普通高等专科教育药学类规划教材

高等数学解题指导

（供药学专业用）

主编　杨继泰

主审　张德舜

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中国医药科技出版社

普通高等专科教育药学类规划教材

高等数学解题指导

（供药学专业用）

主　　编　**杨继泰**（开封医学高等专科学校）

主　　审　**张德舜**（中国人民解放军北京医学高等专科学校）

参编人员　**尹　舲**（湖北药检高等专科学校）

单华宁（南京海军医学高等专科学校）

杨保华（开封医学高等专科学校）

冯　丹（中国人民解放军北京医学高等专科学校）

中国医药科技出版社

登记证号：（京）075 号

内容简介

本书是普通高等专科教育药学类规划教材建设委员会组织编写的《高等数学》的配套教材。

全书共九章，每章是由内容提要、解题方法范例、习题解答（包括自测题）和备选题四部分组成。书后还附有备选题答案。

本书可供普通高等学校药学类专科师生使用，也可供职大、夜大、函大、电大和自学《高等数学》者参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学解题指导/杨继泰主编．—北京：中国医药科技出版社，1998.7

普通高等专科教育药学类规划教材（供药学专业用）

ISBN 7-5067-1782-4

Ⅰ．高… Ⅱ．杨… Ⅲ．高等数学-学校-教材 Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 07076 号

中国医药科技出版社　出版

（北京海淀区文慧园北路甲 22 号）

（邮政编码 100088）

本社激光照排室　排版

北京昌平精工印刷厂　印刷

全国各地新华书店　经销

*

开本 787×1092mm $^{1}/_{16}$　印张 18

字数 413 千字　印数 4001－8000

2002 年 7 月第 1 版第 2 次印刷

定价：20.00 元

普通高等专科教育药学类

规划教材建设委员会名单

序　言

我国药学高等专科教育历史悠久，建国后有了较大发展。但几十年来一直未能进行全国性的教材建设，在一定程度上影响了专科教育的质量和发展。改革开放以来，专科教育面临更大的发展，对教材的需要也更为迫切。

国家医药管理局科技教育司根据国家教委（1991）25 号文的要求负责组织、规划高等药学专科教材的编审出版工作。在国家教委的指导下，在对全国高等药学专科教育情况调查的基础上，普通高等专科教育药学类教材建设委员会于 1993 年底正式成立，并立即制订了“八五”教材编审出版规划。在全国 20 多所医药院校的支持下，成立了各门教材的编审专家组（共 51 人）和编写组（共 86 人），随即投入了紧张的编审、出版工作。经 100 多位专家组、编写组教师和中国医药科技出版社的团结协作、共同努力，建国以来第一套普通高等专科教育药学类规划教材终于面世了。

该套规划教材是国家教委“八五”教材建设的一个组成部分，编写原则是既要保证教材质量，又要反映专科的特色。同时，由于我们组织了全国设有药学专科教育的大多数院校和大批教师参加编审工作，既强调专家审稿把关的作用，也注意发挥中、青年教师的积极性，使该套规划教材能在较短时间内以较高质量出版，适应了当前高等药学专科教育发展的需求。在编写过程中，也充分注意目前高等专科教育中有全日制教育、函授教育、自学高考等多种办学形式，力求使该套规划教材具有通用性，以适应不同办学形式的教学要求。

高等药学专科教育的主要任务是为医药行业生产、流通、服务、管理第一线培养应用型技术人才。为此，在第一套普通高等专科教育药学类规划教材面世之后，我们又立即组织编审、出版了这套配套教材（实验指导、解题指导），以加强对学生的实验教学，培养实际操作能力。从现实国情考虑，我们统筹规划、全面组织教材建设活动，是为了优化教材编审队伍，确保教材质量，规范教材规格。同时，为了照顾各地办学条件和实际需求的不同，在保证基本规格的前提下，提供了若干可供灵活选择的材料。今后，规划教材的使用情况将作为教学质量评估的基本依据之一。

配套教材出齐之后，我们将大力推动以上两套教材的使用，并组织修订及评优工作。竭诚欢迎广大读者对这两套教材的不足之处提出宝贵意见。

普通高等专科教育药学类
规划教材建设委员会
1998 年 3 月

前　言

《高等数学解题指导》是为了帮助普通高等学校药学类专科学生学习“高等数学”，由国家医药管理局、普通高等专科教育药学类规划教材建设委员会组织编写的配套教材。其内容有：函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程、多元函数微分学及二重积分共九章。

各章由下述四个部分组成：

1. 内容提要　提及本章主要内容、概念、定义、性质、定理、公式及注意事项等。

2. 解题方法范例　通过范例分析解答和指导，向广大读者介绍了关于数学、物理、化学、生物学、药物动力学等一些习题进行解答的科学方法和技能技巧。书中的范例，是从其它各类习题中挑选出来的，具有典型性和示范性。不少范例解题思路清晰、分析透彻、运用一题多解的方法，指导得法。若能熟练地掌握这些例题的解法思路规律与技巧，就可以举一反三，触类旁通。这对广大读者开阔思路，归纳解题方法，提高运算速度，深入对数学基础知识的理解，提高分析和解决问题的能力都是大有益处的。

3. 习题解答　这一部分是本书的重点。检验高等数学学习效果的一个重要标志就是是否会做题。我们对张德舜主编的《高等数学》一书中绝大部分习题进行了较详细地解答，并在许多习题解答的前后加了“思路”、“方法”和“注意”。本书具有内容比较丰富、解题方法别具一格、重点突出、思路清晰、通俗易懂等特点，是一本解题指导性较强的书。希望广大读者在解题时，做到理解题意，明确解题步骤，掌握解题方法和技巧，只有这样才能不断地提高自己分析问题和解决问题的能力。倘若不求甚解，照抄解答，这就违背了出版此书的本意。

4. 备选题　它们是习题的补充，供教师和学生选用。

我们殷切期望通过本书，能有助于读者加深对《高等数学》教材内容的理解，在提高基本运算、分析解决实际问题能力和培养自学能力等方面起到一定的作用。

参加本书编写工作的有：尹舲（第一、二章）、单华宁（第三、七章）、冯丹（第五、六章）、杨继泰（第八、九章）。第四章是由河南开封医学高等专科学校杨保华编写，该校唐宗贤做了大量的誊写工作。全书稿是由中国人民解放军北京医学高等专科学校张德舜教授审定。本书在编写过程中始终得到国家医药管理局、普通高等专科教育药学类规划教材建设委员会和各有关院校领导的关心和支持，在此一并表示衷心的致谢。

由于编者水平有限，再加上时间仓促，书中不足之处在所难免，如有误解和差错，恳请读者赐教指正，不胜感谢。

编　者

1997 年 12 月

目　　录

第一章　函数与极限

一、内　容　提　要

1. 函数

(1)函数的定义

(2)函数的表示法

①列表法。②图示法。③解析法。

(3)函数的几种特征

①单值性与多值性。②单调性。③有界性。④奇偶性。⑤周期性。

(4)分段函数与反函数

(5)初等函数

①基本初等函数。②复合函数。③初等函数。

2. 极限的定义

(1)数列的极限

①描述性定义。②"ε-N"定义。

(2)$x\to\infty$时函数的极限

①描述性定义。②"ε-M"定义。

(3)$x\to x_0$ 时函数的极限

①描述性定义。②"ε-σ"定义。

3. 无穷小与无穷大

(1)无穷小量定义

(2)无穷大量定义

(3)关于无穷小的几个定理

(4)无穷小的比较

4. 极限的四则运算法则，两个重要极限

(1)极限的四则运算法则

(2)两个重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;$\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=e$

(3)极限存在的两个准则：

准则Ⅰ：两边夹法则；准则Ⅱ：单调有界数列必有极限。

5. 函数的连续性

(1)函数连续的定义

(2)函数间断点及分类

(3)初等函数的连续性

(4)闭区间上连续函数的性质

①最大值、最小值定理。②介值定理。

二、解题方法范例

1. 函数概念部分

(1)判断函数是否为同一函数

例 1.1 下面四组函数中是相同函数的有

(A)$f(x)=\mathrm{arctg}x(x>0)$， $g(x)=\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}(x>0)$；

(B)$f(x)=x$， $g(x)=\sqrt{x^2}$；

(C)$f(x)=x+1$， $g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$；

(D)$f(x)=\lg x^2$， $g(x)=2\cdot\lg|x|$。

答 正确答案为(D)。因为

(A)两函数不同，虽然两函数定义域相同，但它们的对应关系不同。

(B)两函数不同，虽然两函数定义域相同，但它们的对应关系不同。

(C)两函数不同是因为定义域不同，$f(x)$的定义域$(-\infty,+\infty)$，$g(x)$的定义域$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$。

(D)两函数的定义域和对应关系都相同。

注意 判断两个函数是否为同一函数要看两个方面：①对应关系是否相同。②定义域是否相同。

(2)函数定义域、值域的确定

例 1.2 求函数 $\lg(x-1)+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$的定义域。

解 要使 $\lg(x-1)$有意义必须 $x-1>0$；要使$\frac{1}{\sqrt{x+1}}$有意义必须 $x+1>0$；解不等式组

$$\begin{cases}x-1>0\\x+1>0\end{cases} \quad 得 \quad x>1$$

故函数 $\lg(x-1)+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$的定义域为$(1,+\infty)$。

例 1.3 设 $f(x)$的定义域是$[-2,2]$，则

$f(1+x)+f(1-x)$的定义域是______。

(A) $[-1,1]$; (B) $[-2,2]$;

(C) $[-3,1]$; (D) $[-1,3]$。

答 正确答案为(A)。

因为$f(x)$的定义域为$[-2,2]$,则对于$f(x+1)$必有$-2\leqslant 1+x\leqslant 2$,$-3\leqslant x\leqslant 1$,即$f(1+x)$的定义域为$[-3,1]$;对于$f(1-x)$必有$-2\leqslant 1-x\leqslant 2$,则$-1\leqslant x\leqslant 3$,即 $f(1-x)$的定义域为$[-1,3]$。

所以$f(1+x)+f(1-x)$的定义域为$[-3,1]\cap[-1,3]$,即$[-1,1]$。

例 1.4

求 $f(x)=\begin{cases}x, 0\leqslant x<1\\ x^2, 1\leqslant x\leqslant 4\\ 2^x, 4<x<+\infty\end{cases}$ 的定义域。

解 分段函数是一个函数,分段函数的定义域$[0,1)\cup[1,4]\cup(4,+\infty)$是各段自变量允许值集合之并,因此$f(x)$的定义域是,$[0,+\infty]$。

注意 函数定义域的确定,当函数反映实际问题时,由实际意义确定;当函数由解析式子给出时可遵循以下原则:

①分式中分母不为零。②偶次根式内非负。③对数真数大于零。④三角函数、反三角函数根据其定义域。⑤经四则运算所成的新函数的定义域由各组成函数定义域的公共部分(交集)确定。⑥分段函数的定义域是各段自变量允许值集合之并。

(3)函数性质判定

例 1.5 在R上,下列函数是奇函数的是

(A)$y=x^2(2^x+2^{-x})$; (B)$y=\sin x+\cos x$;

(C)$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$; (D)$y=x\cdot\arcsin x$。

答 正确答案应为(C)。因为

对 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$有

$$\begin{aligned}y(-x)&=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)\\&=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\\&=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})\\&=-y(x)\end{aligned}$$

因此$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$是奇函数。用函数奇偶性定义可以验证(A)(D)为偶函数,(B)为非奇非偶函数。

例 1.6 设$f(x)$为定义在$(-\infty,+\infty)$内任何不恒为零的函数,则下列函数中必为奇函数的有__________。

(A)$f(x)-f(-x)$; (B)$f(x)+f(-x)$;

(C)$f(-x)-f(x)$; (D)$f(-x)+f(-x)$。

解 设$F(x)=f(x)-f(-x)$,则

$$F(-x)=f(-x)-f(x)$$

$$= -[f(x)-f(-x)]$$
$$= -F(x)$$

因此　$f(x)-f(-x)$必为奇函数，故此题选(A)。

注意　一般讨论函数的奇偶性应按其定义来判断，此外常用到以下一些性质：

①两个偶函数之和仍为偶函数，两个奇函数之和仍为奇函数。②两个偶函数或两个奇函数之积或商(分母不为零)是偶函数。③一个偶函数与一个奇函数之积或商(分母不为零)是奇函数。

记住　形如$f(x)+f(-x)$的函数为偶函数；$f(x)-f(-x)$的函数为奇函数；$\ln(x+\sqrt{1+x^2})$为奇函数。

(4)反函数求法

例1.7　在下列函数中反函数就是其本身的函数是__________。

(A)$y=\dfrac{1-x}{1+x}(x\neq -1)$；　　(B)$y=1+\lg(x+2)$；

(C)$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$；　　(D)$y=\sqrt{1-x^2}\quad(-1\leqslant x\leqslant 0)$。

答　此题应选(A)。

因为从$y=\dfrac{1-x}{1+x}$中解出$x=\dfrac{1-y}{1+y}$，再用x表示自变量，y表示因变量得$y=\dfrac{1-x}{1+x}$的反函数为$y=\dfrac{1-x}{1+x}(x\neq -1)$。所以$y=\dfrac{1-x}{1+x}(x\neq -1)$的反函数就是其本身函数。

采用同样方法可得$y=1+\lg(x+2)$的反函数为$y=10^{x-1}-2$；$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$的反函数为$y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$；$y=\sqrt{1-x^2}(-1\leqslant x\leqslant 0)$的反函数为$y=\sqrt{1-x^2}(0\leqslant x\leqslant 1)$。

例1.8　设$f(x)=\dfrac{1-3x}{x-2}$与$g(x)$的图形关于$y=x$对称，则$g(x)=$__________。

(A)$\dfrac{1+2x}{x+3}$；　　(B)$\dfrac{1-3x}{1+2x}$；

(C)$\dfrac{x+3}{1+2x}$；　　(D)$\dfrac{x-2}{1-3x}$。

答　此题应选(A)。

因为$f(x)$与它的反函数$f^{-1}(x)$关于直线$y=x$对称，而$f(x)=\dfrac{1-3x}{x-2}$的反函数为$\dfrac{1+2x}{x+3}$，

所以$g(x)=\dfrac{1+2x}{x+3}$是$f(x)$的反函数，二者关于直线$y=x$对称。

例1.9

求函数$y=\begin{cases} x, & -\infty<x<1 \\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4 \\ 2^x, & 4<x<+\infty \end{cases}$的反函数。

解　函数y是一个分段函数，由三个解析式表示，定义域由三个区间组成，在题设条件下，$y=x$的反函数为$y=x$，定义域$(-\infty,1)$；$y=x^2$的反函数为$y=\sqrt{x}$，定义域$[1,16]$；

$y=2^x$ 的反函数为 $y=\log_2 x$，定义域$(16,+\infty)$。因此，这个分段函数的反函数为

$$y=\begin{cases} x, & -\infty<x<1 \\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16 \\ \log_2 x, & 16<x<+\infty \end{cases}$$

注意 ①求一个函数的反函数的关键是从直接函数 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$，再用 x 表示自变量，y 表示因变量，从而得 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$。②直接函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称。③反函数的定义域是原函数(直接函数)的值域。

(5)复合函数的分解

例 1.10 将复合函数 $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$ 分解成基本初等函数，正确的是__________。

(A)$y=u^{\frac{1}{2}},u=\ln\sqrt{x}$； (B)$y=\ln u,u=x^{\frac{1}{2}}$；

(C)$y=u^{\frac{1}{2}},u=\ln v,v=x^{\frac{1}{2}}$； (D)$y=\sqrt{\ln u},u=x^{\frac{1}{2}}$。

答 此题应选(C)。因为

$y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$ 应分解为 $y=u^{\frac{1}{2}},u=\ln v,v=x^{\frac{1}{2}}$；而(A)中 $u=\ln\sqrt{x}$ 不是基本初等函数的形式；(B)将 $y=\ln u,u=x^{\frac{1}{2}}$ 复合在一起不是 $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$；(D)中 $y=\sqrt{\ln u}$ 不是基本初等函数形式。

例 1.11 $y=\sqrt{2+\cos^2 x}$ 是由哪几个基本初等函数复合而成？

解 $y=\sqrt{2+\cos^2 x}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=2+v^2$，$v=\cos x$ 复合而成的。

注意 ①分解复合函数是采取由外到里“层层剥皮”的办法，层层剥掉基本初等函数的“外层”，从而拆成若干个基本初等函数或基本初等函数的四则运算形式。②分解一定要“完全”，即拆成的各函数必须是基本初等函数或基本初等函数的四则运算形式，否则应继续分解，直至“完全”分解。③分解后的各函数复合后应能还原或分解前的函数原样。

2. 函数极限部分

(1)判断极限的存在性

例 1.12 下列数列极限存在的有__________。

(A)$f(n)=(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$； (B)$f(n)=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$；

(C)$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{1+n}, & n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{n}{1-n}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$； (D)$f(n)=\begin{cases}\dfrac{2^n-1}{2^n}, & n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{2^n+1}{2^n}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$。

答 此题应选(D)。

因为 $f(n)=(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$ 的 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 不存在；$f(n)=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$ 在 0，1 两点跳跃，极限不存在；

$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{1+n}, & n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{n}{1-n}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$ 在 -1，1 间跳跃，极限不存在；而 $f(n)=\begin{cases}\dfrac{2^n-1}{2^n}, & n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{2^n+1}{2^n}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$ 可写

为 $f(n)=1+\frac{(-1)^n}{2^n}$，当 $n\to\infty$时，$f(n)=1+\frac{(-1)^n}{2^n}\to 1$ 极限存在。

例 1.13

设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1}, x<0\\ x-4, x\geqslant 0\end{cases}$ 问：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$是否存在？

解 因为$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x-1}=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x-4)=-4$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在。

注意 ①判断数列极限是否存在一般使用定义进行判断。②因为分段函数衔接点左右解析表达式不同，所以在判断分段函数衔接点的极限是否存在时一定要注意左右极限，并使用极限存在的充分必要条件。即

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在$\Longleftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$来判定。

(2)求极限的方法

①利用无穷小量与无穷大量的关系求极限。

例 1.14 求$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x-1}$。

解 因为$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)=2\neq 0$，$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+1}=0$，$\frac{x-1}{x^2+1}$是$x\to 1$时的无穷小量，所以$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x-1}=\infty$(无穷小量的倒数是无穷大量)。

注意 当分子极限不为零，分母极限为零时，分式的极限为∞。

②对一些不能直接使用极限四则运算法则的未定式求极限的方法。

例 1.15 求$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$。

解 当$x\to 1$时，分子分母极限均为零，不能直接使用极限四则运算法则，设法分解因式，消去零因子$(x-1)$再求极限。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)}{(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}\\&=\frac{m}{n}\end{aligned}$$

例 1.16 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt[4]{1-x}}$。

解 当 $x\to 0$ 时，分子分母极限都为零，不能直接使用极限四则运算法则。若对分母有理化又比较复杂，这里采用变量代换法。即

令 $\sqrt[4]{1-x}=t$，则 $x=1-t^4$。

当 $x\to 0$ 时，则 $t\to 1$，因此

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x}{1-\sqrt[4]{1-x}}=\lim_{t\to1}\frac{1-t^4}{1-t}$$
$$=\lim_{t\to1}(1+t^2)(1+t)$$
$$=4$$

例 1.17 求$\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$。

解 当$x\to\infty$时，$x(\sqrt{x^2+1}-x)$中x都趋于无穷，极限不存在，因此不能直接使用极限四则运算法则。

$$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$$
$$=\frac{1}{2}$$

例 1.18 求$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)$。

解 当$x\to1$时，则$\frac{1}{1-x}\to\infty$，$\frac{2}{1-x^2}\to\infty$ 属“$\infty-\infty$”型的不定型极限。

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1+x-2}{1-x^2}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(1-x)(1+x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-1}{1+x}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

例 1.19 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$。

解 当$n\to\infty$时，$\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}$是无穷项求和问题，不能直接使用和的极限法则。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n+2}-\frac{n}{2}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n+1)}{2(n+2)}-\frac{n}{2}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n+1)-n(n+2)}{2(n+2)}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2(n+2)}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

注意 对一些不能直接使用极限运算法则去求的极限，一般要对原式进行恒等变形，然

后求极限。常见方法有

1° 对分子分母进行因式分解,消去公因子再求极限(如例 1.15)。

2° 对无理分式,分子分母进行"有理化",消去公因子再求极限(如例 1.17)。

3° 对有些无理式求极限,可通过"变量代换"化简后再求极限(如例 1.16)。

4° 对"$\infty-\infty$"型极限,一般可以先通分、化简再求极限(如例 1.18)。

5° 对等差数列、等比数列极限,先用求和公式求和后再求极限(例 1.19)。

6° $x\to\infty$时求有理分式的极限,见教材 P_{25}。

③用无穷小量的性质求极限。

例 1.20 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cos x}{\sqrt{1+x^3}}$。

解 因为$|\cos x|\leqslant 1$,$\cos x$ 是有界变量。

而
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+x}}=0$$

当 $x\to\infty$时,$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^3}}$是无穷小量,

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cos x}{\sqrt{1+x^3}}=0$(有界变量乘无穷小量为无穷小量)。

注意 此题使用了有界变量与无穷小量的乘积为无穷小量这个定理求极限,这种用法非常普遍。例如求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$,因为 $x\to\infty$时 $\sin x$ 的极限不存在,所以不能用积或商的极限运算法则。只有根据$x\to\infty$时$\dfrac{1}{x}$是无穷小量,$\sin x$ 是有界变量来判断出$\dfrac{\sin x}{x}$是 $x\to\infty$过程中的无穷小量。

④利用两个重要极限求极限。

例 1.21 下列解法正确的是________。

(A)$\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1$;　(B)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

(C)$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin|x-1|}{x-1}=1$;　(D)$\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sin\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}=1$。

答 此题应选(D)。

因为当 $x\to0$ 时,x 是无穷小量,$\sin\dfrac{1}{x}$有界,所以$\lim\limits_{x\to0}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=0\neq1$,因此(A)的解法不对;而$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=0\neq1$(道理同上),所以(B)也不对;

因为
$$\lim_{x\to1^-}\frac{\sin|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{-\sin(x-1)}{x-1}=-1$$
$$\lim_{x\to1^+}\frac{\sin|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}=1$$