高等学校教材

非线性动力学引论

黄永念　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

非线性动力学引论

黄永念 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

非线性动力学引论/黄永念编著. —北京：北京大学出版社，2010.7
ISBN 978-7-301-14538-8

Ⅰ.非…　Ⅱ.黄…　Ⅲ.①非线性力学 ②动力学　Ⅳ.O322

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 005991 号

书　　名：非线性动力学引论
著作责任者：黄永念　编著
责 任 编 辑：曾琬婷
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-14538-8/O·0769
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址：http://www.pup.cn　电子邮箱：zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021
出版部 62754962
印 刷 者：北京飞达印刷有限责任公司
经 销 者：新华书店
850mm×1168mm　32 开本　6.625 印张　170 千字
2010 年 7 月第 1 版　　2010 年 7 月第 1 次印刷
印　　数：0001—4000 册
定　　价：18.00 元

序　　言

随着科学技术的日益发展，自然界的非线性问题越来越显现出它的重要性，很多复杂现象的出现都是与非线性相关的，它具有非常广泛的跨学科的普适性. 为此，非常有必要在高等院校为有关专业的研究生开设一门非线性动力学的课程. 该课程要求有关专业的研究生掌握必要的非线性动力学的基本概念、理论分析和定量计算方法.

本书的内容主要集中于非线性科学领域内的四大主流研究课题：孤立波、混沌、分形和斑图. 全书共分十章. 第一章主要简述非线性动力学的几个历史性突破的研究成果，用以强调本书所研究内容的重要性. 第二章介绍分岔与突变理论，它是所有有关专业研究工作的必要基础. 第三章到第六章主要介绍混沌理论的基本概念、研究内容和研究方法. 第七章是分形的基本知识和可能的研究方向. 第八章简述判断混沌系统奇怪吸引子的几种定量研究手段. 第九章重点讨论非线性系统中存在的斑图结构的时-空演化. 第十章则对孤立波作重点的理论分析和介绍.

在本书的编写过程中，朱凤荣工程师对插图作了认真的描绘，作者对此表示深切的感谢.

黄永念

2009 年 6 月

于北京大学

目　　录

第一章 引 言

20 世纪下半叶在非线性动力学领域内引起的几场革命极大地推动了科学事业的发展. 正如许多科学家所强调的那样,科学革命最重要的特点之一是在人的思维中产生具有哲学意义的新概念,它从根本上改变人们对自然界认识的思维方式. 作为非线性动力学的主要研究对象,混沌、孤立子和分形正极大地影响着整个科学事业. 这里我们简要地回顾这几场革命的历史发展过程,从而说明非线性动力学在其中的重要作用.

§1.1 确定性混沌

近半个世纪以来在确定性的非线性动力学系统中的混沌现象的发现是 20 世纪物理学最重要的三次革命(相对论、量子力学和混沌现象)中的一次. 甚至有人预言它将主导 21 世纪的科学. 不管怎样,确定性系统中能够出现不确定的混沌现象确实给人们带来概念上的新飞跃. 传统的观念以 Newton 和 Laplace 为代表. 他们认为确定性的动力系统(如 Newton 运动方程)的运动轨道一定是规则的,可预测的. 但是,这种确定性的观念被法国天体物理学家 Poincaré 打破了. 是他最早在 20 世纪初就指出了在某些非线性系统中存在着运动轨道对初始条件的敏感依赖性. 这一观点正是今天混沌定义中的最核心部分. 由于科学家在非线性动力学方面所做的不懈努力,Poincaré 的思想以及他在天体力学方面的工作经过了半个多世纪终于受到人们的重视. 在 20 世纪 60 年代初期,日本科学家 Ueda 和美国科学家 Lorenz 分别在电路的非线性振动和大气热对流问题中发现了在确定性的非线性动力学方程中会出

现非周期的轨道. 由此发现了理论中最重要的一个现象——奇怪吸引子. 今天它们已被分别命名为 Ueda 吸引子(或称日本吸引子)和 Lorenz 吸引子.

应该指出奇怪吸引子的概念是由比利时数学家 Ruelle 和荷兰数学家 Takens 在 1971 年研究湍流的本质时首次提出来的. 湍流是流体力学和物理学中最困难的一个基础理论研究问题,它在科学发展中的重要地位一再被科学家们所强调. Poincaré 曾思考过流体力学问题,他还曾讲过旋涡理论的课,但他从未提出过任何湍流理论.

Ruelle 在回忆他提出奇怪吸引子的概念时指出,1968 年法国的社会动乱使他有机会自学了 Landau 和 Lifshitz 所著的《流体力学》一书,从而对湍流发生的问题产生了兴趣. 他将 Tohm 和 Smale 研究的可微动力系统中 Poincaré 的想法加以发展,从而形成了敏感依赖初始条件的奇怪吸引子的想法. Ruelle 和 Takens 在刚写完他们的文章后即到美国的一些大学和研究所去作报告,其中包括普林斯顿的高等研究所. 著名物理学家杨振宁教授也邀请他们去作报告,并表示当时他们有关湍流的想法是有争议的. 但几年以后,杨先生接受了这种观点,并多次回国鼓励国内的科技工作者从事混沌理论的研究工作.

物理学家一开始不能接受奇怪吸引子的概念是因为受了传统的 Landau 观点的影响. Landau 认为随着外力的不断增加,流体中被激发的离散的独立频率数也会不断增加. 而奇怪吸引子的预言是一个完全不同的结论: 它应该产生一个连续的频率谱. 这个概念直到 Swinney 和 Gullub 在有关同心圆柱间流体流动的实验和其他很多实验中证实后才被普遍承认.

应该强调的是奇怪吸引子只能在耗散的非线性动力系统中才能存在. 在保守的非线性动力系统中,由于总的相空间体积要保持不变,不可能产生吸引子,因而也就没有奇怪吸引子. 保守系统的研究是从最简单的单摆运动开始的. 单摆运动是一个经典的非线

性动力学问题. 但是多年的研究一直没有发现什么有兴趣的现象. 直到 20 世纪的下半叶, 确定性系统的混沌现象引起极大的重视以后, 人们对单摆运动又重新注入了兴趣. 人们惊喜地发现双摆(双重摆)运动能演示出奇妙的混沌运动轨迹. 今天这种双摆已被制成各种玩具在市场上销售, 也被很多城市作为广场艺术建筑的一部分供人们欣赏.

保守系统的研究中最突出的成果当数 KAM 定理(Kolmogorov Arnold Moser 定理). 这是苏联数学家 Kolmogorov 于 1954 年在研究动力系统的一般理论时提出来的, 并由 Arnold 和 Moser 完成其证明. KAM 定理最重要的结论是在混沌现象中可能存在规则的 KAM 曲面(或 KAM 曲线). Kolmogorov 是伟大的数学家, 但他对湍流研究做出过杰出的贡献. 他发表的湍流研究论文只有 5 篇, 而他提出的相似律和能谱函数的 $-5/3$ 幂次定律是近半个世纪内湍流研究中影响最大的理论成果. 他在 1941 年发表的第三篇湍流短文中已经给出了现代标度理论的某些想法和结果. 因此 Kolmogorov 无可争议地被国际上一致公认为湍流研究的先驱和伟人之一. 目前这种具有普遍意义的自相似性和标度理论正在日益广泛地被应用到各个不同的领域中去, 特别是那些具有局部奇异性的问题已被证实是有力的研究工具.

另一个最突出的成果是美国物理学家 Feigenbaum 于 1975 年发现了周期倍分岔现象中分岔参数收敛比率是一个普适常数 $\delta=4.6692$. 他是从一个最简单的离散非线性动力学方程——一维 Logistic 方程的研究中得到这个惊人的结果的. 如今这个普适的 Feigenbaum 常数已与 π, e 等超越常数齐名, 它也是 20 世纪下半叶人们所发现的唯一一个普适常数, 因此可以认为这个常数的发现是非线性动力学取得突破性进展的一个标志. 正因为非线性动力系统中的运动轨道可以通过周期倍分岔进入混沌状态, 因而这也是混沌理论所取得的重大成果之一.

§1.2 孤立子与孤立波

众所周知,孤立波最早是由英国科学家 Russell 在 1834 年于苏格兰爱丁堡城的联合运河上发现的. 人们引用的文献均是他在 1844 年英国皇家协会报告上发表的论文《论波动》. 但事实上,早在 1840 年他在爱丁堡英国皇家协会的刊物上就发表了一篇更为详细的有关水波的实验研究报告. 在这篇文章中他不仅首次使用了孤立波这个名词,还精确地预言了这种孤立波的传播速度是 $c=\sqrt{g(h+k)}$,这里 g 是重力加速度,h 是未扰动水面的水深,k 是孤立波峰的高度. Russell 的工作成果发表以后,在当时的流体力学界引起了一场争议. 一方面 Boussinesq 于 1871—1872 年发表文章表示支持 Russell 的看法,并给出了精确的孤立波解的表达式,还证实了 Russell 预言的孤立波传播速度. 但另一方面,Airy 和 Stokes 又发表文章表示不同意见. 最后直到 1876 年由 Rayleigh 发表了文章《孤立波》后才以肯定的结论终止了这场争论. 现在我们最常见到的孤立波解则是由荷兰科学家 Korteweg 和 de Vries 在 1895 年给出的水波方程(现称为 KdV 方程)的精确解.

流体力学家最早发现的孤立波一开始并没有受到科学界的重视. 特别是这种孤立波是否稳定,两个孤立波碰撞能否变形等问题长期没有得到正面的回答. 再者由于这种孤立波解是非线性水波方程的精确解,解的叠加原理一般不满足,因此很多人认为这种波"不稳定",没有什么研究价值. 直到 1965 年,美国普林斯顿大学的两位物理学家 Kruskal 和 Zabusky 在研究等离子体问题时,用计算机模拟了 KdV 方程,发现两个孤立波在碰撞后并不改变它的形状、振幅和速度,从而发现这种孤立波具有粒子碰撞的不变特性,并首次引进了孤立子的概念. 它确切地描述了孤立波的本质. 此后在近代物理的很多领域内相继发现了多种孤立子的存在. 最令人惊喜的是,紧接着孤立子的发现,一种新颖的非线性偏微分方程的

理论分析方法,即所谓反散射变换法,以及一整套构造多孤立子精确解的数学和物理的孤立子理论迅速地形成并蓬勃地发展起来了.今天孤立子理论已经是现代物理学界和数学界联系最为密切的一个研究领域.

这一历史经历清楚地告诉我们,今天的科学事业的发展必须要跳出单一学科的狭窄框框,要走多学科互相渗透、互相联系的道路才有发展前途.力学本来就是联系物理学和数学的一座最佳桥梁,非线性动力学就是其中最好的一个研究课题.

§1.3　分　形

分形引起的革命是比较晚发生的.分形的概念最早出现是在1975年Mandelbrot研究湍流间歇性的文章中.Mandelbrot经过长期的思考,提出要研究湍流流场的几何特征,并引入分形和分维来修正Kolmogorov的−5/3幂次定律.但分形概念刚提出时也没有被人们所接受,而是直到1982年Mandelbrot发表了他的划时代巨著《大自然的分形》之后才得到迅速的发展和普遍的承认.1983年,本书作者有幸与Mandelbrot在日本京都的一次湍流国际会议上相遇,他曾将《大自然的分形》一书赠与作者,并希望作者回到中国后,向中国科技工作者宣传他的分形思想.现该著作中译本已发行,而分形的发展势头已大大超过混沌与孤立子.尽管分形是一种数学上的几何概念,但由于分形概念的提出使人们对自然界存在的许多复杂现象有了重新认识的机会,它打破了旧的传统观念的束缚,对自然界众多领域内存在的共性问题——多层次上的自相似性给予一种统一的解释.

分形的定义比较简单.它是一个由无限多个点集组成的一种复杂的几何形体.它的Hausdorff维数一般大于它的拓扑维数.一般来说,它具有非整数的分维数.

19世纪中叶非欧几何的出现曾引起了一场革命.20世纪后半

叶分形几何的出现同样引起一场科学的变革，它改变了人们对自然界的传统认识观．这场变革的关键是目前正在发展的分形动力学的研究，其中包括数学中的分数微积分、物理学中的分形生长、自组织临界性和重整化群等．

§1.4　时-空斑图结构

自然界最常见的现象是各种各样非常复杂的与时间和空间都有关系的所谓时-空结构，其中大到宇宙的星云结构（如星系螺旋波结构）、木星上的大红斑结构、地球上的大气层结构（如台风和龙卷风结构）、化学反应中的螺旋波结构，小到纳米材料的结构和蛋白质的双螺旋结构等．所有这些时-空结构的出现和接着而来的变化都是由于系统的非线性特性所引起的．这些时-空结构的生成和发展规律是人们最为关心的问题，特别是其中的共性问题更为人们所重视．再进一步说，更为复杂的时-空混沌现象和它的控制问题更是目前研究的热点．与以上几场变革相比较，只有这个领域至今还没有取得突破性进展，因此斑图动力学必然成为本世纪科学家重点研究的对象．而它涉及的学科范围之广也是前所未有的，包括生物科学、生命科学、医学等领域都会涉及复杂斑图现象．有关这类问题的突破将大大推动科学事业的发展．非线性动力学是所有这些研究工作的基础．随着研究工作的深入，非线性动力学也将发挥越来越大的作用．

本书的安排基本上涵盖了以上提到的四方面的内容，主要涉及一些比较成熟和基本的研究成果，还增加了作为研究工具的分岔和突变理论．希望通过本书的学习可以给有关领域的研究生和科研工作者一个入门的台阶．

第二章　分岔与突变理论

§2.1　线性微分方程组的显式解

本课程的研究对象是确定性的非线性动力学方程组，研究内容主要包括两个方面：一方面研究非线性动力学方程组的解（通常称为运动轨道）的渐近行为；另一方面研究当系统的控制参数发生变化时整个非线性系统的状态发生变化的情况．分岔理论就是专门研究系统的状态随控制参数变化而发生什么样突然明显变化的理论，其中包括系统的定态解（即不动点）的稳定性发生变化的情况．在不动点 $\boldsymbol{x}_0$ 附近，系统的特性可以用下述线性系统来描述：

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \left.\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right|_{x=x_0} x_j = A_{ij}x_j \quad (i,j=1,2,\cdots,n), \tag{2.1.1}$$

这里根据约定求和法则，重复下标表示对下标求和，本书以下同．这个线性方程组的解传统的表示是利用指数矩阵 e^{At} 写成

$$\boldsymbol{x} = \mathrm{e}^{At}\boldsymbol{x}_0^*, \tag{2.1.2}$$

其中 $\boldsymbol{A}=(A_{ij})$，$\boldsymbol{x}_0^*$ 是初值．这种表示方式并不直观．我们发现，在具有相异特征值的情况中，解可以通过引进特征张量或并矢张量明确地表示为

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} C_k H_{ij}^{(k)} x_{0j}^* \mathrm{e}^{\lambda_k t} = \sum_{k=1}^{n} l_i^{**(k)} l_j^{*(k)} x_{0j}^* \mathrm{e}^{\lambda_k t}, \tag{2.1.3}$$

其中 $C_k = \prod\limits_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{n}(\lambda_k-\lambda_s)^{-1}$，$\lambda_k(k=1,2,\cdots,n)$是矩阵$(A_{ij})$的特征值，它们都满足特征方程

$$\det|A_{ij}-\lambda\delta_{ij}| = 0, \tag{2.1.4}$$

这里(δ_{ij})为二阶单位对称张量，$l_i^{**(k)}$，$l_j^{*(k)}$分别是对应特征值λ_k的左特征向量和右特征向量，它们的计算是通过特征张量$(H_{ij}^{(k)})$来进行的，而特征张量$(H_{ij}^{(k)})$定义为

$$H_{ij}^{(k)}=(A_{im}-\lambda_{k+1}\delta_{im})(A_{mp}-\lambda_{k+2}\delta_{mp})\cdots\cdot(A_{qj}-\lambda_{k+n-1}\delta_{qj})\quad(\lambda_{k+n}=\lambda_k).\tag{2.1.5}$$

利用Cayley-Hamilton定理容易证明特征张量$(H_{ij}^{(k)})$可以用并矢张量表示为

$$H_{ij}^{(k)}=\prod_{\substack{s=1\\s\neq k}}^{n}(\lambda_k-\lambda_s)l_i^{**(k)}l_j^{*(k)}.\tag{2.1.6}$$

另外，我们还可以得到二阶张量(δ_{ij})和(A_{ij})的并矢张量表示式：

$$\delta_{ij}=\sum_{k=1}^{n}l_i^{**(k)}l_j^{*(k)},\quad A_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k l_i^{**(k)}l_j^{*(k)}.\tag{2.1.7}$$

这里我们给出的线性方程组显式解的表达式清楚地表明了此显式解实际上是将初值在各个特征方向上进行投影分解，同时给出解在各个特征方向上的演化情况. 下面我们将进一步说明每一个特征方向正好代表不动点处一个稳定流形(对应$\lambda_k<0$)或不稳定流形(对应$\lambda_k>0$)的方向. 从直观上看，$\lambda_k<0$对应沿此特征方向的运动轨道是接近不动点的，即沿此方向有压缩作用；$\lambda_k>0$对应沿此特征方向的运动轨道是远离不动点的，即沿此方向有拉伸作用. 特征值λ_k可以是复数. 由于特征方程的系数是实数，因此复特征值必定是成对出现的，且互为共轭复数，它们对应的特征向量也是互为共轭的复特征向量. 它们虽不对应两个特征方向，但它们对应一个平面子流形. 在这个子平面上运动轨道是一组螺旋线. 这反映了运动轨道在这个子平面上有旋转作用.

若特征值λ_k存在p重根，则上述解的表达式就不适用了. 因为对应重特征值的特征张量个数减少. 此时需要再定义广义特征张量$(D_{ij}^{(s)})$：设$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_p$，则

$$D_{ij}^{(s)}=(A_{im}-\lambda_{s+1}\delta_{im})(A_{mp}-\lambda_{s+2}\delta_{mp})\cdots\cdot(A_{qj}-\lambda_n\delta_{qj})\quad(s=1,2,\cdots,p).\tag{2.1.8}$$

显然 $D_{ij}^{(1)}=H_{ij}^{(1)}$. 线性方程组的解则为

$$x_i=\Big\{\Big[\sum_{s=1}^{p}\frac{t^{p-s}}{(p-s)!}D_{ij}^{(s)}+\sum_{r=1}^{p-1}\sum_{s=1}^{p-r}\sum_{s=p+1}^{n}(\lambda_s-\lambda_1)^{-1}\frac{t^{r-s}}{(r-s)!}D_{ij}^{(s)}\Big]$$

$$\cdot e^{\lambda_1 t}\prod_{s=p+1}^{n}(\lambda_1-\lambda_s)^{-1}+\sum_{k=p+1}^{n}l_i^{**(k)}l_j^{*(k)}e^{\lambda_k t}\Big\}x_{0j}^{*}. \qquad (2.1.9)$$

上面这种分解形式实际上对应了矩阵中的若当块.

例如：对应 $n=3, p=2, \lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$ 的情况，解为

$$x_i=\Big\{\frac{1}{\lambda_1-\lambda_3}D_{ij}^{(2)}e^{\lambda_1 t}+\Big[\frac{t}{\lambda_1-\lambda_3}-\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_3)^2}\Big]H_{ij}^{(1)}e^{\lambda_1 t}$$

$$+\frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)^2}H_{ij}^{(3)}e^{\lambda_3 t}\Big\}x_{0j}^{*}.$$

当对应 p 重特征值 λ_k 的特征向量仍有 p 个时，并矢张量的分解方式仍然有效.

例 1 在方程组(2.1.1)中，若

$$(A_{ij})=\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix},$$

则特征方程为 $\lambda(\lambda-3)(\lambda-2)=0$，特征值为 $\lambda_1=3, \lambda_2=2, \lambda_3=0$. 于是

$$(A_{ij}-\lambda_1\delta_{ij})=\begin{bmatrix}0 & -1 & 3\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix},\quad (A_{ij}-\lambda_2\delta_{ij})=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix},$$

$$(A_{ij}-\lambda_3\delta_{ij})=\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix},\quad (H_{ij}^{(1)})=\begin{bmatrix}4 & -4 & 8\\ 3 & -3 & 6\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix},$$

$$(H_{ij}^{(2)})=\begin{bmatrix}1 & -3 & 5\\ 1 & -3 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\qquad (H_{ij}^{(3)})=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -3 & 3 & 3\\ -2 & 2 & 2\end{bmatrix},$$

$$x_i=\Big[\frac{1}{3}H_{ij}^{(1)}e^{3t}-\frac{1}{2}H_{ij}^{(2)}e^{2t}+\frac{1}{6}H_{ij}^{(3)}\Big]x_{0j}^{*}.$$

例 2　在方程组(2.1.1)中，若

$$(A_{ij})=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix},$$

则特征方程为$(\lambda-2)(\lambda-1)^2=0$，特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1$. 于是

$$(A_{ij}-\lambda_1\delta_{ij})=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix},$$

$$(A_{ij}-\lambda_2\delta_{ij})=(A_{ij}-\lambda_3\delta_{ij})=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},$$

$$(H_{ij}^{(1)})=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}=(\lambda_1-\lambda_2)^2 l_i^{**(1)}l_j^{*(1)},$$

$$(H_{ij}^{(3)})=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$D_{ij}^{(2)}=A_{ij}-\lambda_1\delta_{ij}=(\lambda_2-\lambda_1)(l_i^{**(2)}l_j^{*(2)}+l_i^{**(3)}l_j^{*(3)}),$$

$$x_i=[l_i^{**(1)}l_j^{*(1)}\mathrm{e}^{2t}-(l_i^{**(2)}l_j^{*(2)}+l_i^{**(3)}l_j^{*(3)})\mathrm{e}^{t}]x_{0j}^{*}.$$

例 3　在方程组(2.1.1)中，若

$$(A_{ij})=\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&1&-1\\1&1&1\end{bmatrix},$$

则特征方程是$(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+3)=0$，特征值是$\lambda_1=2,\lambda_{2,3}=1\pm\mathrm{i}\sqrt{2}$. 于是

$$(A_{ij}-\lambda_1\delta_{ij})=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&-1&-1\\1&1&-1\end{bmatrix},$$