普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学基础教程

多元函数微积分（第二版）

王宝富　钮　海

3

高等教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学基础教程

多元函数微积分

Duoyuan Hanshu Weijifen

（第二版）

王宝富　　钮　海

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，根据新世纪科技人才对数学素质的要求，针对当前高等院校的教学实际而编写。本书注意选择合理的教材内容，突出实际背景，强调数学建模过程与数学理论叙述紧密结合，精选应用实例，重视数学知识的应用，精简课程内容，更新理论体系结构，力图将数学建模的思想、方法融于教材，使教材易教易学。

本书内容包括：多元函数微分学及其应用、多元数量函数的积分及其应用、多元向量函数的积分与场论初步、无穷级数与级数逼近等四章。各章均配有应用实例与习题，书末附有习题答案及索引。

本书可供一般高等院校理工科非数学类各专业使用，也可供其他院校相近专业使用，同时也可作为工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

多元函数微积分/王宝富，钮海．—2版．—北京：高等教育出版社，2010.2

大学数学基础教程

ISBN 978-7-04-014422-2

Ⅰ.①多… Ⅱ.①王…②钮… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第006535号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	肥城新华印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	2004年12月第1版
开　　本	787×960　1/16		2010年2月第2版
印　　张	16.5	印　　次	2010年2月第1次印刷
字　　数	300 000	定　　价	18.10元

物料号　14422-00

第二版前言

本书第一版是普通高等教育“十五”国家级规划教材，已使用5年。这其中收到许多读者的反馈信息，对本书存在的问题提出了很多宝贵意见，这对我们的修订工作起到很大的促进作用。借此再版之机，向关心和支持我们工作的广大读者，表示衷心的感谢。

为了更便于读者学习，本次修订新增了全书的索引，同时根据本书在教学使用过程中所反馈的信息，纠正了一些欠妥的文字描述及例题中的错误。

本书第一版2007年获四川大学优秀教材一等奖，第二版入选普通高等教育“十一五”国家级规划教材。对于这次修订工作，高等教育出版社、四川大学、成都信息工程学院等院校的领导和教师均给予很大的帮助，在此也向他们表示衷心的感谢。

成都信息工程学院的张志让教授细致地审阅了修订稿，并提了许多宝贵的意见，成都信息工程学院的周庆新老师指出了一版中错误之处，以上工作对提高本书的质量起了很大的作用，我们非常感谢。

本书编写工作由四川大学数学学院王宝富和钮海共同承担。作为国内较早将数学建模思想完整地融入微积分体系的教材之一，书中错误和不妥之处在所难免，希望广大读者能继续给予指正。

编者

2009年8月

第一版前言

《多元函数微积分》是普通高等教育“十五”国家级规划教材《大学数学基础教程》的第二分册，也是其中的第一分册《一元函数微积分》的姊妹篇。本书介绍多元函数微积分的基本知识，内容包括：多元函数微分学及其应用、多元数量函数积分学及其应用、向量函数的积分与场论初步、无穷级数与级数逼近等四章；各章均配有应用实例与习题，书末附有习题答案。本书教学时约70学时。

本书中小字体例题以及每章最后一节的应用实例的实际背景较强，按照专业和课时情况，可作为选讲内容，同时相关专业的同学或者感兴趣的同学的也可以自学。希望通过这些例题，能够加深学生对微积分在相关专业学科中应用的认识。加*部分内容和例题为选学内容。

本书根据新世纪科技人才对数学素质的要求，针对当前高等院校的教学实际，选择了合理的教材内容与体系结构。本书编者总结多年来的教学实践与教学改革的经验，同时吸收国内外优秀教材的长处，对传统的多元函数微积分的内容与体系作了较大幅度的调整。本书的主要特色体现在：

一、通过应用性引例，突出实际背景的介绍

本书各章内容均由具有实际背景的问题引入，并将该实际问题与教材的理论体系的叙述紧密联系，实际问题的介绍使理论的叙述和推导过程直观、简单，从而使教材由浅入深，深入浅出。本书引入了大量的实际问题，其内容涉及环境科学、物理学、医学、气象科学、经济学、航天航空及机械制造等诸多领域。

二、强调数学建模过程与数学理论叙述紧密结合

本书在处理实际问题与理论体系相结合的过程中，注重体现数学建模的思想方法，而在叙述数学理论的过程中，注意对实例的处理进行归纳总结，强调用实例体现的数学思想。教材在引入概念时，是以展开机理分析、提出合理假设、建立数学模型这几个典型数学建模过程进行的。

三、精选应用实例，重视数学知识的应用

教材在引入概念和方法时，注意阐述引入概念和方法的必要性，进一步通过实例展示概念的实际应用背景。另外，本书各章最后一节介绍精选的应用实例，以培养学生解决实际问题的意识与能力，并使学生通过应用实例，进一步深入理

解数学的基本概念与基本理论。

四、注意理论体系结构更新与课程内容精简

本书注意将一元函数微积分与多元函数微积分的相关内容做比较，便于学生学习和教师施教。另外，参照目前国内外最新教材内容安排，本书将数量函数重积分与第一类曲线和曲面积分合并在一章，将向量函数的曲线和曲面积分与场论初步合在另一章；将原来函数展开成幂级数以及傅里叶级数的内容重新从函数的级数逼近的角度进行了整理；其次，教材注意合理安排内容，淡化技巧，删去了一些概念性的例题和习题。

本书由四川大学数学学院的王宝富、钮海共同完成。其中王宝富负责全书的钢要和定稿，并执笔第一章的第六节和第七节、第二章的第五节和第六节、第四章的以及习题答案，其余部分由钮海执笔。本书的讲义曾先后在四川大学、成都理工大学以及成都信息工程学院进行了部分试讲。作者衷心感谢《大学数学基础教程》编委会的全体专家教授，他们为教材的编写提出了许多宝贵的意见和建议，同时他们也为本教材的试用和修改付出了艰辛的劳动，另外还要感谢高等教育出版社，是他们的大力支持才使本教材得以出版。本书由成都信息工程学院计算科学系张志让教授和电子科技大学应用数学系谢云荪教授主审，他们认真地审阅了全书，并提出了重要的修改意见，谨向他们表示衷心的感谢。

长期以来，大学数学教材一直保持着完整的数学理论体系，在纯粹的数学计算、推导和证明方面结构严谨，本教材试图突破这一传统，在数学应用、数学发现等方面予以加强，以培养学生在数学建模的能力。由于水平有限，我们只希望通过本书达到抛砖引玉的作用。

编者

2004年8月

目　　录

第一章　多元函数微分学及其应用

在《一元函数微积分》中，所研究的对象是一个变量仅依赖于另一个变量的函数问题，然而在实际问题中，许多客观现象或过程的发生和发展往往都是受多种因素制约的，在数学上就表现为一个变量依赖于多个变量，或者说一个变量与多个变量间存在对应关系．下面是现实中的几个具体例子．

1．山体表面问题

掌握山体表面曲面的几何特征是盘山公路建设设计的主要依据之一．由空间解析几何知识可知，若以山体范围内的海平面（海拔高度为 0 的平面）作为 xOy 面，以海平面的垂线为 z 轴，则该山体表面任一点处的海拔高度 z 值与该点的 x,y 坐标值存在对应关系，即在山体范围内的 x,y 任意取定一组数值时，相应山体表面上一点处的海拔高度 z 值就会得到一个确定的值与之对应．表 1-1 是由航空遥感得到的某矿山山体高度数据，而图 1-1 则是由这些数据生成的该山体的三维数字地图．

表 1-1　山体高度数据表　　　　（单位：100 m）

y \ x (z)	0	8	16	24	28	32	36	40	44	48	52	56
0	3.7	5.5	6.7	6.7	6.2	5.8	4.5	4.0	3.0	1.0	1.5	2.5
8	6.5	8.8	10.2	10.2	8.3	8.0	7.0	3.0	5.0	5.5	4.8	3.5
12	7.4	10.8	12.5	12.3	10.4	9.0	5.0	7.0	7.8	7.5	6.5	5.5
16	8.3	11.8	14.5	14.0	13.0	7.0	9.0	8.5	8.1	3.8	7.8	7.5
20	8.8	12.3	15.0	14.0	9.0	11.0	10.6	9.5	8.7	9.0	9.36	9.5
24	9.1	12.7	12.0	13.5	14.5	12.0	11.5	10.1	8.8	10.0	10.5	11.0
28	9.5	13.7	12.0	15.5	16.0	15.5	13.8	10.7	9.0	10.5	11.5	12.0
32	1.43	14.6	15.5	15.5	16.0	16.0	16.0	15.5	15.0	15.0	15.5	15.5
36	1.42	14.5	15.0	15.1	14.3	13.0	12.0	9.8	8.5	7.5	5.5	5.0
40	1.38	14.3	14.7	12.8	12.0	10.8	9.4	7.8	6.2	4.6	3.7	3.5
44	1.37	14.1	14.4	11.1	10.5	9.5	8.2	6.9	5.4	3.8	3.0	2.1
48	1.35	13.9	14.1	9.4	8.8	8.0	6.9	5.7	4.3	2.9	2.1	1.5

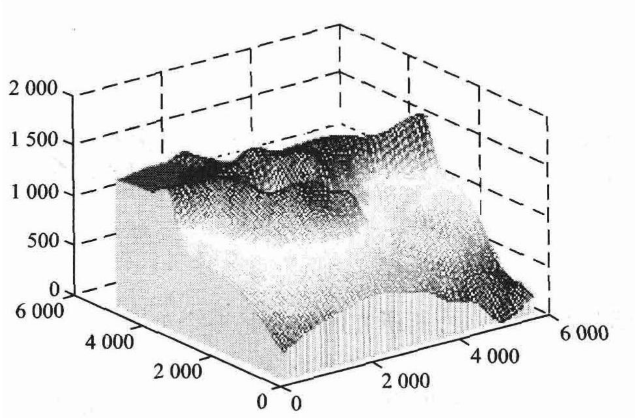


图 1-1

2. 地区气温问题

在日常生活中的某个时刻，对某地区内任意一个观测地点都可以测得一个确定的气温. 如果以经度 x，纬度 y 来表示观测点的位置，以 T 表示气温，则在观测地区范围内变量 T 与变量 x,y 就存在对应关系.

事实上，由于气温会随时间的变化而改变，若将时间变量 t 加以考虑的话，那么变量 T 则与 3 个变量 x,y,t 存在着对应关系. 表 1-2 是 2004 年 3 月下旬，中国部分城市气温数据.

表 1-2 （单位：℃）

城市 / 日期	北京 (39.6,116.2)	哈尔滨 (45.5,126.5)	乌鲁木齐 (43.5,87.4)	兰州 (36.0,103.5)	成都 (30.6,104.1)
3 月 26 日	20	10	1	15	14
3 月 27 日	18	5	0	10	18
3 月 28 日	16	1	-1	4	15

城市 / 日期	上海 (31.2,121.4)	拉萨 (29.4,91.1)	海口 (20.0,110.2)	台北 (25.0,121.3)
3 月 26 日	18	17	23	15
3 月 27 日	17	16	28	18
3 月 28 日	15	14	28	22

说明：经纬度标识：城市（北纬°，东经°）

测定时间：北京时间 12 点整（2004 年）

第一节　多元函数的基本概念

一、多元函数的概念

1. 二元函数

忽略前面例子中的实际背景，可以看出，以上所有关系都是一个变量与一个变量组（多个变量）之间的关系，这种相依关系同时也给出了一种对应法则，即当一组变量分别在其变化范围内任意取定一组数值时，另一个变量就有确定的值与之对应，这种对应关系与《一元函数微积分》中所定义的函数概念的实质是一致的. 在《多元函数微积分》中，仍沿用这个函数的概念，将前面提到的一组变量中的每个变量均称为自变量，另一个变量则称为因变量，将多个自变量与因变量之间的对应规则统称为**多元函数**，相应于多元函数，只有一个自变量的函数即称为一元函数.

本章研究的对象主要是含有两个自变量的函数，称为二元函数，而**含有两个以上自变量的函数问题以此类推**. 二元函数定义如下.

定义 1（二元函数）　设 D 是实平面上的一个点集. 如果存在一个对应规则 f，使得对 D 中的每个点 $P(x,y)$ 都有唯一确定的实数 z 与之对应，则称对应规则 f 为定义在 D 上的二元函数，记为

$$z=f(x,y) \text{ 或 } z=f(P).$$

点集 D 称为函数 f 的定义域，x,y 称为自变量，z 称为因变量. 集合

$$\{z \mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为函数 f 的值域.

由于自变量是 x,y，因此也称二元函数 f 是**x,y 的函数**，并记为 $f(x,y)$. 与一元函数相同，$f(x_0,y_0)$ 表示函数 f 在点 (x_0,y_0) 处的取值.

对于 $z=f(x,y)$，在不强调对应关系时，有时也称 z 是 x,y 的函数. z 是 x,y 的函数也可以记为 $z=z(x,y)$，$z=g(x,y)$ 等.

此外，由于这里给出的函数其因变量取值为实数，所以也称这类函数为**数量值函数**，简称**数量函数**. 在第三章中，还将遇到与数量函数不同的另一类函数——**向量函数**. 本书没有特别说明的函数均指**数量函数**.

定义 1 所描述的情形可用 $f: D\subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 来表示，而图 1-2 的箭头图给出了二元函数的一种直观解释.

关于二元函数的定义域，作如下的约定：如果一个用解析表达式表示的函数没有明确指出定义域，则该函数的定义域理解为使解析表达式有意义的所有点

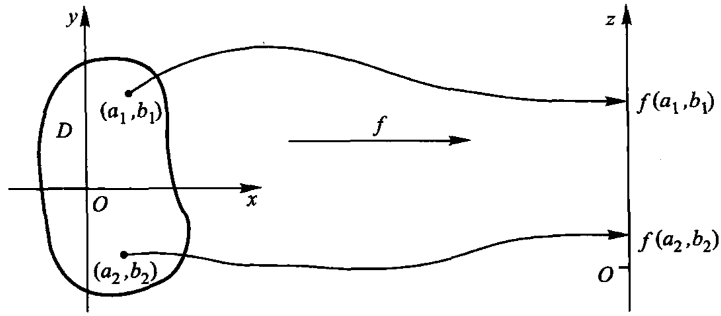


图 1-2

(x,y)所构成的集合,并称之为函数的**自然定义域**.

例 1 求下列函数的自然定义域,并计算$f(2,3)$.

(1) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$; (2) $f(x,y)=x\ln(x^2-y)$.

解 (1) 为使解析表达式有意义,必须使分母不等于零且根号内的式子非负,故f的自然定义域为:$D=\{(x,y)\mid x+y+1\geqslant 0, x\neq 1\}$. 其中不等式$x+y+1\geqslant 0$也就是$y\geqslant -x-1$,它表示位于直线$y=-x-1$上或在该直线上方的点. 而$x\neq 1$意味着直线$x=1$上的点排除在定义域之外(如图 1-3(a)阴影部分).

$$f(2,3)=\frac{\sqrt{2+3+1}}{2-1}=\sqrt{6}.$$

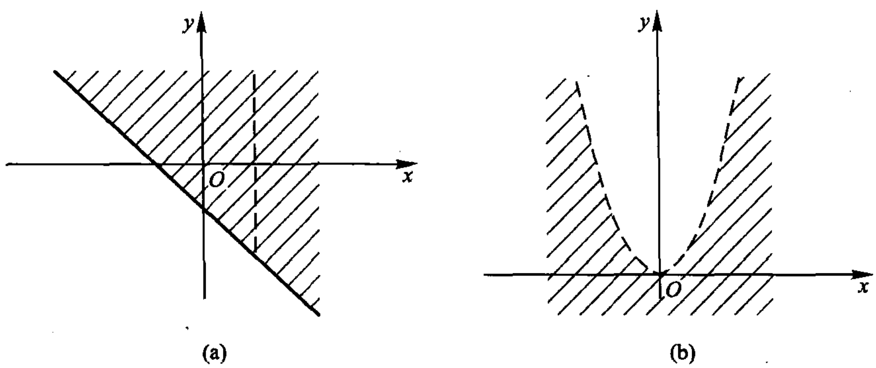


图 1-3

(2) 由于$\ln(x^2-y)$仅当$x^2-y>0$,即$y<x^2$才有意义,故函数f的自然定义域为:$D=\{(x,y)\mid y<x^2\}$(如图 1-3(b)阴影部分).

$$f(2,3)=2\ln(2^2-3)=2\ln 1=0.$$

对于含有 n 个自变量的函数问题,只须将定义 1 中的平面点集 D 换为 $\mathbf{R}^n$(n 维实数空间)中的点集,就可以定义一般的 n 元函数. n 元函数 f 可表示为

$$f:D\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}.$$

当 $n=1$ 时,就是一元函数;当 $n\geqslant 2$ 时,即为多元函数.

对于 n 元函数 f,可以根据不同的需要将其看作用符号 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示的含有 n 个自变量的函数,或用符号 $f(P)$ 表示作点函数或向量自变量的函数,其中点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\subset\mathbf{R}^n$.

2. 二元函数的图形

函数的图形是对函数进行直观描述的一种方法,如同一元函数 $y=f(x)$ 的图形是平面曲线一样,二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形则是曲面(如图 1-4(a)),二元函数的图形概念如下.

如果 $f(x,y)$ 是定义域为 D 的二元函数,则称空间点集

$$S=\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

为函数 f 的**图形**.

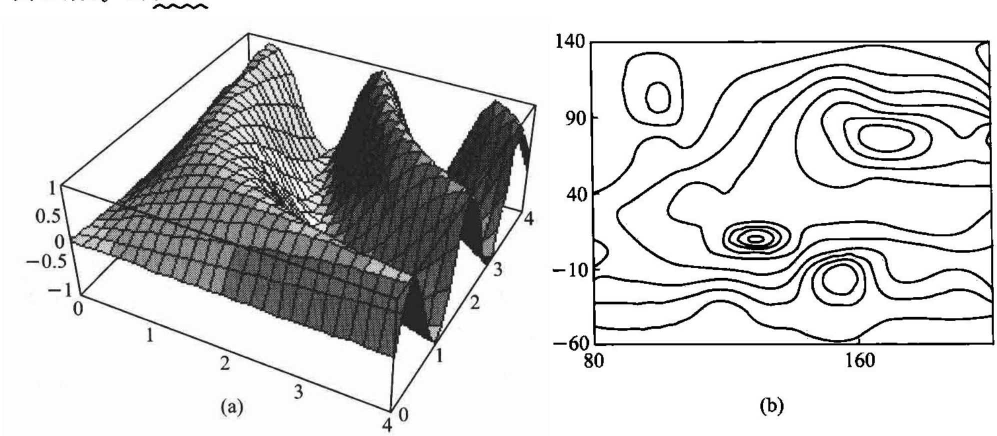


图 1-4

除了用空间曲面图形描述二元函数外,在诸如山脉测绘、气象探测等实际问题中,科技人员经常采用山体等高线(如图 1-4(b))、大气等温、等压线图来直观表示山体表面,地区温度、气压等二元函数,事实上“等高线”与“等温、压线”用数学语言表达就是函数值相等的“等值线”. 二元函数的等值线的定义如下.

设 $f(x,y)$ 是二元函数,将具有方程 $f(x,y)=k$(k 是在 f 值域内的常数)的曲线称为二元函数 f 的**等值线**.

按照定义,等值线 $f(x,y)=k$ 是 f 取已知定值 k 的所有点的集合,换句话说,

它表示了在何处 f 的图形具有高度 k.

由图 1-5(a)可以看出,等值线 $f(x,y)=k$ 正好是 f 的图形在水平面 $z=k$ 处的截痕在 xOy 平面上的投影(如图 1-5(b)),所以,如果画出一个函数的若干等值线并将它们提升(或降低)到所对应的高度,则函数的大致图形就可以"拼装"出来了.当按等间距 k 画出一族等值线 $f(x,y)=k$ 时,在等值线相互贴近的地方,曲面较陡峭,而在等值线相互分开的地方,曲面较平坦.

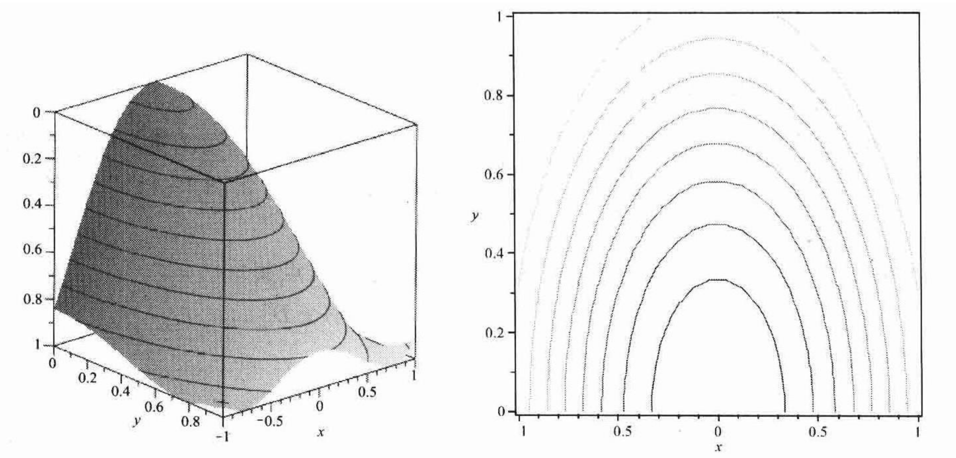


图 1-5

3. 平面区域

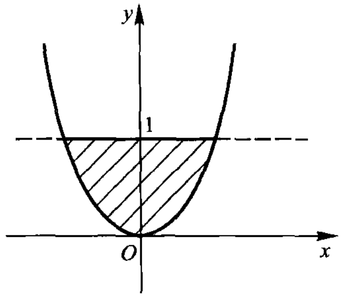
在一元函数的研究中,凡涉及自变量的取值通常要用到区间,同样,出于讨论多元函数自变量取值的需要,需将一维空间中的区间概念推广到二维(或更高维)空间.由于实际中许多二元函数(如山体表面的海拔高度,某一时刻的气温)的自变量的取值通常是在地面的某个范围(如某地区,某海域),因此,就用"**区域**"表示二元(甚至多元)函数自变量的取值范围.

地理上的"区域"是指由平面曲线所围成的彼此连通的实体.

因此,除了整个平面(特殊的区域)外,通常对于由平面曲线所围成的平面点集 D,如果满足"连通"条件:即对 D 内任意两点,都可用全部落在 D 内的折线相连接,则称 D 为**平面区域**.

例如,$\{(x,y)\mid x^2\leqslant y\leqslant 1\}$ 是一个平面区域(如图 1-6(a)阴影部分);而 $\{(x,y)\mid x+y+1\geqslant 0, x\neq 1\}$ 则不是平面区域(如图 1-6(b)阴影部分).

此外,对于平面区域 D,将围成 D 的平面曲线与 D 相交的部分称为区域 D 的**边界**.将不包括边界的区域称为**开区域**,而包括边界的区域称为**闭区域**.另外,如果区域 D 可用平行于 x 轴的两条直线以及平行 y 轴的两条直线所围,则称区



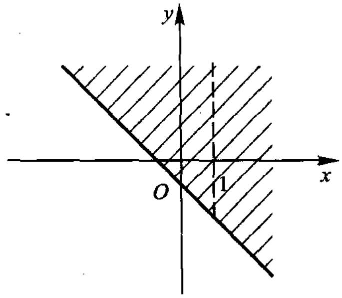


图 1-6

域 D 为有界区域,否则称之为无界区域.

对于三元函数的自变量取值,则可用(三维)空间区域表示,只需将平面区域概念中的"平面曲线"换成"空间曲面",将"平面点集"换成"空间点集",即可得到空间区域及其相关的概念.如,$\{(x,y,z)\mid z\geqslant x^2+y^2,x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$ 即为一个(三维)空间有界闭区域.

对于高维($n>3$)的空间区域,由于不易描绘其空间的几何图形,因此数学家给出了高维空间区域的抽象定义,感兴趣的同学可以看参考文献*.

在平面或空间区域中也存在一种特殊区域——**邻域**.同数轴上的邻域类似,设 P_0 为实平面或实空间中的一点,区域 $U(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta\}$(其中 δ 为某个正数,$|PP_0|$ 为点 P_0 与 P 之间的距离)称为点 P_0 的**邻域**.当研究多元函数在一点处的性质时,需在该点相邻区域内讨论,这时就要用到邻域.

4. 二元函数的奇偶性

与一元函数类似,二元函数也会有"奇偶"性,由于二元函数的自变量较多,故在这里仅讨论关于单个变量的二元"奇偶"函数.

设函数 $f(x,y)$ 的**定义域 D 关于 y 轴对称**(即若 $(x,y)\in D$,则必有 $(-x,y)\in D$).如果对于任一 $(x,y)\in D$,都有

$$f(-x,y)=f(x,y)$$

恒成立,则称 **$f(x,y)$ 关于变量 x 为偶函数**.如果对于任一 $(x,y)\in D$,都有

$$f(-x,y)=-f(x,y)$$

恒成立,则称 **$f(x,y)$ 关于变量 x 为奇函数**.

例如,$f(x,y)=x^2(y+1)$(如图 1-7(a))关于变量 x 为偶函数;$f(x,y)=x^3(y+1)$(如图 1-7(b))关于变量 x 为奇函数.

如果函数 $f(x,y)$ 的**定义域 D 关于 x 轴对称**,相应地有 **$f(x,y)$ 关于变量 y 为**