360°$($0°\leqslant\alpha<360°$，$k\in Z$)的形式是(　　).
A. $-165°+(-2)\times360°$
B. $195°+(-3)\times360°$
C. $195°+(-2)\times360°$
D. $165°+(-3)\times360°$

教材课后习题解答

练习(P_5)
1. 锐角是第一象限角，第一象限角不一定是锐角；直角不属于任何一个象限，不属于任何一个象限的角不一定是直角；钝角是第二象限角，第二象限角不一定是钝角.

最新5年高考名题诠释

【考题1】 已知α为第三象限角，则$\frac{\alpha}{2}$所在的象限是(　　).
A. 第一或第三象限　　B. 第二或第三象限
C. 第一或第三象限　　D. 第二或第四象限

2005年全国Ⅲ·川、滇、陕、甘、黔

【解析】 解法一：如图1-1-14，将每个象限分成二等份，标号3所在的区域即为$\frac{\alpha}{2}$所在的区域，故选D.

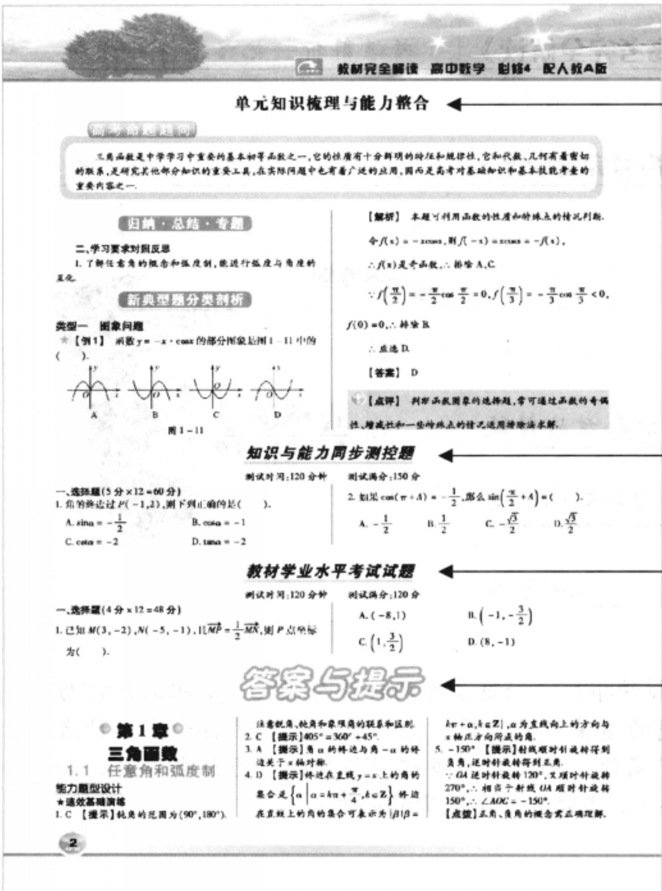
解法二：∵ $\pi+2k\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，

【答案】 D

1

教辅大师、特级教师王后雄教授科学超前的体例设置，帮您赢在学习起点，成就人生夙愿。

——题记



教材完全解读　高中数学　必修4　配人教A版

单元知识梳理与能力整合

高考命题趋向

三角函数是中学学习中重要的基本初等函数之一，它的性质有十分鲜明的特征和规律性，它和代数、几何有着密切的联系，是研究其他部分知识的重要工具，在实际问题中也有着广泛的应用，因而是高考对基础知识和基本技能考查的重要内容之一。

归纳·总结·专题

二、学习要求对照反思

1. 了解任意角的概念和弧度制，能进行弧度与角度的互化。

新典型题分类剖析

类型一　图象问题

★【例1】　函数 $y=-x\cdot\cos x$ 的部分图象是图1－11中的(　　).

A　B　C　D

图1－11

【解析】　本题可利用函数的性质和特殊点的情况判断.

令 $f(x)=-x\cos x$，则 $f(-x)=x\cos x=-f(x)$，

$\therefore f(x)$ 是奇函数，$\therefore$ 排除A,C.

$\because f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}=0, f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}<0,$

$f(0)=0$，$\therefore$ 排除B.

$\therefore$ 应选D.

【答案】　D

【点评】　判断函数图象的选择题，常可通过函数的奇偶性、增减性和一些特殊点的情况运用排除法求解.

知识与能力同步测控题

测试时间：120分钟　　测试满分：150分

一、选择题(5分×12＝60分)

1. 角的终边过 $P(-1,2)$，则下列正确的是(　　).

A. $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$　　B. $\cos\alpha=-1$

C. $\cot\alpha=-2$　　D. $\tan\alpha=-2$

2. 如果 $\cos(\pi+A)=-\frac{1}{2}$，那么 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+A\right)=$(　　).

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

教材学业水平考试试题

测试时间：120分钟　　测试满分：120分

一、选择题(4分×12＝48分)

1. 已知 $M(3,-2)$，$N(-5,-1)$，且 $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$，则P点坐标为(　　).

A. $(-8,1)$　　B. $\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$

C. $\left(1,\frac{3}{2}\right)$　　D. $(8,-1)$

答案与提示

第1章

三角函数

1.1　任意角和弧度制

能力题型设计

★速效基础演练

1. C　【提示】钝角的范围为(90°,180°).注意锐角、钝角和象限角的联系和区别.

2. C　【提示】405°＝360°＋45°.

3. A　【提示】角α的终边与角－α的终边关于x轴对称.

4. D　【提示】终边在直线 $y=x$ 上的角的集合是 $\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$.终边在直线上的角的集合可表示为 $\{\beta|\beta=k\pi+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$，α为直线向上的方向与x轴正方向所成的角.

5. －150°　【提示】射线顺时针旋转得到负角，逆时针旋转得到正角.

$\because$ OA逆时针旋转120°，又顺时针旋转270°，$\therefore$ 相当于射线OA顺时针旋转150°，$\therefore \angle AOC=-150°$.

【点拨】正角、负角的概念需正确理解.

2

单元知识整合

单元知识与方法网络化，帮助您将本单元所学教材内容系统化，形成对考点知识的二次提炼与升华，全面提高学习效率。

考试高分保障

精心选编涵盖本章节或阶段性知识和能力要求的检测试题，梯度合理、层次分明，与同步考试接轨，利于您同步自我测评，查缺补漏。

点拨解题思路

试题皆提供详细的解题步骤和思路点拨，鼓励一题多解。不但知其然，且知其所以然，帮助您养成良好规范的答题习惯。

小熊图书　最新教辅

讲《中考完全解读》复习讲解——紧抱中考的脉搏

练《中考完全学案》难点突破——挑战思维的极限

讲《高考完全解读》精湛解析——把握高考的方向

练《高考完全学案》阶段测试——进入实战的演练

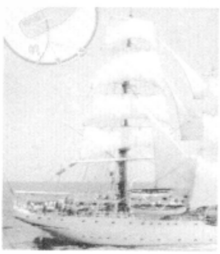
讲《教材完全解读》细致讲解——汲取教材的精髓

例《课标导航·基础知识手册》透析题型——掌握知识的法宝

练《教材完全学案》夯实基础——奠定能力的基石

伴随着新的课程标准问世及新版教材的推广，经过多年的锤炼与优化，数次的修订与改版，如今的“小熊图书”以精益求精的质量、独具匠心的创意，已成为备受广大读者青睐的品牌图书。今天，我们已形成了高效、实用的同步练习与应试复习丛书体系，如果您能结合自身的实际情况配套使用，一定能取得立竿见影的效果。

目　录



知识与方法

阅读索引

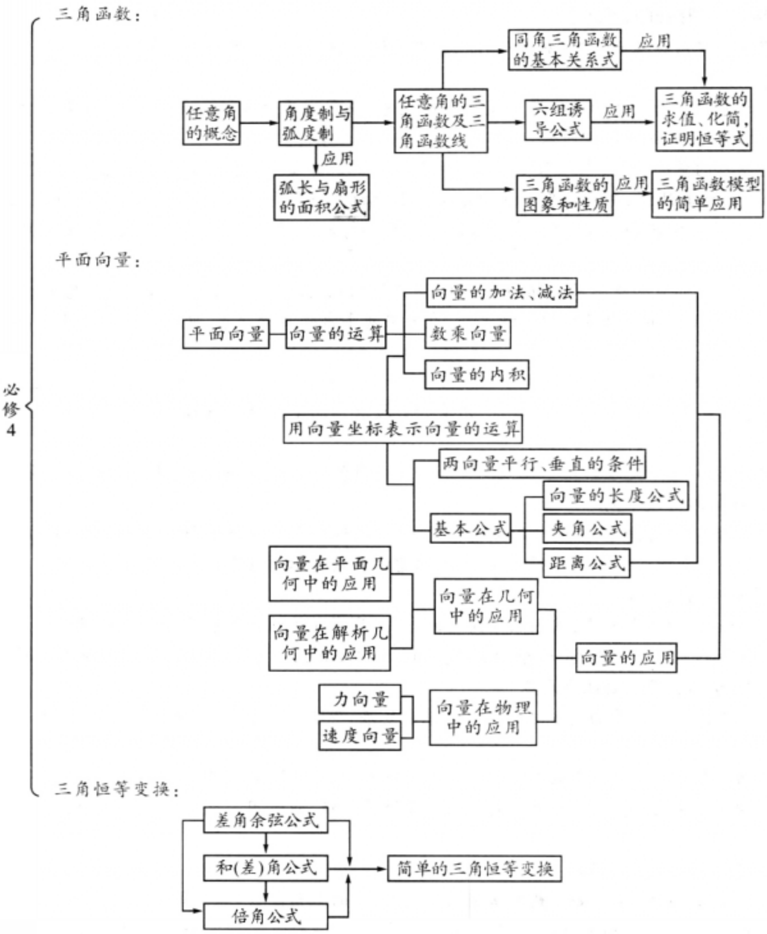
第1章　三角函数

第2章　平面向量

第3章 三角恒等变换

全书知识结构图解·名师学法指津

一、全书知识结构图解



二、名师学法指津

1. 对三角函数的学习应把握好如下几点

(1)三角函数是中学数学的重要内容，它既是解决生产、科研等实际问题的工具，又是进一步学习其他相关知识和学习高等数学的基础，它在物理学、天文学、测量学以及其他各种应用技术学科中有着广泛的应用.

(2)在这一章我们要在已学过的平面几何中的三角形和圆的知识的基础上，利用集合与函数的知识和方法系统地研究三角函数.

(3)学习中需要注意的六个要点：

①本章三角公式众多，对学过的公式要做到真正理解、记准、记熟、用活；解决问题究竟使用哪一个(或几个)公式，要抓住问题的实质善于联想，需用公式时顺手拈来.

②在熟练掌握概念、公式的基础上，要不断地总结解题的规律、变形的方法与技巧，努力提高活用知识解答问题的能力.

③掌握好正弦函数、余弦函数与 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象和性质(定义域、值域、最大值、最小值、周期及单调性、奇偶性)，它们是历年高考常考内容之一.

④化归思想、数形结合思想是本章应用的最基本、最重要的数学思想，贯穿本章内容的始终，要认真体会、理解. 解题过程中注意灵活地加以应用.

⑤掌握“五点法”画出函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k(A\neq0,\omega>0)$ 的简图，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A\neq0,\omega>0)$ 的图象与函数 $y=\sin x$的图象之间互相变换. 给出图象确定解析式的题型，有时从寻找“五点法”中的第一个零点$\left(-\frac{\varphi}{\omega},0\right)$作为突破口，要从图象的升降情况找准第一个零点的位置.

⑥掌握求三角函数的定义域、值域、单调区间、奇偶性(定义域关于原点对称)、周期性时所涉及的数学思想与方法——数形结合法和图象法，以及函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象(中心对称图形、轴对称图形、对称中心、对称轴).

2. 对平面向量的学习应把握好如下几点

(1)向量是数学中的重要内容之一，向量和数一样也能进行运算，而且利用向量的有关知识，还能有效地解决数学、物理等学科中的很多问题.

(2)平面向量这一章包括平面向量的实际背景及其基本概念、平面向量的线性运算、平面向量的基本定理及坐标表示、平面向量的数量积和平面向量应用举例五部分内容.

(3)向量的概念是学习向量的基础，在此基础上掌握向量的基本运算，包括向量的加减法、数乘向量和向量的数量积；向量不同于数，它有其自身的一套运算法则；向量的坐标表示是向量表示的另一重要形式，使向量把数、形有机地结合在一起. 学好向量这一章首先要理解向量的基本概念和运算法则，掌握数形结合的思想方法，结合向量的应用问题，在理解向量知识和应用两方面上下功夫.

(4)本章在系统地学习了向量的概念及运算的基础上，突出了向量的工具作用，利用向量的思想方法解决问题是本章的一个重要特点，向量是沟通代数、几何和三角函数的一种工具，有着极其丰富的实际背景，更有极其广泛的应用.

(5)学习中需要注意如下五点：

①在这一章里我们学习的向量是一个既有大小又有方向的量，方向和大小是向量的两个要素，这是首先必须注意到的一点，在向量的表示方法中，字母表示向量要注意书写规范，用有向线段表示向量与有向线段的起点无关，等长且同向的有向线段就表示同一向量.

②共线向量和平面向量的基本定理给出了共线向量和平面向量的基本结构，它们是进一步研究向量的基础，应予以重视，特别要注意向量的共线和线段的共线不同.

③向量的加、减、数乘结果均为向量，而向量的数量积是一个数，通过向量的数量积，可以计算向量的长度、平面内两点间的距离，通过两个向量的夹角可以判断两个向量是否垂直，充分注意向量数量积的应用性.

④注意向量的数量积不满足结合律.

⑤注意向量具有大小和方向两个要素，掌握相等向量的概念、共线向量的条件和平面向量的基本定理及其应用. 利用数量积计算向量的长度(模)、平面内两点间的距离、两个向量的夹角(注意垂直)，并学习判断相应的两条直线是否垂直.

3. 对三角恒等变换的学习应把握好如下几点

(1)三角恒等变换是三角函数和平面向量这两章的延续和发展，它是解决生产、科研等实际问题的工具，又是进一步学习其他相关知识和高等数学的基础.

(2)本章内容包括两角和与差的三角函数和简单的三角恒等变换两部分. 第一部分主要研究和角公式、差角公式、倍角公式，这些公式的基础是两角差的余弦公式；第二部分是简单的三角恒等变换，即运用前面学过的有关公式，对三角函数式进行有关的计算、化简、证明等.

(3)学习本章知识需注意如下四个问题：

①本部分知识出现的公式较多，除去必须熟练掌握的两角和、差的三角函数、二倍角的三角函数公式之外，教科书的例题中还出现了半角公式、和差化积公式、积化和差公式，这些公式虽不要求记忆，但也必须学会简单的运用.

②对教科书中出现的公式要做到真正理解、记准、记熟、用活，解决问题时究竟使用哪一个(或几个)公式，要抓住问题的实质善于联想，需要公式时顺手拈来.

③转化与化归的思想是本章应用的最重要、最基本的数学思想. 它贯穿于本章内容的始终，要认真体会、理解，解题过程中注意灵活地加以运用.

④两角和、差的正弦 $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$. 两角和、差的余弦 $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$(注意符号). 倍角公式 $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$ 有升、降幂的功能，若升幂，则角减半；若降幂，则角加倍. 掌握和、差角公式、倍角公式、和差化积与积化和差公式的正用、逆用和变形用.

第1章 三角函数

1.1 任意角和弧度制

课标三维目标

1. 了解任意角的概念和弧度制,能进行弧度与角度的互化.
2. (1)由实际问题,抽象出任意角的概念;
   (2)由数形结合得出正角、负角、零角以及象限角的概念;
   (3)遵循由特殊到一般的方法,归纳总结出终边相同的角的表示方法;
   (4)由圆周角找出弧度制与角度制的联系;
   (5)用对应的观点可以发现:在弧度制下,角的集合与实数集**R**之间建立起一一对应的关系.
3. 利用运动的观点(角的旋转)和数形结合的思想去研究角,用转化的思想去认识角度制与弧度制的统一性.用集合与对应的思想理解弧度制,养成用数学思想方法处理问题的习惯.

解题依据

1 知识·能力聚焦

1. 任意角的概念

(1)角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形.

(2)正角:按逆时针方向旋转形成的角.

(3)负角:按顺时针方向旋转形成的角.

(4)零角:一条射线没有作任何旋转,我们称它为零角.

(5)注意:①角度的范围再不限于0°~360°.

②角的概念是通过角的终边的运动来推广的,根据角的终边的旋转方向,得到正角、负角和零角,由此我们应当意识到角的终边位置的重要性.

③当角的始边相同,角相等时则终边相同;终边相同,而角不一定相等.

④为了简单起见,在不引起混淆的前提下,"角α"或"$\angle\alpha$"可以简记为"α".

⑤我们把角的概念推广到了任意角中,包括正角、负角和零角.

⑥要正确理解正角、负角和零角的概念,由定义可知,关键是抓住终边的旋转方向是逆时针、顺时针还是没有转动.

(6)①判定与任意角有关的命题的真假的关键在于抓住角的四个"要素":顶点、始边、终边和旋转方向.

②确定任意角的度数要抓住旋转方向及旋转圈数.

③引入正、负角的概念以后,角的加减运算类似于实数的加减运算.

2. 象限角与轴线角

(1)使角α的顶点与原点重合,始边与x轴正半轴重合,终边落在第几象限,则称α为第几象限角;终边落在坐标轴上的角α被称为轴线角.

(2)象限角的集合.

第一象限角的集合为

$\{x|k\cdot 360°<x<k\cdot 360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$;

名题诠释

◈【例题1】 下列命题正确的是(　　).

A. 终边相同的角一定相等　　B. 第一象限角都是锐角

C. 锐角都是第一象限角　　D. 小于90°的角都是锐角

基础题　　2009年黄冈中学训练题

【解析】 方法一:对于A,$-60°$和300°是终边相同的角,它们并不相等,所以应排除A.对于B,390°是第一象限角,可它不是锐角,所以应排除B.对于D,$-60°$是小于90°的角,但它不是锐角,所以应排除D.综上,所以应选C.

方法二:因锐角的集合是$\{\alpha|0°<\alpha<90°\}$, ①

第一象限角的集合是$\{\alpha|k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$, ②

对于②,当$k=0$时,②与①相同.所以锐角是第一象限角.故应选C.

【答案】 C

【点评】 (1)可根据各种角的定义,利用排除法予以解答.要想否定一个命题,只需举出一个反例即可,方法1就是恰当地举出反例,将A、B、D三个选项予以排除,从而确定选项C.

(2)可根据锐角和第一象限角的定义,利用定义直接判断.

◈【例题2】 给出下列四个命题:①$-75°$是第四象限角;②225°是第三象限角;③475°是第二象限角;④$-315°$是第一象限角.其中正确的命题有(　　).

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

基础题

【解析】 $\because -90°<-75°<0°,180°<225°<270°$,

$360°+90°<475°<360°+180°,-360°<-315°<-270°$,

$\therefore$ ①②③④都是正确的命题.故选D.

【答案】 D

◈【例题3】 如图1-1-4,点A在半径为1且圆心在原点的圆上,且$\angle AOx=45°$.点P从点A处出发,依逆时针方向匀速地沿单位圆旋转.已知点P在1秒钟内转过的角度为$\theta(0°<\theta<180°)$,经过2秒钟到达第三象限,经过14秒钟后又回到出发点A,求θ,并判断其所在的象限.

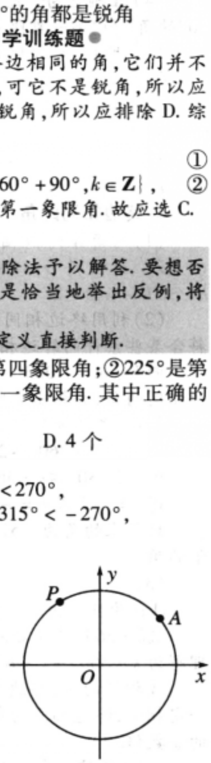


图1-1-4

中档题

【解析】 先把实际语言转化为数学语言.即14秒钟后点P在角$14\theta+45°$的终边上,由此可得到等量关系,再注意θ角的范围便可确定θ的值.

【解】 由题意有　$14\theta+45°=k\cdot 360°+45°(k\in\mathbf{Z})$,

$\therefore$　$\theta=\dfrac{k\cdot 180°}{7}(k\in\mathbf{Z})$.

第二象限角的集合为

$\{x \mid k\cdot360°+90°<x<k\cdot360°+180°, k\in\mathbf{Z}\}$;

第三象限角的集合为

$\{x \mid k\cdot360°+180°<x<k\cdot360°+270°, k\in\mathbf{Z}\}$;

第四象限角的集合为

$\{x \mid k\cdot360°+270°<x<k\cdot360°+360°, k\in\mathbf{Z}\}$.

(3)轴线角的集合.

终边落在 x 轴的非负半轴上的角的集合为

$\{x|x=k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在 x 轴的非正半轴上的角的集合为

$\{x|x=k\cdot360°+180°, k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在 x 轴上的角的集合为

$\{x|x=k\cdot180°, k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在 y 轴的非负半轴上的角的集合为

$\{x|x=k\cdot360°+90°, k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在 y 轴的非正半轴上的角的集合为

$\{x|x=k\cdot360°-90°, k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在 y 轴上的角的集合为

$\{x|x=k\cdot180°+90°, k\in\mathbf{Z}\}$.

注意:象限角与轴线角的集合的表示形式并不唯一,还有其他的表示形式.

(4)准确区分"锐角""0°~90°的角""小于90°的角"和"第一象限角".

锐角是 $0°<\alpha<90°$ 的角;

0°~90°的角是 $0°\leqslant\alpha<90°$ 的角;

小于90°的角是 $\alpha<90°$ 的角,显然其中包括0°角和负角;

第一象限角是 $\{\alpha|k\cdot360°<\alpha<k\cdot360°+90°, k\in\mathbf{Z}\}$ 所表示的角.

3. 终边相同的角

(1)与角 α 终边相同的角为 $\beta=k\cdot360°+\alpha$ $(k\in\mathbf{Z})$,连同角 α,可构成一个集合 $S=\{\beta|\beta=k\cdot360°+\alpha, k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)利用终边相同的角的一般形式可以求出符合某些条件的终边相同的角.

例如:在 $-1\,080°\sim-360°$ 间,找出与 $2\,004°$ 终边相同的角,并指出它所在的象限.

解:∵ 与 $2\,004°$ 终边相同的角为

$k\cdot360°+2\,004°(k\in\mathbf{Z})$.

由 $-1\,080°\leqslant k\cdot360°+2\,004°<-360°$,

得 $k=-7$ 或 $k=-8$.

故所求的角为 $-516°$ 和 $-876°$,它们是第三象限的角.

(3)注意:

①α 为任意角.

②$k\cdot360°$ 与 α 之间是"+"号,$k\cdot360°-\alpha$ 可理解为 $k\cdot360°+(-\alpha)$.

③相等的角,终边一定相同;终边相同的角不一定相等,终边相同的角有无数个,它们相差360°的整数倍.

④$k\in\mathbf{Z}$ 这一条件必不可少.

4. 弧度制

(1)定义:长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做1弧度的角;用弧度作为单位来度量角的单位制叫做弧度制;在弧度制下,1弧度记作1rad.

又 $180°<2\theta+45°<270°$,即 $67.5°<\theta<112.5°$,

$\therefore 67.5°<\dfrac{k\cdot180°}{7}<112.5°$,且 $k\in\mathbf{Z}$,$\therefore k=3$ 或 $k=4$.

∴ 所求的 θ 值为 $\theta=\dfrac{540°}{7}$ 或 $\theta=\dfrac{720°}{7}$.

易知 $0°<\dfrac{540°}{7}<90°$,$90°<\dfrac{720°}{7}<180°$,

∴ θ 在第一象限或第二象限.

【例题4】 设 $E=\{$小于90°的角$\}$,$F=\{$锐角$\}$,$G=\{$第一象限的角$\}$,$M=\{$小于90°但不小于0°的角$\}$,则有(　　).

A. $F\subsetneqq G\subsetneqq E$　B. $F\subsetneqq E\subsetneqq G$　C. $M\subsetneqq(E\cap G)$　D. $(E\cap G)\cap M=F$

中档题　2009年湖南师大附中测试题

【解析】 先明确题设所给出的四个集合中作为元素的角的具体含义,再寻求这些集合间的内在关系,再对照每一个选项,从而明辨真伪;也可利用数形结合的方法,在直角坐标平面上分别画出表示集合 E、F、G、M 的示意图,再通过直观的图形得出答案;还可用特例排除法求解:$360°+10°\in G$,但 $370°\notin E$,排除A;同理由 $-10°$ 可排除B,由0°可排除C,故选D.

【答案】 D

【例题5】 在与角 $10\,030°$ 终边相同的角中,求满足下列条件的角.

(1)最大的负角;(2)最小的正角;(3)360°~720°的角.

中档题　2009年武汉二中测试题

【解析】 先写出终边相同的角的一般形式,再求满足条件的整数 k 即可,其中最大的负角在 $-360°\sim0°$ 之间,最小的正角在 $0°\sim360°$ 之间.

(1)与 $10\,030°$ 终边相同的角的一般形式为 $\beta=k\cdot360°+10\,030°$ $(k\in\mathbf{Z})$,由 $-360°<k\cdot360°+10\,030°<0°$,得 $-10\,390°<k\cdot360°<-10\,030°$,解得 $k=-28$,故所求的最大负角为 $\beta=-50°$.

(2)由 $0°<k\cdot360°+10\,030°<360°$,得 $-10\,030°<k\cdot360°<-9\,670°$,解得 $k=-27$,故所求的最小正角为 $\beta=310°$.

(3)由 $360°<k\cdot360°+10\,030°<720°$,得 $-9\,670°<k\cdot360°<-9\,310°$,解得 $k=-26$,故所求的角为 $\beta=670°$.

【点评】 在终边相同的角的集合中,如何求出符合某些条件的角?有哪些方法?需要同学们认真体会.

【例题6】 与 $-457°$ 角终边相同的角的集合是(　　).

A. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+457°, k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+97°, k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+263°, k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°-263°, k\in\mathbf{Z}\}$

基础题

【解析】 $-457°=-360°-97°$,而 $-97°=-360°+263°$.

方法一:∵ $-457°=-2\times360°+263°$,∴ 应选C.

方法二:∵ $-457°$ 角与 $-97°$ 角终边相同,

又 $-97°$ 角与 $263°$ 角终边相同,

且 $263°$ 角与 $k\cdot360°+263°$ 角终边相同,∴ 应选C.

【答案】 C

【点评】 与 α 终边相同的角的集合为 $\{\beta|\beta=k\cdot360°+\alpha, k\in\mathbf{Z}\}$.

【例题7】 下列各命题中,假命题是(　　).

A."度"与"弧度"是度量角的两种不同的度量单位

B. 一度的角是周角的 $\dfrac{1}{360}$,一弧度的角是周角的 $\dfrac{1}{2\pi}$

C. 根据弧度的定义,180°一定等于 π 弧度

D. 不论是用角度制还是用弧度制度量角,它们均与圆的半径长短有关

基础题

【解析】 根据角度和弧度的定义,可知无论是角度制还是弧度制,角的大小与圆的半径长短无关,而是与弧长与半径的比值有关,所以D选项是假命题. A、B、C均为真命题,故选D.

【答案】 D

(2)度量：

①一般地，正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，零角的弧度数是零.

②角 α 的弧度数的绝对值 $|\alpha|=\frac{l}{r}$（其中 l 是以角 α 作为圆心角时所对的弧的长，r 是圆的半径）. α 的正负由角 α 终边的旋转方向决定.

例如：如果圆心角所对的弧长 $l=2\pi r$（即弧长是一个整圆），那么这个圆心角的弧度数是 $\frac{l}{r}=\frac{2\pi r}{r}=2\pi$.

如果圆心角表示一个负数，且它所对的弧的长 $l=4\pi r$，那么这个角的弧度数的绝对值是 $\frac{l}{r}=\frac{4\pi r}{r}=4\pi$，即这个角的弧度数是 -4π.

2 方法·技巧平台

5. $\frac{\alpha}{n}$（$n\in\mathbf{N}^*$）的象限的确定

(1)已知 α 是第 n 象限角，要确定 $\frac{\alpha}{n}$（$n\in\mathbf{N}^*$）所在象限的常用方法有两个：一是分类讨论；二是几何法，即先把各象限均分为 n 等份，再从 x 轴的正方向的上方起，依次将各区域标上Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ，则 α 原来是第 n 象限角所对应的标号即为 $\frac{\alpha}{n}$ 终边所落在的区域.

例如：已知 α 是第二象限角，则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角？

解：如图 1－1－1，先将各象限分成 2 等份，再从 x 轴正方向的上方起，依次将各区域标上Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ，则标有Ⅱ的区域即为 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所落在的区域，故 $\frac{\alpha}{2}$ 为第一、第三象限角.

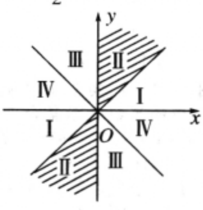


图 1－1－1

(2)注意：

①有的同学处理问题时，如由 α 是第二象限角，仅想到 $90°<\alpha<180°$，从而得到 $45°<\frac{\alpha}{2}<90°$，仅得到 $\frac{\alpha}{2}$ 为第一象限角，而将 $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角的可能性丢掉，此种错误以后一定要避免.

②熟悉下列事实，对我们解答有关问题大有好处.

当 α 为第一象限角时，$\frac{\alpha}{2}$ 为第一、第三象限角的前半区域.

当 α 为第二象限角时，$\frac{\alpha}{2}$ 为第一、第三象限角的后半区域.

当 α 为第三象限角时，$\frac{\alpha}{2}$ 为第二、第四象限角的前半区域.

当 α 为第四象限角时，$\frac{\alpha}{2}$ 为第二、第四象限角的后半区域.

◈【例题 8】 若两角的和是 1 弧度，此两角的差是 1°，试求这两个角的大小.

基础题

【解析】 设两角分别为 x、y 弧度，则

$$\begin{cases}x+y=1,\\x-y=\frac{\pi}{180},\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{360},\\y=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{360}.\end{cases}$$

∴ 所求的两角的弧度数分别为 $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{360}$，$\frac{1}{2}-\frac{\pi}{360}$.

◈【例题 9】 若角 α 是第一象限角，问 2α、$\frac{\alpha}{2}$、$\frac{\alpha}{3}$ 是第几象限角？

中档题　　2009 年黄冈中学训练题

【解析】 (1)∵ α 是第一象限角，

∴ $k\cdot360°<\alpha<k\cdot360°+90°(k\in\mathbf{Z})$，　　(※)

∴ $k\cdot720°<2\alpha<k\cdot720°+180°(k\in\mathbf{Z})$.

故 2α 是第一或第二象限角，或是终边重合于 y 轴的正半轴的角；

(2)由(※)得 $k\cdot180°<\frac{\alpha}{2}<k\cdot180°+45°(k\in\mathbf{Z})$.

①当 k 为偶数时，令 $k=2n(n\in\mathbf{Z})$，得 $n\cdot360°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360°+45°(n\in\mathbf{Z})$，这表明 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角；

②当 k 为奇数时，令 $k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$，得 $n\cdot360°+180°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360°+(180°+45°)(n\in\mathbf{Z})$，这表明 $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角；

综合①②知，$\frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限角；

(3)由(※)式得 $k\cdot120°<\frac{\alpha}{3}<k\cdot120°+30°(k\in\mathbf{Z})$.

①当 $k=3n(n\in\mathbf{Z})$ 时，$n\cdot360°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+30°(n\in\mathbf{Z})$，

∴ $\frac{\alpha}{3}$ 是第一象限角；

②当 $k=3n+1(n\in\mathbf{Z})$ 时，$n\cdot360°+120°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+(120°+30°)(n\in\mathbf{Z})$，

∴ $\frac{\alpha}{3}$ 是第二象限角；

③当 $k=3n+2(n\in\mathbf{Z})$ 时，$n\cdot360°+240°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+(240°+30°)(n\in\mathbf{Z})$；

∴ $\frac{\alpha}{3}$ 是第三象限角.

综合①②③知，$\frac{\alpha}{3}$ 是第一或第二或第三象限角.

◈【例题 10】 如图 1－1－5 所示，(1)分别写出终边落在 OA、OB 位置上的角的集合；(2)写出终边落在阴影部分（包括边界）的角的集合.

中档题

【解析】 先在 0 到 2π 之间找出终边落在 OA 与 OB 位置上的角的集合，为方便起见，也可以在 $-\pi$ 与 π 之间找出终边落在 OA 与 OB 位置上的角的集合.

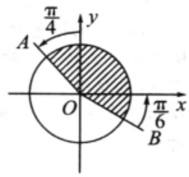


图 1－1－5

(1)在 0 到 2π 之间，终边落在 OA 位置上的角是 $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$，终边落在 OB 位置上的角是 $\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{11\pi}{6}$，故终边落在 OA 上的角的集合为

$$\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=2k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\},$$

终边落在 OB 上的角的集合为 $\left\{\beta\,\middle|\,\beta=2k\pi+\frac{11\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2)终边落在阴影部分（包括边界）的角的集合为

$$\left\{\alpha\,\middle|\,2k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant\alpha\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

6. 数形结合思想的应用

数形结合的方法,能将区间角(象限角是特殊的区间角)在直角坐标系中正确地用图表示出来;反之,对于直角坐标系中的图形所表示的角的范围,能正确地用区间角表示.

例如:若角 α 的终边在图 1-1-2 中阴影所表示的范围内,则 α 角组成的集合为________.

解析:在 $0°\sim360°$ 范围内,终边落在阴影范围内的角是 $30°\leqslant\alpha\leqslant150°$,故满足条件的角的集合为 $\{\alpha|k\cdot360°+30°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+150°,k\in\mathbf{Z}\}$.

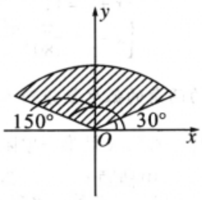


图 1-1-2

7. 与角有关的集合问题

解决与角有关的集合问题的关键是弄清集合中含有哪些元素,其方法有:一是将集合中表示角的式子化为同一种形式(这种方法要用到整数分类的有关知识,即分类讨论);二是用列举法把集合具体化;三是数形结合,即在直角坐标平面上分别作出这些角.

例如:已知集合 $M=\{\alpha|\alpha=(4k\pm1)90°,k\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{\beta|\beta=(2k+1)90°,k\in\mathbf{Z}\}$,则 M 与 N 的关系如何?

解:$\because$ $M=\{\cdots,-450°,-270°,-90°,90°,270°,450°,\cdots\}$,$N=\{\cdots,-450°,-270°,-90°,90°,270°,450°,\cdots\}$,

$\therefore M=N$.

8. 弧度制与角度制的互化

(1)换算公式

$2\pi=360°,1°=\frac{\pi}{180}$弧度 ≈0.01745 弧度(rad),

1 弧度 $=\left(\frac{180}{\pi}\right)°\approx57.30°=57°18'$.

(2)一般地,我们只需根据

$\boxed{180°=\pi\ \text{rad}}$ — $1°=\frac{\pi}{180}\text{rad}\approx0.01745\text{rad}$;$1\ \text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)°\approx57.30°$

就可以进行弧度与角度的换算了.

(3)今后用弧度制表示角时,"弧度"二字或"rad"通常略去不写,而只写该角所对应的弧度数. 例如,角 $\alpha=2$ 就表示 α 是 2 rad 的角,$\sin\frac{\pi}{3}$ 就表示 $\frac{\pi}{3}$rad 的角的正弦,即 $\sin\frac{\pi}{3}=\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(4)角的概念推广后,在弧度制下,角的集合与实数集 $\mathbf{R}$ 之间建立起一一对应的关系:每一个角都有唯一的一个实数(即这个角的弧度数)与它对应;反过来,每一个实数也都有唯一的一个角(即弧度数等于这个实数角)与它对应.

(5)需记住的特殊角的弧度数,将为我们的计算带来方便.

度	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	135°	150°
弧度	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
度	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	
弧度	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	

◈【例题 11】 已知角 β 的终边在如图 1-1-6 中阴影所表示的范围内(不包括边界),那么 $\beta\in$______.

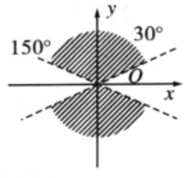


图 1-1-6

基础题

【解析】 在 $0°\sim360°$ 范围内,终边落在阴影内的角为 $30°<\alpha<150°$ 与 $210°<\alpha<330°$,

$\therefore$ 所有满足题意的角 α 为

$\{\alpha|k\cdot360°+30°<\alpha<k\cdot360°+150°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|k\cdot360°+210°<\alpha<k\cdot360°+330°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|2k\cdot180°+30°<\alpha<2k\cdot180°+150°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|(2k+1)180°+30°<\alpha<(2k+1)180°+150°,k\in\mathbf{Z}\}$.

$\therefore\beta\in\{\beta|n\cdot180°+30°<\beta<n\cdot180°+150°,n\in\mathbf{Z}\}$.

【答案】 $\{\beta|n\cdot180°+30°<\beta<n\cdot180°+150°,n\in\mathbf{Z}\}$

◈【例题 12】 (1)设集合 $A=\{\alpha|\alpha=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$,集合 $B=\{\beta|\beta=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$,则(　　).

A. $A\supsetneqq B$　　B. $B\supsetneqq A$　　C. $A\cap B=\varnothing$　　D. $A=B$

(2)设集合 $M=\{\alpha|\alpha=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=k\cdot180°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{\beta|\beta=k\cdot45°,k\in\mathbf{Z}\}$,则集合 M 与集合 N 的关系是(　　).

A. $M\supsetneqq N$　　B. $M\subsetneqq N$　　C. $M=N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

中档题

【解析】 (1)$\because$ 集合 $A=\{\alpha|\alpha=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=(2k+1)\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=2k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=m\cdot90°,m\in\mathbf{Z}\}$,集合 $B=\{\beta|\beta=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$,

$\therefore$ 集合 $A=B$,故选 D.

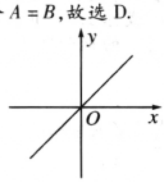


图 1-1-7

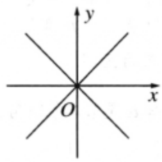


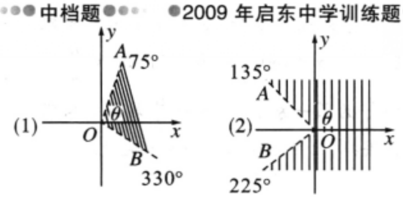
图 1-1-8

(2)如图 1-1-7,集合 M 中的各类角的终边用黑线表示. 如图 1-1-8 中的黑线表示集合 N 中的各类角的终边. 比较图 1-1-7和图 1-1-8,不难得出:$M\subsetneqq N$. 故选 B.

【答案】 (1)D (2)B

◈【例题 13】 用弧度表示顶点在原点,始边重合于 x 轴的非负半轴,终边落在阴影部分内的角的集合(不包括边界,如图 1-1-9).

中档题　　2009 年启东中学训练题



(a)　　(b)

图 1-1-9

【解析】 (1)如图 1-1-9(a)中以 OB 为终边的角 330°,可看成为 $-30°$,化为弧度,即 $-\frac{\pi}{6}$,而 $75°=75\times\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{12}$,

$\therefore\left\{\theta\left|2k\pi-\frac{\pi}{6}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

(2)如图 1-1-9(b)中以 OB 为终边的角 225°,可看成是 $-135°$,化为弧度,即 $-\frac{3\pi}{4}$,而 $135°=135\times\frac{\pi}{180}=\frac{3\pi}{4}$,

$\therefore\left\{\theta\left|2k\pi-\frac{3\pi}{4}<\theta<2k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

9. 用弧度表示终边相同的角

用弧度表示的与角 α 终边相同的角的一般形式为：$\beta=2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z})$. 这些角所组成的集合为 $\{\beta\mid\beta=2k\pi+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$.

注意：在同一个代数式中弧度制与角度制不能同时出现. 如 $2k\pi+30^\circ(k\in\mathbf{Z})$ 或 $k\cdot360^\circ+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$ 都是错误的写法.

10. 扇形的弧长与面积公式

若扇形的圆心角为 α（α 为弧度制），半径为 R，弧长为 l，面积为 S，则有 $l=R|\alpha|$，$S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}|\alpha|R^2$.

注意：(1) 由上述公式可知，由 α、R、l、S 中的两个量可以求出另外的两个量，即由其二得其二.

(2) 运用弧度制下的弧长公式及扇形面积公式明显比角度制下的公式简单得多，但要注意它的前提是 α 为弧度制.

(3) 在运用公式时，还应熟练地掌握这两个公式的变形运用：

① $l=|\alpha|R$，$|\alpha|=\frac{l}{R}$，$R=\frac{l}{|\alpha|}$；

② $S=\frac{1}{2}|\alpha|R^2$，$|\alpha|=\frac{2S}{R^2}$.

例如：如图 1－1－3，已知扇形 $\overset{\frown}{AOB}$ 的周长为 6cm，中心角为 1 弧度，求扇形的面积.

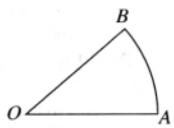


图 1－1－3

解：该扇形的半径为 R，弧长为 l，面积为 S.

由已知有 $l=1\cdot R$ 及 $l+2R=6$cm，

$\therefore R=2$cm，$l=2$cm，

$\therefore S=\frac{1}{2}lR=2\text{cm}^2$.

故所求的面积为 2cm^2.

3 创新·思维拓展

11. 时钟问题

在解决时钟中的时针与分针有关的角度问题时，要注意它们在单位时间内各转了多少圈.

例如：2 小时 40 分钟后，分针所转的弧度数为________.

解析：首先应注意到分针所转的方向为顺时针，即为负角.

又 2 小时 40 分 $=\frac{8}{3}$ 小时，

而 1 小时分针转过的弧度数为 2π.

故分针转了 $-2\pi\times\frac{8}{3}=-\frac{16}{3}\pi$.

又如：若将时钟拨慢 5 分钟，则分针转了________度；时针转了________度.

解析：将时钟拨慢 5 分钟，分针、时针都是按逆时针方向转动，转过的是正角. 这时，分针转过的角度是：$\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$；时针转过的角度是：$\frac{30^\circ}{12}=2.5^\circ$.

◈【例题 14】 把下列角化成 $2k\pi+\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant2\pi,k\in\mathbf{Z})$ 形式，写出终边相同的角的集合，并指出它是第几象限角.

(1) $-\frac{46\pi}{3}$；(2) $-1\,485^\circ$；(3) -20.

●●●基础题●●●　●2009 年北大附中测试题●

【解析】 (1) $-\frac{46\pi}{3}=-8\times2\pi+\frac{2\pi}{3}$，它是第二象限角. 终边相同的角的集合为 $\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=2k\pi+\frac{2\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2) $-1\,485^\circ=-5\times360^\circ+315^\circ=-10\pi+\frac{7\pi}{4}$，它是第四象限角. 终边相同的角的集合为 $\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=2k\pi+\frac{7\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(3) $-20=-4\times2\pi+(8\pi-20)$. 而 $\frac{3}{2}\pi<8\pi-20\approx5.13<2\pi$，$\therefore -20$ 是第四象限角. 终边相同的角的集合为 $\{\alpha\mid\alpha=2k\pi+(8\pi-20),k\in\mathbf{Z}\}$.

◈【例题 15】 已知 $\odot O$ 的一条弧 $\overset{\frown}{AE}$ 的长等于该圆内接正三角形的边长，则从 OA 顺时针旋转到 OE 所形成的角 α 的弧度数是________.

●●●基础题●●●

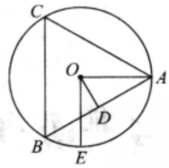


图 1－1－10

【解析】 设 $\odot O$ 的半径为 r，其内接正三角形为 $\triangle ABC$，

如图 1－1－10，D 为 AB 边中点，$AO=r$，

$\angle OAD=30^\circ$，$AD=r\cdot\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}r$，

$\therefore$ 边长 $AB=2AD=\sqrt{3}r$.

$\therefore \overset{\frown}{AE}$ 的弧长 $l=AB=\sqrt{3}r$.

又 $\because \alpha$ 是负角，$\therefore \alpha=-\frac{l}{r}=-\frac{\sqrt{3}r}{r}=-\sqrt{3}$.

故填 $-\sqrt{3}$.

【答案】 $-\sqrt{3}$

◈【例题 16】 将钟表上的时针作为角的始边，分针作为终边，那么当钟表上显示 8 点 5 分时，时针与分针构成的角度是________.

●●●中档题●●●　●2009 年北大附中测试题●

图 1－1－11

【解析】 应从任意角的概念出发，研究时针与分针所构成的角，其中有正角、负角，共有无穷多个角. 要求这无穷多个角，根据图 1－1－11，可先求出负角中绝对值最小的角，应为 $-\left(4+\frac{11}{12}\right)\times30^\circ=-147.5^\circ$.

$\therefore$ 所有的负角可表示为 $-k\cdot360^\circ-147.5^\circ(k\in\mathbf{N})$.

在 $0^\circ\sim360^\circ$ 内最小正角为 $360^\circ-147.5^\circ=212.5^\circ$.

$\therefore$ 所有的正角可表示为 $k\cdot360^\circ+212.5^\circ(k\in\mathbf{N})$.

综上，所有的角可表示为 $k\cdot360^\circ+212.5^\circ(k\in\mathbf{Z})$.

【答案】 $k\cdot360^\circ+212.5^\circ,k\in\mathbf{Z}$

◈【例题 17】 今天是星期一，

(1) $7k(k\in\mathbf{Z})$ 天后的那一天是星期几？$7k(k\in\mathbf{Z})$ 天前的那一天是星期几？

(2) 158 天后的那一天是星期几？

●●●基础题●●●　●2009 年清华附中训练题●

【解析】 从星期一、星期二一直到星期日，每星期 7 天，呈现周期性变化，每 7 天都要重复出现.

(1) $\because$ 今天是星期一，

$\therefore 7k(k\in\mathbf{Z})$ 天后的那一天仍是星期一，

$7k(k\in\mathbf{Z})$ 天前的那一天仍是星期一.

(2) $\because 158=7\times22+4$，又 $\because$ 今天是星期一，

$\therefore$ 158 天后的那一天是星期五.