21世纪高等学校规划教材

XIANXING DAISHU

线性代数

李明芳 主 编

范东梅 张峰荣 良 燕 副主编

中国电力出版社

http://jc.cepp.com.cn

21世纪高等学校规划教材

XIANXING DAISHU

线性代数

主　编　李明芳

副主编　范东梅　张峰荣　良　燕

编　写　全贤唐　张　洪　田秋野

主　审　刘红

中国电力出版社

http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为21世纪高等学校规划教材。

全书共分为六章，包括行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、矩阵的对角化、二次型等内容。各章末附有本章小结和自测题，最后还配有3套模拟试题。书末附习题参考答案，以供参考。本书概念清楚，重点突出，层次清晰，说理浅显，例题、习题内容丰富，难度适中，适合自学。

本书可以作为成人高等院校、继续教育院校专升本、业余大学及大学专科的教材，也可作为少学时工科院校的本科教材。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/李明芳主编. —北京：中国电力出版社，2010.8
21世纪高等学校规划教材
ISBN 978-7-5123-0563-2

Ⅰ.①线… Ⅱ.①李… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材
Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第114667号

中国电力出版社出版、发行
（北京三里河路6号 100044 http://jc.cepp.com.cn）
北京市同江印刷厂印刷
各地新华书店经售
*
2010年8月第一版 2010年8月北京第一次印刷
787毫米×1092毫米 16开本 11.5印张 274千字
定价19.00元

前　言

21世纪的成人教育得到迅速地发展，线性代数作为一门必修的基础理论课，受到广泛关注。编者在多年的线性代数教学实践中了解到，学生普遍认为“线性代数”是比较难学的一门课程，尤其是对成人院校的学生，主要是其太抽象。如何既让学生感到学起来容易一些而又不降低教学质量，甚至能提高教学质量呢？这正是我们编写这一教材的目的。

从教学实际出发，我们的观点是，适合的才可能成为最好的，因此在编写这套教材的过程中，始终注意把握成人院校的学生对数学的需求及学生自身的特点。

根据成人教育以“自学为主，面授为辅”的特点，在编写本书时力求做到：从特殊到一般，从具体到抽象，注重基本概念、基本定理的讲述，并从实际例子出发，由浅入深地介绍内容，这样使读者易于理解和掌握。

本书包括行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、矩阵的对角化、二次型等内容。注重兼顾各个层次学生的不同需求，教师可根据不同层次学生的需求，选取其中的部分内容讲授（书中有几处带“＊”的内容有一定的难度，教师可根据学生的层次进行选择讲授）。教材中注重例题、习题的选择与匹配，题型较为丰富，难度适中，习题量适度。同时每章配有自测题，书后还配有3套模拟试题，可供读者检查学习效果时使用。

根据大纲对成人教育学生的要求及学生的现状，在教材中尽量避免繁复的或需要更多数学基础的定理证明。但对证明过程能够体现线性代数理论基本思想和基本方法的重要定理都给出了证明，使学生整体上把握教材的内容。

每章的末尾都编写了本章小结，给读者指出了本章的重点和难点，弥补学生在学习过程中缺少教师指导的不足。

本书由北京科技大学的李明芳担任主编，范东梅、张峰荣、良燕担任副主编，全贤唐、张洪、田秋野参加了编写。本书由首都医科大学的刘红担任主审。

本书在编写过程中，参考了大量的相关书籍和资料，引用了其中的一些例子，在此向其作者表示衷心地感谢！

由于作者水平有限，书中难免存在不妥或疏漏之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

2010年8月于北京科技大学

目　录

第一章　行　列　式

行列式的概念是从解线性方程组的问题中引入的，我们把未知量的最高次数是一次的方程组称为线性方程组．行列式是研究线性方程组、矩阵等问题的重要工具，在许多实际问题中都有重要应用．

本章主要讨论下列几个问题：

（1）行列式的定义．

（2）行列式的基本性质及计算方法．

（3）行列式的应用——克莱姆（Cramer）法则．

第一节　二阶、三阶行列式

本节从求解线性方程组入手，引入行列式的概念．用消元法解下面的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

为消去未知量 x_2，以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘方程组（1.1）的第一个方程和第二个方程，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

类似地，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当（$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$）$\neq 0$ 时，求得方程组（1.1）的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

式（1.2）中 x_1、x_2 的分母相同，而且只与方程组（1.1）中 x_1、x_2 的系数有关，如果把这些系数按原来方程组中的位置写出，便于我们记忆式（1.2），引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，即

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

我们将 $\boldsymbol{D}$ 称为方程组的系数行列式．其中 a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22} 称为这个二阶行列式的元素．对二阶行列式的元素 a_{ij}，i 表示行标，j 表示列标．二阶行列式包含 2 行 2 列 4 个元素；横排称为行，竖排称为列；从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线，从右上角到左下角的对角线称为行列式的次对角线（或副对角线）．

若将行列式 $\boldsymbol{D}$ 中的第一列元素换成方程组中的常数项，得到行列式

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

若将行列式 $\boldsymbol{D}$ 中的第二列元素换成方程组中的常数项，得到行列式

$$\boldsymbol{D}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

由二阶行列式的定义知，$\boldsymbol{D}_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$，$\boldsymbol{D}_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$，于是式（1.2）可以写成

$$x_1 = \frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}}, x_1 = \frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}}$$

这种表示不仅简单，而且便于记忆. 上述行列式的定义可用对角线法则来记忆.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

于是二阶行列式等于主对角线上两个数的乘积减去副对角线上两个数的乘积.

注意 行列式是一个数.

【例 1.1】 $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}=4\times5-3\times7=-1.$

【例 1.2】 求解二元线性方程组：

（1）$\begin{cases}2x_1+x_2=1\\x_1+2x_2=3\end{cases}$，　　（2）$\begin{cases}2x_1-3x_2-12=0\\3x_1+7x_2+5=0\end{cases}$.

解 （1）方程组的系数行列式为

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

而

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad \boldsymbol{D}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

所以方程组的解为

$$x_1 = \frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}} = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}} = \frac{5}{3}$$

（2）先把方程组变为一般形式

$$\begin{cases}2x_1-3x_2=12\\3x_1+7x_2=-5\end{cases}$$

因为

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 23, \boldsymbol{D}_1 = \begin{vmatrix} 12 & -3 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = 69, \boldsymbol{D}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -46$$

所以方程组的解是

$$x_1 = \frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}} = 3, \quad x_2 = \frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}} = -2$$

三元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases} \tag{1.3}$$

与二元线性方程组类似，用消元法可得到线性方程组（1.3）的解

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}}\\ x_2&=\frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}}\\ x_3&=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}} \end{aligned}\right\}\quad(1.4)$$

这里，假设 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\neq0$，这个结果比二元线性方程组的解更复杂．作类似的讨论，引入三阶行列式的概念，称符号

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}&=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\\ a_{21}a_{22}a_{23}\\ a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\\ &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\end{aligned}\quad(1.5)$$

为三阶行列式．三阶行列式含有 3 行 3 列，共 9 个元素，式（1.5）等式右边的代数式称为三阶行列式的展开式，展开式为 6（3!）项的代数和，每一项取自三阶行列式不同行不同列的 3 个元素的乘积.

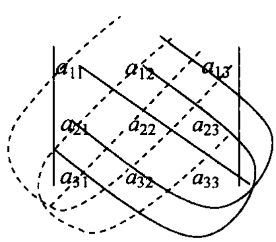
$\boldsymbol{D}$ 为方程组（1.3）的系数行列式．令式（1.4）的分子分别等于

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\boldsymbol{D}_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}$$

其中，$\boldsymbol{D}_1$，$\boldsymbol{D}_2$，$\boldsymbol{D}_3$ 是系数行列式 $\boldsymbol{D}$ 的第一、第二、第三列换成相应方程组右边的常数项得到的，则方程组（1.3）的解为

$$x_1=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}},x_2=\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}},x_3=\frac{\boldsymbol{D}_3}{\boldsymbol{D}}$$

三阶行列式（1.5）的值如何求呢？与二阶行列式类似，引入对角线法则，很容易把三阶行列式的展开式各项写出来.



实连线元素乘积取正号，虚连线元素乘积取负号.

【例 1.3】 计算三阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4\\ -2 & 2 & 1\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4\\ &\quad-(-4)\times2\times(-3)-2\times(-2)\times(-2)-1\times1\times4\end{aligned}$$

$$=-4-6+32-24-8-4=-14$$

【例 1.4】 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则，有

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{vmatrix}=24$$

【例 1.5】 利用行列式，求解三元线性方程组.

$$(1)\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=0\\3x_1+2x_2-5x_3=1,\\x_1+3x_2-2x_3=4\end{cases}\qquad(2)\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=13\\x_1+x_2+x_3=10\\2x_1+3x_2-x_3=1\end{cases}.$$

解 （1）系数行列式为 $D=\begin{vmatrix}2&-1&1\\3&2&-5\\1&3&-2\end{vmatrix}=-8+5+9-2-6+30=28\neq0$，分子行列式分别为

$$D_1=\begin{vmatrix}0&-1&1\\1&2&-5\\4&3&-2\end{vmatrix}=13,\ D_2=\begin{vmatrix}2&0&1\\3&1&-5\\1&4&-2\end{vmatrix}=47,\ D_3=\begin{vmatrix}2&-1&0\\3&2&1\\1&3&4\end{vmatrix}=21$$

于是，方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{13}{28},\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{47}{28},\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}$$

（2）系数行列式为 $D=\begin{vmatrix}1&-1&2\\1&1&1\\2&3&-1\end{vmatrix}=-1-2+6-4-1-3=-5\neq0$，

$$D_1=\begin{vmatrix}13&-1&2\\10&1&1\\1&3&-1\end{vmatrix}=-5,\ D_2=\begin{vmatrix}1&13&2\\1&10&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=-10,\ D_3=\begin{vmatrix}1&-1&13\\1&1&10\\2&3&1\end{vmatrix}=-35$$

于是，方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=2,\ x_3=\frac{D_3}{D}=7$$

习 题 1.1

1. 判断题（判断下列结论是否正确，正确的在括号里面画“√”，错误的画“×”）

（1）行列式的结果是一个数. （ ）

（2）$\begin{vmatrix}1&1\\2&4\end{vmatrix}=1\times4+1\times2=6.$ （ ）

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=6.$ (   )

(4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}=abc.$ (   )

2. 单项选择题

(1) 行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ 2 & k \end{vmatrix}\neq 0$ 的充分必要条件是（ ）.

A. $k\neq -1$　　B. $k\neq 2$　　C. $k\neq -1$ 且 $k\neq 2$　　D. $k=-1$ 或 $k\neq 2$

(2) 行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$ 的充分必要条件是（ ）.

A. $k=-2$　　B. $k=0$　　C. $k=3$ 或 $k=-2$　　D. $k=-3$.

(3) 如果 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=1$，则下列（ ）是方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$ 的解.

A. $x_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$x_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

B. $x_1=-\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$x_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

C. $x_1=\begin{vmatrix} -b_1 & a_{12} \\ -b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$x_2=\begin{vmatrix} a_{11} & -b_1 \\ a_{21} & -b_2 \end{vmatrix}$

D. $x_1=\begin{vmatrix} -b_1 & -a_{12} \\ -b_2 & -a_{22} \end{vmatrix}$，$x_2=-\begin{vmatrix} -a_{11} & -b_1 \\ -a_{21} & -b_2 \end{vmatrix}$

(4) 若行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & x & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$，则 $x=$（ ）.

A. -3　　B. 2　　C. -1　　D. 1

3. 当 x 取何值时，$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 2 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}\neq 0$.

4. 行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是什么？

5. 计算下列行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$；　(5) $\begin{vmatrix} \lambda-4 & 5 \\ 3 & \lambda-4 \end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$；　(8) $\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -3 \\ 2 & \lambda-2 & 1 \\ -3 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$.

6. 利用二阶、三阶行列式解下列线性方程组.

(1) $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 4x+3y=0 \end{cases}$；　(2) $\begin{cases} 2x-y=7 \\ 3x+5y=-9 \end{cases}$；

(3) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_2+2x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=1 \end{cases}$；　(4) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2-x_3=1. \\ 2x_1-3x_2+x_3=2 \end{cases}$

第二节　排列与逆序

定义 1.1　由自然数 1，2，…，n 所构成的一个有序数组，称为这 n 个数的一个 n 级排列. 其中，n 个自然数 1，2，…，n 由小到大的自然顺序排列 $12\cdots n$ 称为 n 级自然排列.

【例 1.6】　3142 是 1，2，3，4 这 4 个数的一个 4 级排列.

43125 是 1，2，3，4，5 这 5 个数的一个 5 级排列.

123 是 1，2，3 这 3 个数的一个 3 级自然排列.

显然，n 级排列共有 $n!$ 个.

定义 1.2　在一个排列中，如果一个大数排在一个小数之前，则这两个数构成该排列的一个逆序. 排列 j_1，j_2，…，j_n 所含有的逆序的总数称为该排列的逆序数，记作 $\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)$. 逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

【例 1.7】　在排列 3214 中，3 的逆序为 0，2 的逆序为 1，1 的逆序为 2，4 的逆序为 0，因此，排列 3214 的逆序数 $\tau(3214)=0+1+2+0=3$，排列 3214 为奇排列.

思考：排列 54123、12345、54321 的逆序数分别是什么？

定义 1.3　在一个排列中，某两个数的位置互换，其余的数不动，就得到一个新排列，这样的变换称为一个对换. 若对换的两个数相邻，则称为相邻对换.

定理 1.1　对换改变排列的奇偶性.

证　(1) 相邻对换

考察排列 $a_1a_2\cdots a_tabc_1c_2\cdots c_r$，将 a,b 进行一次对换，得到排列 $a_1a_2\cdots a_tbac_1c_2\cdots c_r$. 显然，对换后，$a,b$ 前后数字的逆序数是不变的，而对 a,b 有两种情况：①当 $a<b$ 时，对换后 a 的逆序增加 1，b 的逆序不变；②当 $a>b$ 时，对换后 a 的逆序不变，b 的逆序数减少 1，所以，相邻对换改变排列的奇偶性.

(2) 一般情况

对排列

$$a_1,a_2,\cdots,a_t,a,b_1,b_2,\cdots,b_s,b,c_1,c_2,\cdots,c_r \tag{1.6}$$

进行一次对换，得到排列

$$a_1,a_2,\cdots,a_t,b,b_1,b_2,\cdots,b_s,a,c_1,c_2,\cdots,c_r \tag{1.7}$$

我们证明排列 (1.7) 与排列 (1.6) 的奇偶性不同. 首先在排列 (1.6) 中将数 a 依次与其右边的数进行相邻对换，进行 s 次相邻对换后得到排列

$$a_1,a_2,\cdots,a_t,b_1,b_2,\cdots,b_s,a,b,c_1,c_2,\cdots,c_r \tag{1.8}$$

再将排列（1.8）中的数 b 依次与其左边的数进行相邻对换，进行 $s+1$ 次相邻对换后，排列（1.8）变为排列（1.7）. 即排列（1.6）进行 $2s+1$ 次相邻对换，就可以变为排列（1.7），由情况（1）可知，排列（1.6）与排列（1.7）的奇偶性相反.

习 题 1.2

1. 判断题（判断下列结论是否正确，正确的在括号里面画“√”，错误的画“×”）

(1) 排列 3412 是一个偶排列. （ ）

(2) 排列 213 是一个奇排列. （ ）

2. 计算下列排列的逆序数，并判断其奇偶性.

(1) 135246；

(2) 217986354；

(3) 987654321；

(4) 524179386.

3. 确定排列 $n(n-1)\cdots21$ 的逆序数.

4. 如果排列 x_1，x_2，…，x_n 的逆序数是 k，那么排列 x_n，…，x_2，x_1 的逆序数是多少?

第三节 n 阶行列式的定义

前面我们用二阶、三阶行列式表示二元、三元线性方程组的解，那么 n 个未知量 n 个线性方程组的解是否也能利用行列式将它表示出来呢? 这就需要把二阶、三阶行列式推广到一般的 n 阶行列式. 为此，首先分析三阶行列式的结构找出一般规律，然后引出 n 阶行列式的概念.

先来观察三阶行列式的结构特点.

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\\ a_{21}a_{22}a_{23}\\ a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

发现：

(1) 三阶行列式的展开式为 6(3!) 项的代数和.

(2) 等式右边的每一项都是取自不同行、不同列的 3 个元素的乘积，即每一项都可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，其中 j_1、j_2、j_3 取 1、2、3 所有可能的六种不同排列中的一个排列.

(3) 等式右边的每一项或者带正号，或者带负号. 带正号的三项，其每一元素的列标形成下面 3 个排列

$$123,\quad 231,\quad 312$$

上面 3 个排列均为偶排列. 而带负号的三项，其每一元素的列标形成下列 3 个排列

$$321,\quad 213,\quad 132$$

上面 3 个排列均为奇排列.

即 6 项中的任一项可写成 $(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，3 个数的行标为自然排列 123，列标为 1、2、3 的某一排列 $j_1j_2j_3$. 任一项的符号可由 $t=\tau(j_1j_2j_3)$ 的奇偶性确定.

将上述规律加以推广，可得到 n 阶行列式的定义.

定义 1.4 由 n^2 个数排成的 n 行 n 列的行列式，称为 n 阶行列式，其值等于所有取自不同行不同列的 n 个数的乘积的代数和，即

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.9}$$

其中，和号$\sum$是对所有的 n 级排列求和（共 $n!$ 项）. 简记为 $\boldsymbol{D}=\det(a_{ij})$，$a_{ij}$ 称为 n 阶行列式的元素.

定义 1.4 表明：①n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和，其中带正号的项和带负号的项各占一半；②n 阶行列式的每项是位于不同行不同列的 n 个元素的乘积，其符号在行标为自然序的情况下，由列标排列的逆序数来确定，即 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$.

注意 一阶行列式 $|a|=a$ 不要与绝对值相混淆.

【例 1.8】 求下列 4 阶行列式的值（上三角形行列式）.

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

解 由式 (1.9) 可得

$$\boldsymbol{D}=\sum_{(j_1j_2j_3j_4)}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

因为行列式的第 4 行除 a_{44}外，其余元素均为 0，所以 j_4 取 4，又因为第 3 行除 a_{33}、a_{34}外，其余元素均为 0，按照定义，每项元素应取自不同行不同列，所以 j_3 不能取 4，j_3 只能取 3. 同理，j_2 只能取 2，j_1 只能取 1. 所以只有 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$不为 0，其余各项均为 0，而这一项的每一元素都在主对角线上，且 1234 为偶排列，所以

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

对于 n 阶上三角形行列式，下三角形行列式，我们同样可以证明以下结论：

n 阶上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例如：$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1\times 2\times 4\times 6 = 48.$

类似，可得下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地，对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例如：$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1\times 2\times 3\times 4\times 5 = 120.$$

【例 1.9】 计算右下三角形行列式

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \iddots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由式 (1.9)

$$\boldsymbol{D} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j1} a_{2j2} \cdots a_{njn}$$

其中，$a_{1j1}a_{2j2}\cdots a_{njn}$为不同行不同列的$n$个数的乘积. 第一行除了$a_{1n}$外其余元素都为 0，故非零项的第一个数取$a_{1n}$，同理，第二行只能取$a_{2n-1}$，…，第$n$行只能取$a_{n1}$. 因此，行列式只有一个非零项，即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \iddots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 1)} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1} \end{aligned}$$

例如：4 阶行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&3&0&0\\4&0&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{4(4-1)}{2}}1\times2\times3\times4=24.$

定理 1.2 n 阶行列式也可定义为

$$\boldsymbol{D}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{1.10}$$

即每一项的列标为自然排列时，由行标排列的逆序数决定其符号.

习 题 1.3

1. 判断题（判断下列结论是否正确，正确的在括号里面画“√”，错误的画“×”）

（1）n 阶行列式零元素的个数等于 n 个，则 n（>2）阶行列式的值必为 0. （ ）

（2）4 阶行列式的展开式为 24 项的代数和. （ ）

（3）一阶行列式 $|-5|=5$. （ ）

（4）行列式主对角线上的元素全为 0，则行列式的值必为 0. （ ）

2. 填空题

（1）在 5 阶行列式中，乘积项 $a_{12}a_{21}a_{35}a_{43}a_{54}$ 的符号为________.

（2）行列式 $\begin{vmatrix}0&a&0&0\\b&c&0&0\\0&0&d&e\\0&0&0&f\end{vmatrix}=$________.

（3）行列式 $\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&2&3&0\\1&2&3&4\end{vmatrix}=$________.

3. 单项选择题

（1）设 D 为 6 阶行列式，则（ ）为行列式 $\boldsymbol{D}$ 中带负号的项.

A. $a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{55}a_{62}$　　B. $a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{16}$

C. $a_{21}a_{32}a_{43}a_{16}a_{55}a_{64}$　　D. $a_{21}a_{32}a_{43}a_{54}a_{65}a_{16}$

（2）4 阶行列式中，含有因子 $a_{22}a_{34}$ 的项有（ ）项.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

（3）n 阶行列式 $\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&1&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&1&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$ 的值为（ ）.

A. $(-1)^n$　　B. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$　　C. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$　　D. 1

(4) 令 $f(x)=\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$，那么 $f(x)$ 的一次项系数为（ ）.

A. 1 B. 2 C. -1 D. -2

4. 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

第四节 行列式的性质

当行列式的阶数 n 较大时，如果用定义直接去计算 n 阶行列式的值，必须计算 $n!$ 项的 n 个元素乘积的代数和，计算量是很大的. 本节将介绍行列式的性质，利用这些性质，可以把复杂的行列式转化为较简单的行列式来计算，达到简化行列式计算的目的.

定义 1.5 把行列式 $\boldsymbol{D}$ 的行列互换后得到的行列式称为 $\boldsymbol{D}$ 的转置行列式，记为 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$.

若

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1 行列式 $\boldsymbol{D}$ 与它的转置行列式 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$ 相等，即 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$.

证 记 $\boldsymbol{D}=\det(a_{ij})$ 的转置行列式

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，按定义

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^{t}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^{t}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

而由定理 1.2，有

$$\boldsymbol{D}=\sum(-1)^{t}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

故

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D}$$

性质 1 表明，在行列式中，行和列的地位是对称的. 即对于行成立的性质，对于列也同样成立；反之亦然.