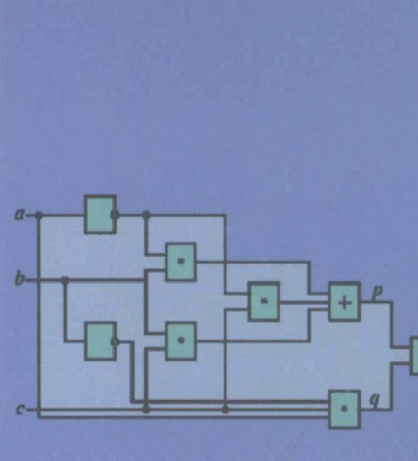
经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

普通高中课程标准
实验教科书

选修系列4－10

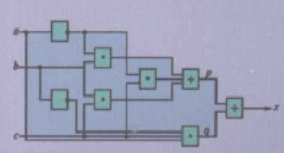
开关电路与布尔代数

A	B	C	$f(A,B,C)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0



湖南教育出版社

A	B	C	$f(A,B,C)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0



ISBN 7-5355-4605-6

9 787535 546050 >

G · 4600 定价：5.35 元

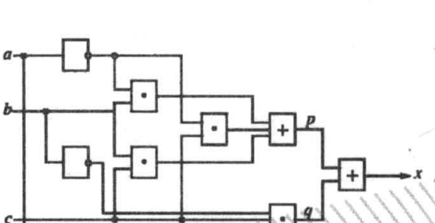
普通高中课程标准

实验教科书

选修系列 4—10

开关电路与布尔代数

A	B	C	$f(A,B,C)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0



主　　编　张景中　陈民众
执行主编　李尚志
本册主编　蒋星耀
编　　委　郑志明　查建国　孟实华

普通高中课程标准实验教科书
选修 4—10
开关电路与布尔代数
责任编辑：孟实华　邹伟华
　　　　　甘　哲　蒋　芳
美术编辑：肖　毅
技术插图：徐　航
湖南教育出版社出版发行（长沙市韶山北路 443 号）
网　　址：http://www.hneph.com
电子邮箱：postmaster@hneph.com
湖南省新华书店经销
湖南新华印刷集团有限责任公司(邵阳)印刷
890×1240　16 开　印张：3.75　字数：110000
2005 年 8 月第 1 版　2006 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 7—5355—4605—6/G·4600
定　价：5.35 元

前　言

在现代信息社会中，我们无时不在利用开关来控制各种装置，如开关电灯，选择电视频道，设定空调的温度，让玩具汽车前后左右移动，以及用键盘和鼠标操作计算机等.

我们经常听到许多老年人对各种机器发出由衷的赞叹："现在的人真聪明，怎么能造出如此灵巧、听话的机器来?"也许你的祖父母有许多新鲜的玩艺都不会使用. 如不会使用手机，不会调整电视频道，更不会使用计算机，有时甚至要求你们教他们使用. 当你教会他们后，他们会在亲友间夸耀你们说："我的孙子(孙女)真聪明，手机、电脑……样样都会."当你听到这些赞赏后，不知会有什么感受，沾沾自喜，还是诚惶诚恐? 事实上，我们知之甚少，我们充其量只能"按图索骥"而已，我们只知其然，而不知其所以然. 实际上我们经不起几个"为什么"的拷问，尤其对于胸怀大志、充满理想、肩负建设祖国重任的高中生，更应该具有进一步求知的渴望. 这些机器的原理是什么? 如何设计出来的? 我也想亲手将它们造出来，甚至发明更奇妙的机器……开关电路和布尔代数这门课是让你步入计算机科学和信息技术殿堂的入场券和敲门砖.

布尔代数是数理逻辑的基础部分，它源于德国数学家莱布尼茨(Leibniz. G. W)试图用数学方法研究思维规律，把思维过程、推理过程计算化. 1847 年，英国数学家布尔(Boole. G)建立了第一个思维演算，即逻辑代数，或称布尔代数. 1938 年美国电气工程师申农(Shannon. C. E)将布尔代数应用到开关电路，即称开关代数. 它为电子计算机的逻辑线路分析与设计提供了有力工具，它还是研制计算机软件的基础和重要手段.

布尔代数虽然应用广泛，但它本质上是一门抽象化、形式化和公理化程度都很高的典型的现代数学分支之一. 布尔代数具备了数学的

一切特征：即它的抽象性、精确性和应用的广泛性．所以学习本课程可以使你感悟到如何将实际问题抽象概括为数学问题，然后，在数学中研究这些问题，得出大量定理和规律，最后用这些规律和定理去解决更多更复杂的实际问题．布尔代数在现代科学技术中的重大作用是布尔代数建立初期所始料不及的．这同时说明数学理论对实践的超前作用和指导作用．可以说，是布尔代数促成电子计算机的诞生和成长．

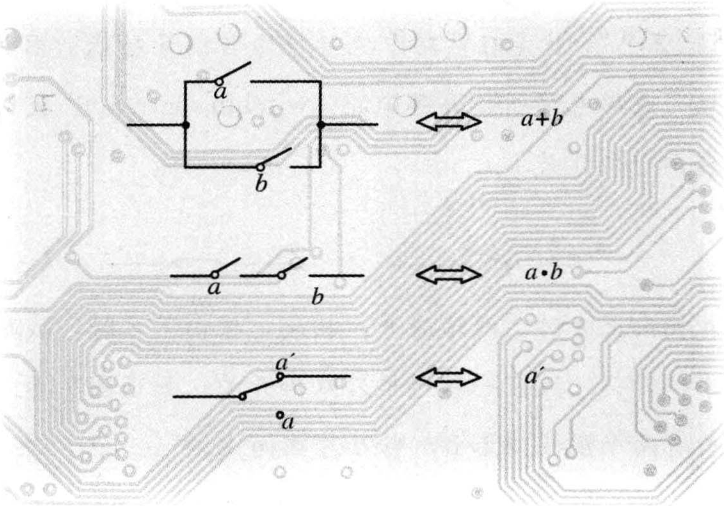
学习开关电路和布尔代数这门课后，非但可以提高我们的逻辑思维能力，使我们的思维清晰化、严谨化，而且还可以大大提高我们分析和解决问题的能力．如果同学们愿意的话，你可以在科技活动中大显身手，你可以搞创造发明和制作自己的玩具．总之，正如普罗克洛斯所说的：“数学，她令思维活跃，精神升华；她烛照我们内心，消除我们与生俱有的蒙昧与无知．”

作者

2004年12月

目录

第1章 开关电路与命题逻辑的数学描述



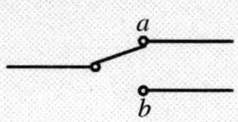
伟大数学家**笛卡儿**（R. Descartes，1596—1650）认为一切问题都可以化为数学问题．实践证明：一个学科一旦能用数学描述，该学科就会突飞猛进．那么让逻辑学和开关电路这种与数量关系和空间形式相去甚远的学科是否也可用数学来描述呢？这要归功于数学家布尔．他于 1847 年创造出崭新的数学分支——布尔代数．它使古典数学未能解决的逻辑学问题迎刃而解．1938 年美国电气工程师申农发现用布尔代数可以很好地描述开关电路．本章就是介绍这两门学科是如何用数学描述的．

数学实验

你能解决这些问题吗?

所谓“开关”，就是在电路中执行接通与断开功能的器件，由一些开关连接而成的电路叫作**开关电路**(switching circuit). 我们可以用如下符号表示一个开关.

当将刀片拨向上方时，线路断开；相反，拨向下方时，线路接通. 这叫单刀单掷开关. 还有一种叫单刀双掷开关. 如下图所示.



这个开关有两个触点 a 和 b，当刀片拨向上方时，a 通 b 断；当刀片拨向下方时，a 断 b 通. 这种开关是我们最常用的.

实验 1　现在如果在楼梯中间装一电灯，而在楼上楼下各用一个单刀双掷开关来控制此灯，使得楼上楼下的人都可以用就近的开关来控制灯的状态（即这两个开关中的任何一个的状态改变都能改变灯的当前状态）. 请你设计一开关电路，来满足这一设计要求.

实验 2　如果你已完成实验 1，那么请你进一步设计一个开关电路，由三个开关，分别安装在大厅的三个入口处，来控制大厅的主灯. 其设计要求与实验 1 相同，即这三个开关中任何一个开关状态的改变都将改变主灯当前状态.

实验 3　用四个开关控制一个灯. 要求同前可能吗?

以上三个实验，估计同学们不难解决第一个问题. 第二个就有些困难. 第三个如没有从上二个摸索总结出规律性来就更难了. 如果失败了，不必灰心丧气，在本课程结束后，这些问题就会迎刃而解，从而使同学们可以体会理论指导实践的重要性.

世界上有些现象虽然千变万化，但从某种角度看往往可归结于两种对立而互补的状态．例如对开关来说，有拉线开关、拨动开关、闸刀开关、继电器开关、电子开关等，但就其在电路中的作用而言，只有接通和断开两种状态．再如命题（proposition）有各种各样，但在形式推理中，我们只关心命题的真和假这两种状态，而不关心它们的内容．再如为了反映同学们的学习成绩，往往采用百分制，但到期末决定升留级时，我们不得不采用二分法，即及格或不及格两种．在一场足球决赛中，我们一定要决出胜负，如果踢成平局还要加时赛，还要点球大战……从上述例子可见，有些事物本身就具有二元特性，有些是人为的划分．二分法是各种划分中最简单的一种，它把概念划分成两个互相对立的子概念．例如人可以划分为男人和女人．我国古代有些哲学家夸大了这种方法，甚至认为可以将世界上一切现象都归结于这种二元系统，并用“阴”和“阳”来表示．这无疑是不够全面的．但是在许多情况下，这种抛弃事物一切非本质的表象，只剩下我们关心的两种非此即彼的特性或实质，无疑将大大简化我们的研究．已经证明，用这种方法在数学、哲学和工程技术的研究中获得极大成功，布尔代数（Boolean algebra）就是其光辉的范例之一．

1.1 开关电路的数学描述

一个开关是指一种器件，在任何时刻，它都处于下列两种状态之一：断开或接通．为了用数学来描述开关电路，首先我们要找两个不同的符号来表示这两种状态．譬如“╳”和“√”，也可以用“0”和“1”．0代表断开状态，而1代表接通状态．这里0，1已失去原来代表数的意义，赋予了新的意义．

同一符号在不同场合表示不同对象，并不奇怪．在社会上有许多同名同姓的人，但在同一个家庭或同一单位，最好不要有重名的人．

其次，我们要引用符号来表示开关．一般，我们用英文字母 a，b，c…，x，y，z…等表示开关，开关 a 在画电路图时可用“—a—”表示．并且 $a=1$ 就表示开关 a 处于接通状态，而 $a=0$ 表示开关 a 处

于断开状态.

两个开关 a 和 b，如果在任何时刻都取相同的状态，则我们认为这两个开关是一样的. 用 $a=b$ 表示；两个开关 a 和 b，如果在任何时刻都取相反的状态，即 $a=1$ 时 $b=0$，而 $a=0$ 时 $b=1$，则称开关 b 是 a 的反相开关，记为 $b=a'$. 显然反相概念是对称的，我们也可以将 a 称为 b 的反相开关，并写成 $a=b'$. 这样，反相开关 a' 的状态，完全依赖 a 的状态来决定. 在数学上一个量完全依赖另一些量的变化而变化的话，则我们把这个量称为另一些量的函数. 这样，我们可以将 a' 看成是 a 的函数（或运算）. 按反相的定义，它们之间的函数关系见表 1.1.

表 1.1

a	a'
0	1
1	0

表 1.2

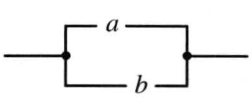
a	b	$a+b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

表 1.3

a	b	$a\cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

从表 1.2 看出 $1+1=1$，请不要惊讶，因为这里 0，1 和 + 都具有新的意义，因此千万不要以旧的思维定式来看待新的运算.

两个开关 a 和 b，可以将它们**并联**（parallel connection）成一个开关网络；用 $a+b$ 表示. 即



可用 ——$a+b$—— 表示. 该开关网络可以看成一个由 a 和 b 组合而成的新开关，因为它在电路中也只有两种状态：接通或断开. 而且它的状态完全由 a 和 b 的状态所决定. 这种依赖关系，和上面一样称为函数关系，即 $a+b$ 是 a 和 b 的函数. 函数有时也被称为运算. 所以，我们可以将"+"看成是开关与开关之间的并联运算. 这里运算符号"+"也已失去了原来在算术中数的"加法"关系. 赋予新的意义. 这一点应该切记. 为了区别起见，有时称并联为逻辑加或布尔加，在不至于混淆的情况下就简称为"加法"运算. 根据并联在电路中的作用，$a+b$ 与 a 和 b 之间的函数关系由表 1.2 给出.

同样，两个开关 a 和 b，可以**串联**（series connection）成一个开

关网络，用 $a \cdot b$ 表示，并称为逻辑乘积或布尔乘积．即____a____b____可用____$a \cdot b$____表示．而 $a \cdot b$ 与 a 和 b 之间的函数关系，根据串联在电路中的作用，由表 1.3 给出．

为了使我们对上述三种基本函数（或运算）有更直观的理解，让我们将完整的电路图画出，并用电灯 Z 的亮(1)和灭(0)来反映开关网络的通(1)和断(0)，并将分析出的状态对应关系列表于图的右边．

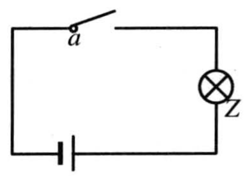


图 1－1　$Z=a$

开关 a 的状态	电灯 Z 的状态
0	0
1	1

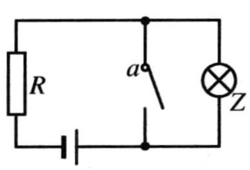


图 1－2　$Z=a'$

开关 a 的状态	电灯 Z 的状态
0	1
1	0

图 1－2 中的 R 是防短路的电阻．开关 a 闭合时，流经电灯 Z 的电流很少，电灯 Z 不亮．故从电流的角度看，Z 相当于“断开”，即 $a=1$ 时，$Z=0$．

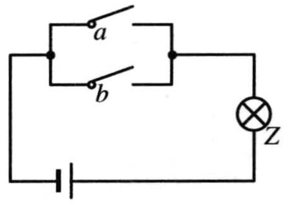


图 1－3　$Z=a+b$

开关 a 的状态	开关 b 的状态	电灯 Z 的状态
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

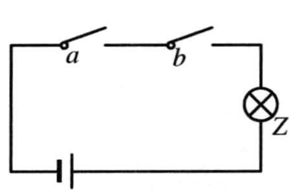


图 1－4　$Z=a \cdot b$

开关 a 的状态	开关 b 的状态	电灯 Z 的状态
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

这样我们不难在图 1－1、图 1－2、图 1－3、图 1－4 中看出，电灯 Z 与电路中的开关的关系分别是 $Z=a$，$Z=a'$，$Z=a+b$ 和 $Z=a \cdot b$．

今后，我们就将“+”和“·”看成是二元运算．而将“′”看成一元运算．因为开关 a 和 b 是只能在 0 或 1 上取值的变元，而运算

结果的值还是取 0 或 1，这样我们就说这些运算在集合 {0，1} 上封闭，或称运算“+”、“·”、“′”定义在集合 {0，1} 上.

我们不难验证上述这三个运算还满足下列等式.

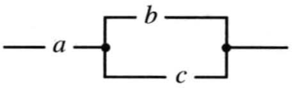
$a+b=b+a$，　　　　$a\cdot b=b\cdot a$，

$a+a'=1$，　　　　$a\cdot a'=0$，

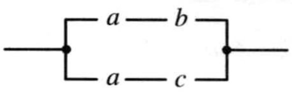
$a+0=a$，　　　　$a\cdot 1=a$，

$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$，　　　　$a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$.

前三个等式比较简单，我们不难直接看出它们的正确性，例如第一行的二个等式说开关 a 和 b 并联（串联）与 b 和 a 并联（串联）是等效的，即并联时哪个在上哪个在下一样的，串联时哪个在先哪个在后一样的，也可以用**真值表**（truth table）验证. 下面我们仅验证 $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$. 这一等式表示下面两个开关网络是等效的，即它们在自变量所有可能取值情况下都有相同的函数值.



和



现在让我们用列表法来比较这两个网络的通断特性.

这里，我们用列表法证明分配律 $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$ 这种方法称为穷尽法. 只有在自变量的值域是有穷的情况下，才有可能应用. 这里我们的值域是 {0，1}，只有两个元素，故可采用.

表 1.4

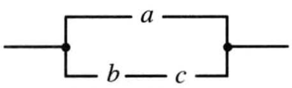
a	b	c	$a\cdot(b+c)$	$(a\cdot b)+(a\cdot c)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

真值表是沿用命题代数中的叫法，历史上命题代数先于开关电路.

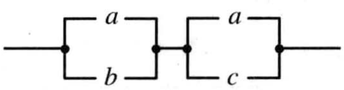
今后，我们把形如 1.4 这样的表称为“真值表”，它是将函数在自变量所有可能取值情况下所对应的函数值算出，按一定顺序排列成一纵列表. 为了穷尽所有可能的取值，我们要知道：n 个变元，每个变元只能取二个值，故共有 2^n 个不同的组合. 排列的次序可以按二进位数的大小，依次从小到大（或从大到小）排列. 上表中共有三个变元，故共有 $2^3=8$ 行，我们从小到大、从上到下排出. 这样，我们看到 $a\cdot(b+c)$ 和 $(a\cdot$

$b)+(a\cdot c)$在任何情况下有相同的值. 即这两个网络在电路中是等效的. 即得 $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$. 这一等式类似于初等代数中乘法对加法的**分配律**（distributive law）. 但提醒大家一下，我们这里应该称它为串联运算对并联运算的分配律，或称**布尔乘法**（Boolean multiplication）对**布尔加法**（Boolean addition）的分配律. 与初等代数不同的是，在开关电路中，布尔加法对布尔乘法也有分配律，即

$a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$. 它表示网络



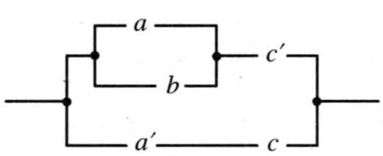
与



是等效的. 验证留给同学作为习题.

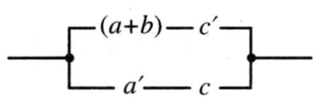
本节我们要求同学们掌握开关电路和它的数学描述之间的相互表示，以及学会简单公式真值表的计算和排列方法，为进一步学习打好基础. 为此让我们再举一些例子.

例 1　求下面这个开关电路的数学表达式.

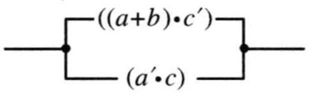


解　初学时，我们可采用逐步转换的方法，每步只转换两个结合最紧密的串联或并联开关.

原电路　⇔



⇔



⇔　——$((a+b)\cdot c')+(a'\cdot c)$——

这样，我们就得到原开关电路的表示式为

$$((a+b)\cdot c')+(a'\cdot c).$$

反之，如果我们已知表达式，欲求它的开关电路，则只要按相反方向，逐步将“+”表示成并联，将“·”表示成串联，这里“⇔”

初学时，建议每步用一对括号. 这样我们明确知道哪两个开关先组合，而后又与哪个开关组合……以后在对运算规定先后次序后，有些括号可以省略，使表示式更简洁.

表示等效（或相互可表示）.

例 2　求 $a'+(b\cdot c)$ 的真值表.

解　由于该式有三个变元，故该表有 $2^3=8$ 行.

1. 按二进制从小到大列出自变量所有不同组合.

2. 根据 a 列的值，算出 a' 列的对应值.

3. 根据 b 列和 c 列的值，算出 $b\cdot c$ 列的对应值.

4. 最后根据 a' 列和 $b\cdot c$ 列的值，算出 $a'+b\cdot c$ 的对应值.

5. 列表（见表 1.5）.

表 1.5

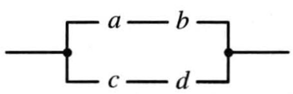
a	b	c	a'	$b\cdot c$	$a+(b\cdot c)$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

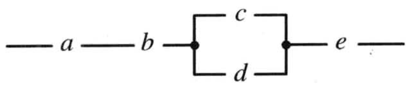
注　如果熟练的话，2、3 步可省略.

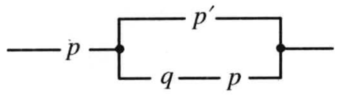
最后，让我们总结一下. 本节的目的是将开关电路用数学来描述. 为此，我们首先用字母来代表开关，用 0 和 1 来表示开关的断开和接通两种状态，并用“＝”号表示等效，然后将开关电路中的三种基本电路——并联、串联和反相（negative phase），分别用三个运算符号“＋”、“·”和“′”来表示. 最后发现在电路中这三个运算遵循的四条基本规律.

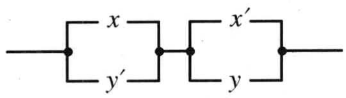
习题　1

1. 写出下列网络的数学表示式.

(1) 

（2） 

（3） 

（4） 

2. 画出具有下列数学表示式的开关网络.

（1） $x\cdot(y+z)$；　　（2） $a+(b'\cdot c'\cdot d')$；

（3） $(u\cdot v)+(v'\cdot w)$；　　（4） $(f+g)\cdot(f'+g')$.

3. 用真值表证明：

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

4. 开关 a 在星期二、星期五和星期日接通；开关 b 在星期一、星期三、星期五接通；开关 c 在星期三、星期四、星期五、星期六接通. 其他时间这三个开关都断开. 求证 $a\cdot b=a\cdot c$. 但是 $b\neq c$.（这说明运算“·”的消去律不成立）.

5. 如果 $a+b=a+c$ 是否可得出 $b=c$？即运算+的消去律是否成立？如不成立，请仿上题举一反例.

1.2 命题逻辑的数学描述

命题是具有真假值的陈述句，并称判断. 它是逻辑学的基本概念与研究对象. 和开关一样，命题也是千变万化. 但从逻辑推理角度考虑，我们只关心它们的两种属性或状态，即真的还是假的.

正如上节所述，可以将简单的开关经过并联、串联和反相组成更复杂的开关网络，可以将该网络本身看成一个开关，它的状态完全由组成它的简单开关的状态确定. 命题也一样，可以由简单命题用**命题连接词**（propositional connectives）“或”、“与”、“非”组合成复合命题，而且复合命题的真假完全由组成它的简单命题的真假来决定.

例如：

今天不下雨.

今天下雨且明天刮风.

今天下雨或者明天刮风.

这三个都是复合命题，我们不难看出. 这些命题的真假是完全由组成它的子命题的真假决定的. 例如今天不下雨真，当且仅当今天下雨假，即它们恰巧有相反的值.

命题逻辑（propositional logic）的主要任务之一就是研究复合命题与其子命题间的结构与真值关系，为了将命题逻辑数学化，首先要用符号来表示命题. 我们约定用英文字母表示命题，其次我们要用二个不同的符号来表示命题两种属性（或状态），用“0”表示假、“1”表示真. 但习惯上用“F”表示假，而用“T”表示真.

这样，$a=F$ 就表示命题 a 是假的. 而 $b=T$ 表示命题 b 是真的. 最后，我们要用符号来表示三个基本连接词.

表 1.6

a	$\neg a$
F	T
T	F

1. 命题连接词“非”用符号“$\neg$”表示.

这样一来，如果 a 表示上海是大城市，则 $\neg a$ 就表示上海不是大城市，容易看出 a 与 $\neg a$ 的真假值恰好相反. 它们之间的关系由表 1.6 所确定. 这样，我们可以将 $\neg a$ 看成是 a 的一元函数（或运算）.

在自然语言中，与连接词“非”有相同功能的其他连接词有“不”、“否定”、“相反”……总之，当且仅当二个命题的真假值在任何条件下都相反时，我们把其中一个看成是另一个的非命题.

表 1.7

a	b	$a\vee b$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

2. 命题连接词“或”用符号“$\vee$”表示.

如果 a 表示命题今天停电，b 表示电视机坏了，那么 $a\vee b$ 就表示复合命题今天停电或者电视机坏了. 容易看出 $a\vee b$ 假当且仅当 a 和 b 同时为假，这样 $a\vee b$ 的真假值完全由 a、b 的真假值决定. 它们之间的关系由表 1.7 所确定. 因此我们可以将 $a\vee b$ 看成是变元 a 和 b 的二元函数（或运算）.

在自然语言中，与连接词“或”有相同功能的其他连接词还有