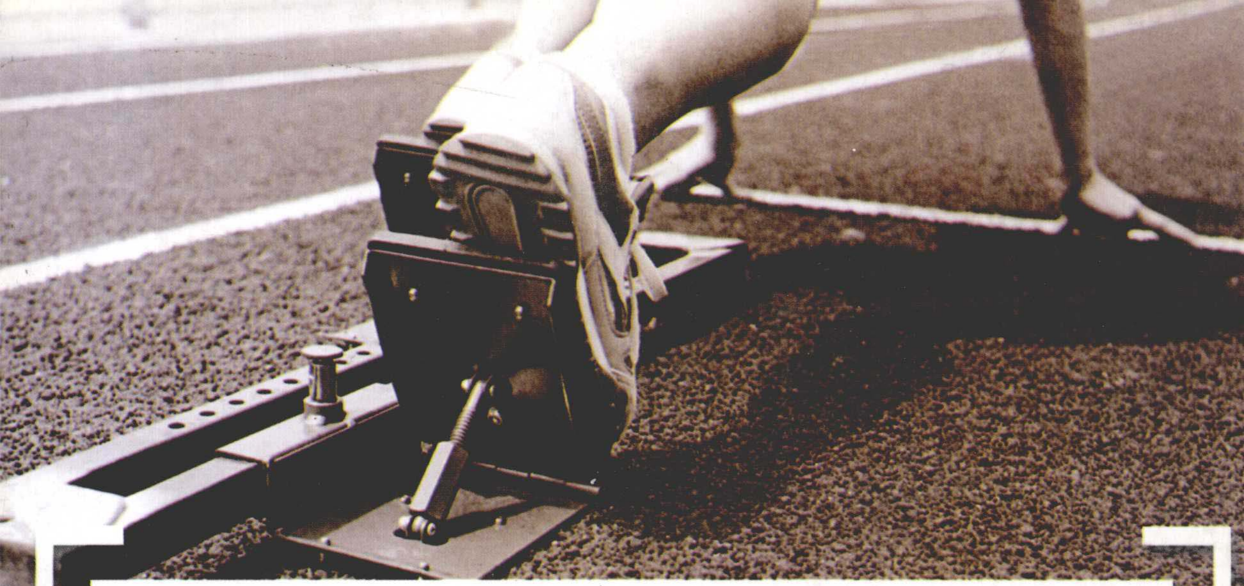

奥赛经典

专题研究系列

湖南省数学会
湖南师范大学数学奥林匹克研究所　组编

奥林匹克数学中的代数问题

◇冷岗松　沈文选　张垚　唐立华／编著

湖南师范大学出版社

奥赛经典

专题研究系列

奥林匹克数学中的代数问题

湖南省数学会
湖南师范大学数学奥林匹克研究所 组编

◇冷岗松 沈文选 张垚 唐立华/编著

湖南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学中的代数问题 / 冷岗松等编著 .—长沙:湖南师范大学出版社,2004.6

(奥赛经典丛书 . 专题研究系列)

ISBN 7—81081—433—8

Ⅰ.奥 ... Ⅱ.冷 ... Ⅲ.代数课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 043375 号

奥林匹克数学中的代数问题

冷岗松　沈文选　张　垚　唐立华　编著

◇丛书策划:周玉波　陈宏平　廖建军　廖小刚

◇组　　稿:廖小刚

◇责任编辑:廖小刚　陈　琳

◇责任校对:刘琼琳

◇出版发行:湖南师范大学出版社

地址/长沙市岳麓山　邮编/410081

电话/0731.8853867　8872751　传真/0731.8872636

◇经销:湖南省新华书店

◇印刷:国防科技大学印刷厂

◇开本:730×960　1/16 开

◇印张:26.5

◇字数:534 千字

◇版次:2004 年 7 月第 1 版　2004 年 7 月第 1 次印刷

◇印数:1—5000 册

◇书号:ISBN 7-81081-433-8/G·283

◇定价:28.00 元

前 言

数学奥林匹克是起步最早、规模最大、类型多种、层次较多的一项学科竞赛活动.多年来的实践表明:这项活动可以激发青少年学习数学的兴趣,焕发青少年的学习热情,吸引他们去读一些数学小册子,促使他们寻找机会去听一些名师的讲座;这项活动可以使参与者眼界大开,跳出一个班、一个学校或一个地区的小圈子,去与其他“高手”互相琢磨,激励并培养他们喜爱有挑战性数学问题的素养与精神;这项活动可以使参与者求知欲望大增,使得他们的阅读能力、理解能力、交流能力、表达能力等诸能力与日俱进.这是一种有深刻内涵的文化现象,因此,越来越多的国家或地区除组织本国或本地区的各级各类数学奥林匹克外,还积极地参与到国际数学奥林匹克中.

我国自1986年参加国际数学奥林匹克以来,所取得成绩举世公认,十多年来一直保持世界领先的水平.其中,到2003年止,湖南的学生已取得9块金牌、2块银牌的好成绩,2004年又有一位国家队队员.这优异的成绩,是中华民族精神的体现,是国人潜质的反映,是民族强盛的希望.为使我国数学奥林匹克事业可持续发展,一方面要继续吸引越来越多的青少年参与,吸引一部分数学工作者扎实地投入到这项活动中来,另一方面要深入研究奥林匹克数学的理论体系,要深入研究数学奥林匹克教育理论与教学方略,研究数学奥林匹克教育与中学数学教育的内在联系.为此,在中国数学奥林匹克委员会领导的大力支持与热情指导下,湖南师范大学成立了“数学奥林匹克研究所”.研究所组建近一年来,我们几位教授都积极投身到研究所的工作中,除深入进行奥林匹克数学与数学奥林匹克教育理论研究外,还将我们多年积累的辅导讲座资料进行了全面、系统的整理,以专题讲座的形式编写成了这套专题研究丛书,分几何、代数、组合三卷.这些丰富、系统的专题知识不仅是创新地解竞赛题所不可或缺的材料,而且还可直接激发解竞赛题的直觉或灵感.从教育心理学角度上说,只有具备了充分的专题知识与逻辑推理知识,才能有目的、有方向、有成效地进行探究性活动.

由于这套丛书篇幅较大,有些部分整理欠完善,敬请专家、同行和读者不吝指正.

编 者

2004年3月

目　录

第一篇 集合问题

第一章 集合中的对应原理

【基础知识】

定义 1 设 A 和 B 是两个集合(二者可以相同),如果对于每个 $x \in A$,都有惟一确定的 $y \in B$ 与之对应,则称这个对应关系为 A 到 B 的映射,记为 $f: A \to B$,这时 $y = f(x) \in B$ 称为 $x \in A$ 的象,而 x 称为 y 的原象.

特别地,当 A 和 B 都是数集时,映射 f 称为函数.

定义 2 设 f 为从 A 到 B 的一个映射.

(1) 如果对于任何 $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$,都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 f 为单射.

(2) 如果对于任何 $y \in B$,都有 $x \in A$,使得 $f(x) = y$,则称 f 为满射.

(3) 如果映射 f 既是单射又是满射,则称 f 为双射,或一一映射.

(4) 如果 f 为满射,且对任何 $y \in B$,恰有 A 中的 m 个元素,它们的象都是 y,则称 f 为(倍数为 m 的)倍数映射.

我们用 $|A|$ 表示集 A 的元素个数(或基数),则有下面的对应原理:

对应原理 设 A 和 B 都是有限集,f 为从 A 到 B 的一个映射.

(1) 如果 f 为单射,则 $|A| \leqslant |B|$;

(2) 如果 f 为满射,则 $|A| \geqslant |B|$;

(3) 如果 f 为双射,则 $|A| = |B|$;

(4) 如果 f 为倍数是 m 的倍数映射,则 $|A| = m|B|$.

【典型例题与基本方法】

例 1 如果从数 1,2,…,14 中,按由小到大的顺序取出 a_1,a_2,a_3,使同时满足 $a_2-a_1\geqslant 3$ 与 $a_3-a_2\geqslant 3$,那么所有符合上述要求的不同取法有_________种.

(1989 年全国高中联赛题)

解 令 $S=\{1,2,\cdots,14\}$, $S'=\{1,2,\cdots,10\}$.

$T=\{(a_1,a_2,a_3)\mid a_1,a_2,a_3\in S, a_2-a_1\geqslant 3, a_3-a_2\geqslant 3\}$,

$T'=\{(a'_1,a'_2,a'_3)\mid a'_1,a'_2,a'_3\in S', a'_1<a'_2<a'_3\}$.

作对应 $(a_1,a_2,a_3)\to(a'_1,a'_2,a'_3)$,这里 $a'_1=a_1, a'_2=a_2-2, a'_3=a_3-4(a_1,a_2,a_3\in T)$.

容易验证,这个对应是一个一一对应或一一映射或双射,则 $|T|=|T'|$.

从而,问题转化为求 $|T'|$,即求在 S' 集中选取三个不同元素的组合数 $C_{10}^3=120$.

另解 赋值 $x_i=\begin{cases}1,若\ i\ 被选取,\\0,若\ i\ 没被选取,\end{cases}$ 其中 $i=1,2,\cdots,14$.

于是,从 14 个数的集合中任选三个数的子集表示一种取法,对应着一个排列$(x_1,x_2,\cdots,x_{14})$,反之,任一排列$(x_1,x_2,\cdots,x_{14})$必对应着一个取法.故任取三个数的子集所表示的一种取法的取法集合到所有的排列$(x_1,x_2,\cdots,x_{14})$集之间的对应是一一映射.

根据题设的要求,取法总数等于排列$(x_1,x_2,\cdots,x_{14})$中有 3 个 1,11 个 0,而且每两个 1 中至少隔着两个 0 的排列数.为了求出这样的排列数,我们选排好模式 1001001,然后将剩下的 7 个 0 插入 3 个 1 形成的 4 个空位中,故有 $C_{7+4-1}^7=C_{10}^3$ 种方法,此即为所有不同的取法总数

注 此问题可推广到一般情形:求从集合$\{1,2,\cdots,n\}$中任取满足下列条件的 r 个 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 的不同取法数.(1) $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_r\leqslant n$;(2) $a_{k+1}-a_k\geqslant m$, $k=1,2,\cdots,r-1$,其中 $m\in\mathbf{N}^+$.

事实上,可将所有满足(1),(2)的 r 数组的集合记为 A.由(2)有 $a_k\leqslant a_{k+1}-m(k=1,2,\cdots,r-1)$,即 $a_k<a_{k+1}-(m-1)$.

所以,$a_1<a_2-(m-1)<a_3-2(m-1)<a_4-3(m-1)$

$<\cdots<a_r-(r-1)(m-1)$.

令 $b_i=a_i-(i-1)(m-1), i=1,2,\cdots r$,则

$1\leqslant b_1<b_2<\cdots<b_r\leqslant n-(r-1)(m-1)$.

记集合$\{1,2,\cdots,n-(r-1)(m-1)\}$的(无重复)$r$ 元数组的集合为 B,则 A 与 B 之

间存在一一对应，即双射.

于是 $|A|=|B|=C_{n-(r-1)(m-1)}^{r}$.

例2 设 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，A 为至少含有两项的公差为正的等差数列，其项都在 S 中，且添加 S 的其他元素于 A 后均不能构成与 A 有相同公差的等差数列.求这种 A 的个数(这里只有两项的数列也看作等差数列).（1991 年全国高中联赛题）

解 当 $n=2k$ 时，满足题目要求的每个数列 A 中有两连续项，使其前一项在集合 $\{1,2,\cdots,k\}$ 中，而后一项在集合 $\{k+1,k+2,\cdots,2k\}$ 中；反之，从 $\{1,2,\cdots,k\}$ 和 $\{k+1,k+2,\cdots,2k\}$ 中各取一数，并以两数之差作为公差，可作出一个满足要求的 A.容易看出，这种对应是一一对应，即双射.故 A 的个数为 $k\cdot k=\frac{1}{4}n^2$.

当 $n=2k+1$ 时，满足题目要求的每一个数列 A 中必有连续两项，其前一项在集合 $\{1,2,\cdots,k\}$ 中，后一项在集合 $\{k+1,k+2,\cdots,2k+1\}$ 中，讨论与前面类似.故此时 A 的个数为 $k\cdot(k+1)=\frac{1}{4}(n^2-1)$ 个.

两种情况统一起来，共有 $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ 个 A.

例3 设集合 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$，若 X 是 S_n 的子集，把 X 中的所有数的和称为 X 的“容量”(规定空集的容量为 0).若 X 的容量为奇(偶)数，则称 X 为 S_n 的奇(偶)子集.

(1) 求证：S_n 的奇子集与偶子集个数相等.

(2) 求证：当 $n\geqslant3$ 时，S_n 的所有奇子集的容量之和与所有偶子集的容量之和相等.

(3) 当 $n\geqslant3$ 时，求 S_n 的所有奇子集的容量之和.（1992 年全国高中联赛题）

解 (1) S_n 的子集有 2^n 个，可分为两类：(a) 不含元素 1 的子集(包括空集 $\varnothing$)；(b) 含有元素 1 的子集.对(a) 中任一集合 X_1，对应着(b) 中的集合 $Y_1=X_1\cup\{1\}$；反之，(b) 中任一元素 Y_1 都是(a) 中元素 X_1 的象，并满足 $Y_1=X_1\cup\{1\}$，且(a) 中不同集合也对应着(b) 中不同的集合.因此，(a)、(b) 的集合间可建立一一对应，即双射.

又若 X_1 是 S_n 的偶子集，则 $X_1\cup\{1\}$ 是奇子集；反之，若 X_1 是 S_n 的奇子集，则 $X_1\cup\{1\}$ 是偶子集.因此，S_n 的奇子集与偶子集个数相等，都等于 2^{n-1} 个.

(2) 设 A_n 表示 S_n 中全体奇子集容量之和，B_n 表示 S_n 中全体偶子集容量之和.又设 a_n、b_n 分别表示 S_n 中奇、偶子集的个数，由(1) 知 $a_n=b_n=2^{n-1}$.

(i) 若 n 为奇数($n\geqslant3$) 时，S_n 的所有奇子集可由下列两类子集组成：① S_{n-1} 的奇子集；② S_{n-1} 的每个偶子集与集 $\{n\}$ 的并.于是 $A_n=A_{n-1}+(B_{n-1}+n\cdot b_{n-1})=A_{n-1}+B_{n-1}+n\cdot2^{n-2}$.类似可得 $B_n=A_{n-1}+B_{n-1}+n\cdot2^{n-2}$，因此，$A_n=B_n$.

(ii) 若 n 为偶数($n \geqslant 4$) 时, S_n 的所有奇子集可由下列两类子集组成:① S_{n-1} 的所有奇子集;② S_{n-1} 的每个奇子集与集$\{n\}$的并.于是, $A_n = A_{n-1} + (A_{n-1} + n \cdot a_{n-1}) = 2A_{n-1} + n \cdot 2^{n-2}$.类似可得, $B_n = 2B_{n-1} + n \cdot 2^{n-2}$.由(i)知 $A_{n-1} = B_{n-1}$,所以 $A_n = B_n$.

综上,对任何 $n \geqslant 3, A_n = B_n$.

(3) X 对 S_n 的补集为 $\complement_{S_s}X$,则 X 与 $\complement_{S_n}X$ 的容量之和等于 S_n 的容量,即 $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.因此, S_n 中所有子集的容量之和是 $2^{n-1} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = 2^{n-2} \cdot n(n+1)$.

因为 $A_n = B_n$,当 $n \geqslant 3$ 时,故 $A_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-2} \cdot n(n+1) = 2^{n-3} \cdot n(n+1)$.

【解题思维策略分析】

1. 注意单射方法的运用

例 4 设 $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$, $S = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$.若(i) S 中每 r 个元的集合的交集非空;(ii) 每 $r+1$ 个元的集合的交集为空集.问:(1) $|A|$ 至少是多少?(2) 当 $|A|$ 最小时,集 $|A_i|$ 为多少?

解 (1) 考虑足标集$\{1,2,\cdots,k\}$的任一 r 元子集$\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$,在 $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r}$ 中任取一个元素 a,作映射 $f:\{i_1, i_2, \cdots, i_r\} \to a$.

于是, f 是足标集的 r 元子集的集合到 A 的一个单射.事实上,若$\{j_1, j_2, \cdots, j_r\}$也对应于 a,则会形成 $r+1$ 个子集的交集不空,矛盾.

因此, $|A|$ 不少于足标集的 r 元子集的个数,即 $|A| \geqslant C_k^r$.

(2) 考虑任一 A_i,在 S 中任取其余 r 个集,它们的交集至少有一个元(不空),而此交集与 A_i 取交为空集.由于有 C_{k-1}^r 种不同取法,因而 $|A_i| \leqslant |A| - C_{k-1}^r$.当 $|A| = C_k^r$ 时, $|A_i| \leqslant C_{k-1}^{r-1}$.

另一方面, A_i 与 S' 中任选 $r-1$ 个其余的集取交,至少有一个,从而 $|A_i| \geqslant C_{k-1}^{-1}$.

这说明,当 $|A|$ 取最小值 C_n^k 时,每个 A_i 的集都是 C_{k-1}^{r-1}.

注 此例的结论具有一般性,许多竞赛题都是它的特殊情形.如第13届莫斯科竞赛题:"某城市有公共汽车10条线路,现知沿其中9条线路可走遍所有车站,但沿其中任何8条线路不能走遍所有车站.问至少有多少个不同的车站?"按上述例题中结论(1)知,至少有45个车站.

例 5 在一个车厢中,任何 $m(m \geqslant 3)$ 个旅客都有惟一的公共朋友(当甲是乙的朋友时,乙也是甲的朋友.任何人不作为他自己的朋友).问在这个车厢中,朋友最多的人有多少个朋友?

(第5届国家集训队选拔试题)

解 设朋友最多的人有 k 个朋友，显然，$k \geqslant m$. 若 $k > m$，设 A 有 k 个朋友 $B_1, B_2, \cdots, B_k$，并记 $S = \{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$.

设 $B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_{m-1}}$ 是从 S 中任取的 $m-1$ 个元素，则 $A_1, B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_{m-1}}$ 这 m 个人有惟一的一个公共朋友，记为 C_i. 因 C_i 是 A 的朋友，故 $C_i \in S$，这说明 S 中的每 $m-1$ 个元素对应着 S 中的惟一确定的一个元素.

又若 $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_{m-1}}\} \neq \{B_{j_1}, B_{j_2}, \cdots, B_{j_{m-1}}\}$，且 $\{A, B_{i_1}, \cdots, B_{i_{m-1}}\}$ 与 $\{A, B_{j_1}, \cdots, B_{j_{m-1}}\}$ 对应的惟一的公共朋友分别为 $C_i, C_j \in S$，则必有 $C_i \neq C_j$，否则 $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_{m-1}}\} \cup \{B_{j_1}, B_{j_2}, \cdots, B_{j_{m-1}}\}$ 至少有 m 个元素，而他们至少有两个朋友 A 和 C_i，此与已知矛盾.

这样一来，上述的对应就是一个单射. 因此，S 中的 $m-1$ 元子集的个数 $C_k^{m-1} \leqslant k$. 但 $m \geqslant 3$ 时，$m-1 \geqslant 2$，这时 $C_k^{m-1} > C_k^1 = k$ 与上述结果矛盾，这说明 $k > m$ 不能成立.

故朋友最多的人的朋友个数的最大值为 m.

例 6 考虑方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

其中系数 a_{ij} 为整数，不全为 0. 试证：在 $n \geqslant 2m$ 时，有一组整数解 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 满足 $0 < \max|x_i| \leqslant n(\max|a_{ij}|)(i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,m)$.

证明 先假定 $n = 2m$. 设 $A = \max|a_{ij}|$，$B = mA$，集合

$X = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid |x_j| \leqslant B, j = 1,2,\cdots,n\}$,

$Y = \{(y_1, y_2, \cdots, y_n) \mid |y_i| \leqslant nAB, i = 1,2,\cdots,m\}$.

作映射 $f: y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n (i = 1,2,\cdots,m)$.

显然 f 是从集 X 到 Y 的映射(因为 $|y_i| \leqslant |a_{i1}| \cdot |x_1| + |a_{i2}| \cdot |x_2| + \cdots + |a_{in}| \cdot |x_n| \leqslant nAB$).

$$\text{由于 } |x| = (2B+1)^n = (2mA+1)^{2m} = (4m^2A^2 + 4mA + 1)^m$$
$$> (2nAB + 1)^m = |Y|.$$

所以 f 一定不是单射，也就是说，X 中必有两个不同元素 $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$，$(x''_1, x''_2, \cdots, x''_n)$ 具有相同的象.

令 $x_j = x'_j - x''_j (j = 1,2,\cdots,n)$,

则 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是方程组的解，并且

$0 < \max|x_j| < \max|x'_j| + \max|x''_j| \leqslant 2B = nA$.

如果 $n > 2m$，根据上面所证，方程组有解 $(x_1, x_2, \cdots, x_{2m}, 0, \cdots, 0)$ 满足 $0 < \max|x_j| \leqslant 2mA < nA$.

注 此例是从反面运用单射的概念来解题的.

2. 构造适当的映射,利用对应原理实现问题的转化

通过构造适当的映射,进而利用对应原理实现问题的转化,可以达到另辟蹊径的效果.

例 7 在一个 6×6 的棋盘上放置了 11 块 1×2 的骨牌,每一个骨牌恰好覆盖两个方格.证明:无论这 11 块骨牌怎么放置,总能再放入一块骨牌.

证明 若有某一行存在 4 个空格,由于每行仅有 6 格,必有两空格是相邻的,可放置一块骨牌,否则每行至多有 3 个空格.

如果这 11 块骨牌放置以后,不能再放入一块骨牌,考虑两个集合:

$X = \{$下面 5×6 的空格集合$\}$, $Y = \{$上面 5×6 的骨牌集合$\}$.

则必有:(i) 空格的上方必须对应骨牌(否则,若空格的上方还对应空格,则连续两个空格可以放置一块骨牌).

(ii) 不同的空格必定对应不同的骨牌(否则,若两个不同的空格对应同一骨牌,这个空格必相邻,因而这两个空格可以放置一块骨牌).

于是,这种空格与骨牌的对应构成了从 X 到 Y 的映射:$f: x \to y$.显然,这是一个单射.

由上述可见, $|x| \leqslant |y| \leqslant 11$.

又由于整个棋盘上有空格 $6 \times 6 - 11 \times 2 = 14$ 个,除最上面一行可能有的空格外,应有 $|X| \geqslant 11$.

故 $|X| = |Y| = 11$.

这说明,这种空格与骨牌的对应构成了从 X 到 Y 的一一映射.于是,集合 Y 中有 11 块骨牌,即棋盘上面的 5×6 上有 11 块骨牌,从而棋盘的最后一行全是空格.这又导致矛盾.

综上所述,命题获证.

例 8 用 n 个数(允许重复)组成一个长为 N 的数列,且 $N \geqslant 2^n$.试证:可在这个数列中找出若干个连续的项,它们的乘积是一个完全平方数.

证明 设 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的长为 N 的数列为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$,这里 $b_i \in \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}(i = 1, 2, \cdots, N)$

作映射 $f: B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\} \to \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$,其中 $v_j = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$.对于每个 $j(1 \leqslant j \leqslant n)$,我们赋值

$$c_i=\begin{cases}0,\text{若 } a_i \text{ 在 } b_1,b_2,\cdots,b_j \text{ 中出现偶数次},\\ 1,\text{若 } a_i \text{ 在 } b_1,b_2,\cdots,b_j \text{ 中出现奇数次}.\end{cases}$$

如果有某个 $v_j=\{0,0,\cdots,0\}$，那么，在乘积 $b_1b_2\cdots b_j$ 中，每个 a_i 都出现偶数次，所以积为完全平方数.

如果每个 $v_i\neq(0,0,\cdots,0)$，那么，由于集合 $\{(c_1,c_2,\cdots,c_n)\mid c_i=0$ 或 $1,i=1,2,\cdots,n\}$ 恰有 2^n-1 个元素，由题设 $N\geqslant 2^n>2^n-1$，所以必有 h 和 $k(1\leqslant k<h\leqslant N)$ 满足 $v_k=v_h$. 这时，在乘积 $b_1b_2\cdots b_k$ 和 $b_1b_2\cdots b_h$ 中每个 a_i 出现的次数具有相同的奇偶性，从而它们的商，即乘积 $b_{k+1}b_{k+2}\cdots b_n$ 中每个 a_i 出现偶数次，亦即 $b_{k+1}b_{k+2}\cdots b_n$ 为完全平方数.

【模拟实战】

习题 A

1. T 为坐标平面上所有整点的集合(横、纵坐标都是整数的点称为整点)，如果两个整点 (x,y)，(u,v) 满足 $|x-u|+|y-v|=1$，则称这两个点为相邻点. 证明：存在集合 $S\subsetneqq T$，使得每个点 $P\in T$，在 P 与 P 的相邻点中恰好有一个属于 S.
2. 设有 m 只茶杯，开始时杯口都朝上. 把茶杯随意翻转，现定每翻转 n 只，算一次翻动，翻动过的茶杯允许再翻. 证明：当 $m(\geqslant 3)$ 为奇数，$n(\geqslant 2$ 且 $n<m)$ 为偶数时，无论翻动多少次，都不能使杯口都朝下.
3. 在数轴上给定两点 1 和 $\sqrt{2}$，在区间 $(1,\sqrt{2})$ 内任取 n 个点，在此 $n+2$ 个点中，每相邻两点连一线段，可得 $n+1$ 条线段. 证明：在此 $n+1$ 条线段中，以一个有理点和一个无理点为端点的线段恰有奇数条.
4. 将正整数 n 表示为一些正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_p$ 的和，即 $n=a_1+a_2+\cdots+a_p$，其中 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_p$. 记 $f(n)$ 是如此表示的方法种数(如 $4=4,4=1+3,4=2+2,4=1+1+2,4=1+1+1+1$，故 $f(4)=5$). 证明：对任意 $n\geqslant 1$，$f(n+1)\leqslant\frac{1}{2}[f(n)+f(n+2)]$.

习题 B

1. 某 48 个自然数的乘积恰好有 10 个不同的质因数. 证明：从这 48 个数中可以挑出 4 个数来，它们的乘积恰好是一个平方数.

2. 设 $M=\{1,2,\cdots,20\}$. 对于 M 的任一 9 元子集 s, $f(s)$ 取 1 到 20 中的一个整数($1\leqslant f(s)\leqslant 20$). 证明:存在 M 的一个 10 元子集 T,使得所有的 $k\in T$,都有 $f(T\setminus\{k\})\neq k$.
(IMO - 31 国家集训队训练题)
3. 将正整数 n 写成若干个 1 和若干个 2 之和,和项顺序不同认为是不同的写法,所有写法种数记为 $\alpha(n)$;将 n 写成若干个大于 1 的正整数之和,和项顺序不同认为是不同的写法,所有写法的种数记为 $\beta(n)$. 求证:对每个 n,都有 $\alpha(n)=\beta(n+2)$.
4. 集 $S=\{1,2,\cdots,1990\}$. 如果 S 的某个 31 元子集的元素和被 5 整除,则称为是 S 的好子集. 求 S 的好子集的个数.
(IMO - 31 预选题)

第二章　集合中的最大、最小问题

【基础知识】

集合问题中最大、最小问题是一类综合性较强的问题，它既涉及数论知识、代数知识，还涉及组合知识．因而，求解这类问题要具体问题具体分析，有时要采用类分法，有时要采用构造法，有时还要采用反证法等各种各样的方法．

【典型例题与基本方法】

例 1　设 $M=\{1,2,3,\cdots,1995\}$，A 是 M 的子集且满足条件：当 $x\in A$，$15x\notin A$，则 A 中元素的个数最多是________．　　(1995 年全国高中联赛题)

解　构造子集 A 如下：

$1995\div 15=133$，记 $A_1=\{134,135,\cdots,1995\}$，则 $|A_1|=1862$(个)．

$133\div 15=8$ 余 13，记 $A_2=\{9,10,\cdots,133\}$，则 $|A_2|=125$(个)．

记 $A_3=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，则 $|A_3|=8$(个)．

显然，$A_1\cup A_2\cup A_3=\{1,2,\cdots,1995\}$，$A_i\cap A_j=\varnothing$，$i\neq j$，且 $\{15a\mid a\in A_{i+1}\}\subsetneqq A_i$，$i=1,2,3$．

令 $A=A_1\cup A_3$，那么，A 是满足要求的子集，且

$|A|=|A_1|+|A_2|=1862+8=1870$．

例 2　设 $S=\{1,2,3,4\}$，n 项的数列：$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有下列性质，对于 S 的任何一个非空子集 B(B 的元素个数记为 $|B|$)，在该数列中有相邻的 $|B|$ 项恰好组成集合 B，求 n 的最小值．　　(1997 年上海市竞赛题)

解　n 的最小值为 8．

首先证明 S 中的每个数在数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中至少出现 2 次．

事实上，若 S 中的某个数在这个数列中只出现 1 次，由于含这个数的二元子集共有 3 个，但在数列中含这个数的相邻两项至多只有两种取法，因此，不可能 3 个含这个数的二元子集都在数列相邻两项中出现．矛盾．

由此，可得 $n\geqslant 8$．

另一方面，数列 3,1,2,3,4,1,2,4 满足题设条件，且只有 8 项，所以，n 的最小值为

8.

例 3 设 S 为 $\{1,2,\cdots,50\}$ 的具有下列性质的子集，S 中任意两个不同元素之和不被 7 整除，则 S 中元素最多可能有几个？ （《中等数学》2000 年 2 期奥林匹克训练题）

解 将 $\{1,2,\cdots,50\}$ 按照模 7 分成 7 类：

$K_1=\{1,8,15,22,29,36,43,50\}$,

$K_2=\{2,9,16,23,30,37,44\}$,

$K_3=\{3,10,17,24,31,38,45\}$,

$K_4=\{4,11,18,25,32,39,46\}$,

$K_5=\{5,12,19,26,33,40,47\}$,

$K_6=\{6,13,20,27,34,41,48\}$,

$K_0=\{7,14,21,28,35,42,49\}$.

下面证明：$S=K_1\cup K_2\cup K_3\cup\{7\}$ 为满足要求的最大集合.

首先，对 $a,b\in S,a\neq b$，有三种可能：

(i) $a,b\in K_i(1\leqslant i\leqslant 3)$，则 $a+b\equiv 2i(\bmod 7)$，$a+b$ 不能被 7 整除.

(ii) $a\in K_i,b\in K_j(1\leqslant i\neq j\leqslant 3)$，则 $a+b\equiv i+j(\bmod 7)$，$a+b$ 不能被 7 整除.

(iii) $a\in K_i,b=7(1\leqslant i\leqslant 3)$，则 $a+b\equiv i(\bmod 7)$，$a+b$ 不能被 7 整除.

综上知，S 中任两个元素之和不能被 7 整除.

其次若给 S 添加一个元素 c，则必存在 S 中的一个元素与 c 之和能被 7 整除.

添加的 c 有 4 种可能：

(i) $c\in K_4$，则 c 与 K_3 中的元素之和能被 7 整除.

(ii) $c\in K_5$，则 c 与 K_2 中的元素之和能被 7 整除.

(iii) $c\in K_6$，则 c 与 K_1 中的元素之和能被 7 整除.

(iv) $c\in K_0$，则 c 与 7 之和能被 7 整除.

综上知，S 中元素不能再增添. 所以，S 中元素的最大值为

$|S|=|K_1|+|K_2|+|K_3|+1=23$.

例 4 设自然数 $n\geqslant 5$，n 个不同的自然数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有下列性质：对集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的任何两个不同的非空子集 A 和 B，A 中所有数的和与 B 中所有数的和都不会相等. 在上述条件下，求 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$ 的最大值. （1994 年上海市竞赛题）

解 不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$.

先证明：对任何自然数 $k\leqslant n$，都有 $\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\geqslant 2^k-1$. ①

用反证法.若$\sum\limits_{i=1}^{k} a_i < 2^k - 1$,则$\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$的每个非空子集的元素和不超过$2^k - 2$.但$\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$有$2^k - 1$个非空子集,根据抽屉原理,必有两个非空子集的元素和相等,这与题设矛盾.故所证结论①成立.

接着证明:$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$. ②

事实上,$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - (\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n})$

$$= \frac{a_1 - 1}{a_1} + \frac{a_2 - 2}{2a_2} + \cdots + \frac{a_n - 2^{n-1}}{2^{n-1} a_n}.$$

令 $c_i = \frac{1}{2^{i-1} a_i}, d_i = a_i - 2^{i-1}, D_k = \sum\limits_{i=1}^{k} d_i$.

显然,$c_1 > c_2 > \cdots > c_n$,

$$D_k = \sum_{i=1}^{k} a_i - (1 + 2 + \cdots + 2^{k-1}) = \sum_{i=1}^{k} a_i - (2^k - 1) \geqslant 0.$$

于是,我们有

$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - (\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}) = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i d_i$

$= c_1 D_1 + c_2(D_2 - D_1) + \cdots + c_n(D_n - D_{n-1})$

$= (c_1 - c_2) D_1 + (c_2 - c_3) D_2 + \cdots + (c_{n-1} - c_n) D_{n-1} + c_n D_n$

$\geqslant 0$.

故②式得证.

注意到,当$S = \{1, 2, 2^2, \cdots, 2^{n-1}\}$时,题设条件成立.此时,有

$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

因此,所求的最大值是$2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

【解题思维策略分析】

1. 假定结论来推导,具体构造来验证

例5 10人到书店买书,已知:(1)每人都买了三种书;(2)任何两人所买的书中,都至少有一种相同.问购买人数最多的一种书最少有几个人购买?

(1993年中国数学奥林匹克题)

解 设购买人数最多的一种书有x人购买,10人中的甲购买了三种书,因其他9