高等医药院校教材

供药学类专业用

高等数学

第二版

方积乾　主编

人　民　卫　生　出　版　社

高等医药院校教材

（供药学类专业用）

高　等　数　学

第二版

方积乾　主编

高等数学编审小组

组长　方积乾（北京医科大学）

王　珍（上海医科大学）

姚金华（北京医科大学）

刘定远（华西医科大学）

李柏新（中国药科大学）

宋学源（沈阳药学院）

人民卫生出版社

前　言

本书是由卫生部组织《高等数学》编写组编写的，供我国高等医药院校药学类专业本科生学习《高等数学》课程的推荐教材，亦可供相近专业使用。全书教学时间为120～160学时。本书第一版于1979年由上海科技出版社出版，于1986年第一次修订后由人民卫生出版社出版，此次系第二次修订（国家教委第三伦规划教材）。这次修订的指导思想是：理论联系实际，少而精和内容更新。

这一版较前版更注意突出基本概念、基本理论和基本技能的训练，针对后期课程和专业工作的需要，着重培养学生应用所学数学知识分析和解决实际问题的能力。凡我们认为非数学专业学生不必追求的复杂计算和证明技巧以及与专业需要关系甚远的某些知识性内容，均予删减。在增加医药学应用实例的同时，不囿于国内一般高等数学教材的习惯模式，我们在原有经验公式、数值微商、数值积分的基础上增加了插值法、方程(组)求根和常微分方程数值解，以适应实际工作者日益增多的对数值计算的需求；并且，还增加了后期课程所需的拉普拉斯变换求解微分方程(组)，以及傅里叶级数和傅里叶变换等方面的知识。

在教材的结构上，这一版也有所改进。原每节之后的“练习”栏目改为“思考与讨论”，着重从反面提出“挑战”，激发学生思考，并为实习课提供讨论的素材，以推动教学重点向概念与方法的理解转移；每章之后增加了简短的小结，引导学生融汇贯通前后内容，提炼和升华所学知识，各章小结连贯起来便是全书的梗概。此外，正文中出现的主要术语均注以相应的英文，并在书后的附录中汇集成一份汉英名词对照表，或许有助于日后的工作。

此次修订，作者们缅怀已故原主编黄志宏教授，倍加努力，紧密协作，终以改进颇多之书稿告慰逝者。修订期间，曾得到北京医科大学教务处、华西医科大学药学院、中山医科大学卫生统计学教研室与数学教研室等单位的关怀与支持。北京医科大学张侠老师出色地承担了大量秘书工作，并以其多年教学心得对本次修订提出了许多宝贵的意见；章建红老师协助绘制了部分插图。此外，广州医药学院陈昭华、饶裕珍和山西晋东南师专王宝鑫等老师作为本书的使用者，也先后提出过有益的建议。借此，对上述部门和同仁一并致谢，并诚挚地渴求更多关心本书的师生和各界人士不吝赐教。

主编　方积乾

1991年5月于广州

目　录

第一章 函　数

事物总是不断运动变化的。研究事物变化规律，是认识和改造客观世界的需要。函数关系表达了事物间的量的变化规律，因而高等数学把函数作为研究的中心对象。

高等数学对推动自然科学和工业生产有十分重要的作用。现代医药学领域中，由于应用了高等数学的概念和方法，出现了不少新的学科。如药物动力学、定量药理学、生物药剂学、系统生理学和医学信息学等等。这充分显示，定量化是当代生命科学发展的一个明显趋势。

为适应本课程教学的需要，本章将把中学的函数知识适当加深并系统化，同时对医药科技中常用的插值方法、经验公式和曲线的直线化等作一简要介绍。

第一节　函数概念

一、常量与变量

自然科学中常出现各种不同性质的量。例如，在自由落体运动过程中，就有下落时间 t、下落距离 S 和重力加速度 g 等三个量。它们的关系是 $S=\frac{1}{2}gt^2$。重力加速度一般取 9.8 米/秒^2，S 和 t 则可以取不同的数值。

这种在某一过程中，保持一定数值的量叫做**常量**（constant）；可以取不同数值的量叫做**变量**（variable）。

又如，圆的直径 d 变化时，圆周长 c 也随之改变，但它们的比值 π 却保持不变。因此，d 和 c 是变量，圆周率 π 是常量。

再如，在圆柱形的反应塔内，反应液的容积 V 同反应液面高 h 的关系是 $V=\pi R^2h$。在整个反应过程中，反应塔半径 R 总保持同一数值，是常量，V 和 h 可以取不同的值，它们是变量。

应当注意，常量与变量是对一定的研究过程而言的。同一个量在某一过程中是常量，在另一过程中可能是变量。例如，在同一地点研究自由落体运动，重力加速度 g 是常量；在不同地点研究，则 g 不能当作常量而应是变量。

常量可看成数轴上的一个定点，常用 a，b，c 等字母表示；变量则可看成数轴上的动点，常用 x，y，z 等字母表示。

二、函数的定义

同一过程中几个变量的变化常常不是孤立的，而是按照一定规律相互联系着。下面先从几个例子来考察两个变量间变化的相依关系。

例 1　对某糖尿病患者作葡萄糖耐糖试验。按每公斤体重口服葡萄糖1.75克后，测定血糖结果见下表：

口服葡萄糖后的时间 t（小时）	0	0.5	1	2	3
患者血糖水平 y（毫克%）	115	150	175	165	120

可见，给定一个服药后的时刻 $t(t=0，0.5，\cdots)$，该患者的血糖水平 y 相应地有一个确定的数值。

例 2　从某蒸馏塔顶部的温度自动记录仪上，获得某班工作时间（8 时至16时）内，塔内温度的变化曲线（图1.1）。

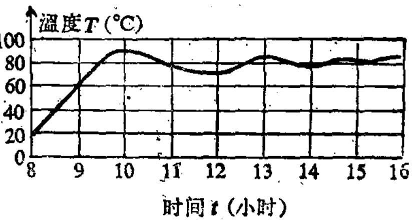


图 1.1

从曲线上可以直观地看到，8 时至 16 时内各时刻t，塔内温度T的高低。如$t=9$小时，$T=60$℃。因而，它形象地表示了温度T 依时间 t 的变化规律。

例 3　考察圆面积A和半径R的相依关系。

大家知道，它们的关系由公式

$$A=\pi R^2 \quad (R>0)$$

给出。当半径R取某一正数时，面积A随之被该式确定了一个正数值。

类似上面的例子还可以举出很多。仅从这三例可以看出，它们所含变量的意义不同，取值大小不同，表示方法不同。但是，如果抽去其具体内容，只考虑两个变量在变化过程中的数量关系，就会发现它们的共同点是：当一个变量在某一范围内每取定一个值以后，另一变量便有确定的值与之对应。这就是函数关系的实质。

定义　在某一变化过程中，有两个变量 x 和 y，如果对于 x 在某一范围 D 内的每一个取值，按一定法则，y 都有确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数 (function)。记作

$$y=f(x) \quad 或 \qquad y=g(x)或 \qquad y=y(x)$$

x 称为自变量 (independent variable)，**y 叫做因变量** (dependent variable)，**D 称为函数的定义域** (domain of definition)。

对于自变量的某一取值$x=x_0$，若函数有确定的对应值，则称函数 $y=f(x)$在x_0处有定义，该对应值称为函数在 x_0 处的**函数值** (functional value)，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$。函数值的全体S称为函数的**值域**(doma in of functicnal value)。

例 4　设函数$y=(x+1)^2$，求$x=2$和$x=\sqrt{2}$时 y 的函数值。

解　$y|_{x=2}=(2+1)^2=9$

$y|_{x=\sqrt{2}}=(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$

例 5　设函数$f(x)=3\cos 2x$，求$f(\frac{\pi}{2})$和 $f(\omega t+\frac{\varphi}{2})$。

解　$f(\frac{\pi}{2})=3\cos(2\cdot\frac{\pi}{2})=3\cos\pi=-3$

$$f(\omega t+\frac{\varphi}{2})=3\cos[2(\omega t+\frac{\varphi}{2})]=3\cos(2\omega t+\varphi)$$

从集合与映射的观点看，函数可定义为函数定义域D到函数值域S上的一个映射

$$f: D\to S \text{或} S=\{y|y=f(x),\ x\in D\}$$

例如，函数 $y=x^2$，即$S=\{y|y=x^2,\ x\in(-\infty,\ +\infty)\}$，所以函数关系由定义域、值域和对应法则组成。

在使用函数记号和考察函数的定义域时，有些问题是需要特别注意的。现说明如下：

函数$y=f(x)$的记号中，f 表示变量 y 与 x 的对应法则，不能误认为是 f 与 x 的乘积。在没有给出函数具体表达式的讨论中，$f(x)$ 表示任何符合条件的函数；在具体问题中，则表示该问题的一个确定函数，如例 1 中，$f(x)$ 表示由该表所规定的函数关系。当然，在同一个问题中，若有两个函数均以 x 为自变量，当一个函数用 $f(x)$ 表示时，另一个函数可用$g(x)$ 表示，以示区别。

函数定义域是自变量的取值范围。在一般性讨论时，如果函数是由没有指明定义域的公式给出的，那么函数的定义域就是指使表达式有意义的一切自变量值的集合；在实际问题中，函数的定义域则要由问题的实际意义来确定。如例 3 中，面积A的定义域不能按使表达式$A=\pi R^2$ 有意义的R值确定为$-\infty<R<+\infty$，而应根据半径的实际意义确定为$0<R<+\infty$。记号"∞"读作"无穷大"（详见第二章）。

例 6　求函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域。

解　根式要求$4-x^2\geqslant0$才有意义。故函数 y 的定义域为$-2\leqslant x\leqslant 2$。

由于量的变化范围常常用不等式表示，为便于研究函数，我们引入几种区间概念。

介于数轴上的两个点 a 和 b （即数 a 和 b ）之间的全部点（数）叫做**开区间**（open interval)。记作 $(a,\ b)$，即$a<x<b$。a 与 b 叫做区间的端点（end points)。如果把端点也包括在区间内叫做**闭区间**（closed interval)。记作$[a,\ b]$，即 $a\leqslant x\leqslant b$。类似有半开半闭区间（half-closed interval) $a\leqslant x<b$，记作 $[a,\ b)$；$a<x\leqslant b$ 记作 $(a,\ b]$。有时不需要指明所考虑的区间是否含有端点，我们就简单地说"区间"，而且也使用圆括号。当区间的一个端点或两个端点都趋向无穷远点时，我们称这种区间为无穷区间（infinite interval)。例如，当 $a<x<+\infty$时，记为 $(a,\ +\infty)$；当$-\infty<x\leqslant b$ 时，记为$(-\infty、b]$，当$-\infty<x<+\infty$时，记为$(-\infty,\ +\infty)$。

例 7　求函数 $y=\frac{1}{3-x}\sqrt{x^2-1}$ 的定义域，并用区间表示。

解　要使 y 有定义，必须有$x^2-1\geqslant0$且$x\neq3$。由此得 y 的定义域（图1.2）为三部分：

$$-\infty<x\leqslant-1,\quad 1\leqslant x<3,\quad 3<x<+\infty$$

记作$(-\infty,\ -1]$，$[1,\ 3)$，$(3,\ +\infty)$或$(-\infty,\ -1]U[1,\ 3)U(3,\ +\infty)$。其中，$U$ 是集合相并的记号。

图 1.2

此外，邻域也是以后经常用到的一种区间概念，它表示 x 在某一点 a 附近取值。设 a 和 δ 是实数，$\delta>0$，则开区间

$a-\delta<x<a+\delta$（或 $|x-a|<\delta$）

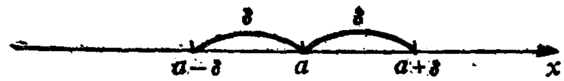


图 1.3

称为点 a 的 δ **邻域**（neighborhood）。即以点 a 为中心，长度为 2δ 的开区间（图 1.3）。

思考与讨论

1．什么是常量？什么是变量？试举例说明常量与变量的辩证关系。

2．不等式 $0\leqslant(x-1)^2\leqslant4$ 与 $0\leqslant x-1\leqslant2$ 所表示的 x 的取值范围是否相同？

3．$|x|<2$ 与 $x^2<4$ 表示的 x 的取值范围是否相同？

4．在下列两种变化过程中，考虑一定质量的气体的温度、体积、压强，哪些是变量？哪些是常量？

（1）等温压缩过程；

（2）封闭容器加热过程。

5．函数是怎么定义的？下列关系是否是函数关系？

（1）恒速静脉滴注给药，其速度与时间的关系；

（2）儿童体重与身高的关系；

（3）小麦产量与施肥量的关系；

（4）立方体体积与边长的关系；

（5）药品与是否合格品的关系。

6．函数关系有哪几个要素？何谓函数的定义域？怎样确定函数的定义域？举例说明。

7．两个函数相同是指什么？下列各组内的函数相同吗？

（1）$f(x)=\dfrac{x}{x(x+1)}$，　$g(x)=\dfrac{1}{x+1}$；

（2）$g(x)=\sqrt{x^2}$，　$h(x)=(\sqrt{x})^2$；

（3）$\varphi(x)=\sqrt{x^2}$，　$\varphi(x)=|x|$；

（4）$y(x)=2\ln|x|$，　$Z(x)=\ln x^2$；

（5）$Z(x)=\ln\sqrt{x}$，　$W(x)=\dfrac{1}{2}\ln x$；

（6）$f(x)=x$，　$\varphi(x)=e^{\ln x}$；

（7）$f(x)=\arcsin x$，　$g(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arccos x$；

（8）$g(x)=x^x$，　$h(x)=e^{x\ln x}$。

8．$f(x^2)$ 与 $[f(x)]^2$ 是一回事吗？举例说明。

第二节　函数的表示法和函数的特性

一、函数的三种表示法

1．**列表法**　用一张列有一系列自变量值和对应的函数值的表格来表示函数的方法

称为**列表法**（tabular method）。大家熟悉的平方根表、三角函数表、对数表等都是用列表法表示的函数。用列表法表示函数，不仅可以避免烦琐的计算，而且还可以表达解析式（公式）未知的函数，在医药科学中经常使用，如上节例 1 。但是它的缺点是只能查表上列出的函数值，且不够直观，也不便作理论分析。

2．图示法 用坐标平面上的图形（一般为曲线）来表示函数的方法叫做**图示法**(graphical method)。上节例 2 和大家熟悉的指数曲线、对数曲线、正弦曲线等等都是用图示法表示函数。图示法的优点是直观性强，可以启迪思维。但是不够精确，也不便于理论分析。

3．解析法 用包含自变量和函数的数学式子表示函数的方法称为**解析法**(公式法)（analytical method)。上节的例 4 至例 7 都是用解析法表示的函数。解析法的优点是便于理论分析和数值计算。今后研究变量间关系，主要是用解析法表示函数。

二、分段函数、整自变量函数与反函数

1．分段函数 在用解析法表示函数中，有时对于自变量的一切取值，函数的对应值常常不能用同一个解析式表示。例如在分析仪的示波器上显示的是如图 1.4 所示的三角波，其电压V与时间 t 的解析表达式为

$$V=\begin{cases}2t & \text{当}0\leqslant t\leqslant 1\\ 4-2t & \text{当}1<t\leqslant 2\end{cases}$$

一般说来，对于自变量在不同范围内的取值，如果一个函数分别采用不同的解析式表示其对应值，这样的函数叫做**分段函数**（piecewise function)。例如

$$y=f(x)=\begin{cases}0 & \text{当}x\leqslant 0\\ x & \text{当}0<x<1\\ 1 & x>1\end{cases}$$

它的定义域为

$$(-\infty,\ 1),\ (1,\ +\infty)$$

它的图形是图1.5。

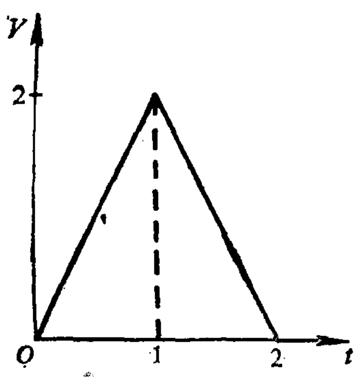


图 1.4

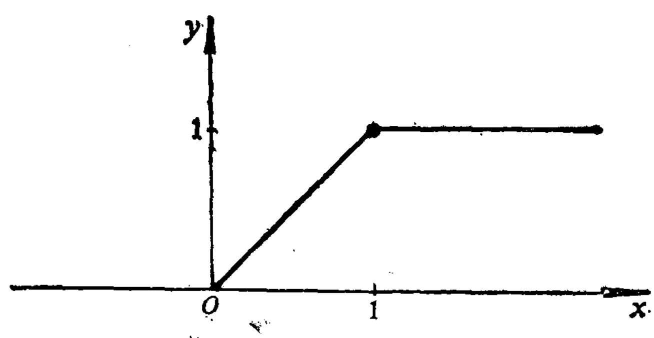


图 1.5

2．整自变量函数 定义域为自然数集N的函数叫做**整自变量函数**(function of integral argument)。记作

$$y=f(n) \qquad n\in N$$

为方便起见，常把这类函数的自变量写成脚标。记作x_n，y_n，z_n等。如$y_n=\frac{1}{n}$，$z_n=\frac{1}{10^n}$等。有时，也把这类函数按序号排列起来写成数列形式：

$$y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n,\ \cdots\cdots$$

或缩写成$\{y_n\}$。如$\{\frac{1}{n}\}$和$\{\frac{1}{10^n}\}$可分别表示数列

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots\cdots$$

$$0.1,\ 0.01,\ 0.001,\ \cdots,\ \frac{1}{10^n},\ \cdots\cdots$$

中学里的等比数列就是整自变量函数。既可写成

$$y_n=aq^{n-1} \quad n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

或

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \cdots,\ aq^{n-1},\ \cdots\cdots$$

也可缩写成$\{aq^{n-1}\}$。所以，今后不用专门去区分整自变量函数与数列。

3. **反函数** 在研究自由落体运动时，若根据下落时间t确定下落距离S，便以t为自变量，S为因变量。它们的关系是

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

相反，若需要根据距离确定时间，便以S为自变量，t为因变量。它们的关系由上式确定为

$$t=\sqrt{2S/g}$$

我们称函数$t=\sqrt{2S/g}$为函数$S=\frac{1}{2}gt^2$的反函数；$S=\frac{1}{2}gt^2$为直接函数。

一般说来，如果已知y是x的函数$y=f(x)$，则由它可确定的一个以y为自变量，x为因变量的函数

$$x=\varphi(y)$$

就是函数$y=f(x)$的反函数。习惯上常把$x=\varphi(y)$中的自变量仍用x表示，因变量仍用y表示，函数$y=\varphi(x)$也称为$y=f(x)$的**反函数**（inverse function），$y=f(x)$称为**直接函数**（direct function）。例如$y=x^2$和$y=x^3$的反函数分别为$y=\pm\sqrt{x}$和$y=\sqrt[3]{x}$。

在同一坐标系内，反函数$y=\varphi(x)$与其直接函数$y=f(x)$的图形是关于直线$y=x$的对称图形（图1.6）。利用这种对称关系，很容易从直接函数$y=f(x)$的图形获得其反函数$y=f^{-1}(x)$的图形。例如，作抛物线$y=x^2$（图1.7的实线）关于$y=x$的对称图形（图1.7的虚线），就得到它的反函数$y=\pm\sqrt{x}$的图形。

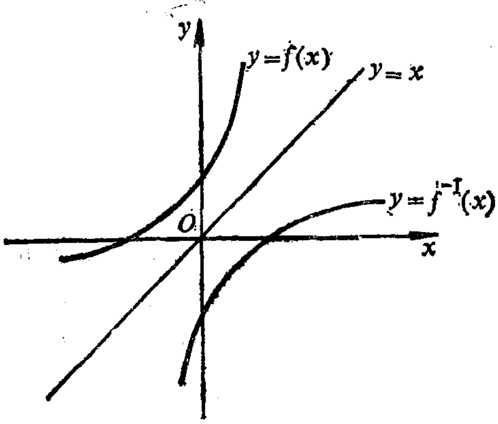


图 1.6

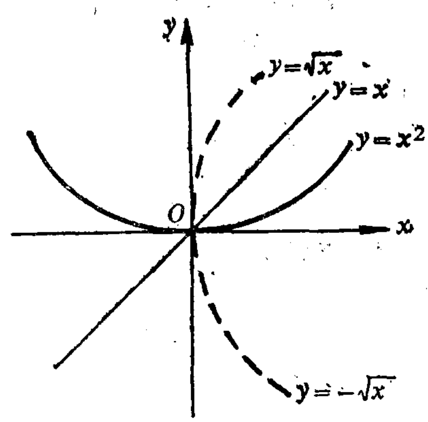


图 1.7

三、函数的几种特性

下面函数的几种特性是常见的，这里先给出它们的定义。

1. 单值性与多值性 对于自变量的每一个取值，函数 y 仅有一个确定的值与之对应，这样的函数叫**单值函数**(one-valued function)；否则叫做**多值函数**(multiple-valued function)。例如，函数$y=x^2$是单值函数，它的反函数$y=\pm\sqrt{x}$是多值函数（图1.7)。

2. 单调性 函数$y=f(x)$对于区间(a, b)内任意两点x_1与x_2 $(x_1<x_2)$，如果总有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

成立，则称函数$f(x)$在区间(a, b)内是**单调增加**的（递增）(monotone increasing)，相应的函数图形是单调上升的；如果总有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

成立，则称函数$f(x)$在区间(a, b)内是**单调减小**（递减）(monotone decreasing)，相应的函数图形是单调下降的；区间(a, b)叫**单调区间**(monotone interval)。在整个区间上单调增加的函数或者单调减小的函数称为**单调函数**(monotone function)。单调增加的函数在区间内随x的增大而增大；单调减小的函数在区间内随x的增大而减小。有的函数在某些区域是单调增加的，在另一些区域是单调减小的。例如函数$y=x^2$在$[0, +\infty)$内是单调增加的；在$(-\infty, 0]$内是单调减小的；而在区间$(-\infty, +\infty)$内就不是单调函数（图1.7)。

可以证明，**单调函数一定有反函数**。

对于整自变量函数（数列）的单调性的定义是更为广义的。即为

对于数列$\{y_n\}$，如果有

$$y_1\leqslant y_2\leqslant y_3\leqslant\cdots\leqslant y_n\leqslant\cdots\cdots$$

成立，则称该数列是单调增加的；如果有

$$y_1\geqslant y_2\geqslant y_3\geqslant\cdots\geqslant y_n\geqslant\cdots\cdots$$

成立，则称该数列是单调减小的。这两种数列统称为单调数列(monotone sequence of number)。

3．有界性　对于函数$y=f(x)$的定义域（或定义域的一部分）内的一切x值，若存在一个正数M，使函数的对应值$f(x)$都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称$f(x)$在定义域（或定义域的一部分）内**有界**（bounded），否则叫**无界**（unbounded）。例如，$y=\frac{1}{x}$在区间（1，2）内有界，而在区间（0，1）内无界。

4．奇偶性　在定义域内，若函数$y=f(x)$的自变量x改变符号时，函数值也改变符号，即$f(-x)=-f(x)$，则称此函数为**奇函数**（odd function）；若x改变符号时，函数值不变，即$f(-x)=f(x)$，则称此函数为**偶函数**（even function）。例如，函数$y=x^3$及$y=\sin x$都是奇函数；函数$y=x^2$及$y=\cos x$都是偶函数，函数$y=1+\sin x$既不是奇函数，也不是偶函数。

根据奇函数与偶函数的定义，不难得出，奇函数的图形一定对称于原点；偶函数的图形一定对称于y轴。

5．周期性　在定义域内，若函数$y=f(x)$满足

$$f(x+T)=f(x)\qquad(T\neq0)$$

则称此函数为**周期函数**（periodic function）。使上述关系式成立的最小正数T叫做**周期**（period）。例如，正弦函数$y=\sin x$是周期函数，它的周期是2π；正切函数$y=\mathrm{tg}x$是周期为π的周期函数。

思考与讨论

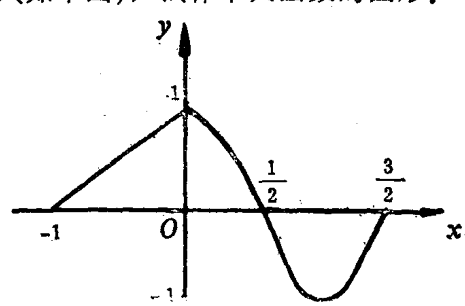
1．已知函数$y=f(x)$在直角坐标系中的图形(如下图)，试作下列函数的图形：

(1) $y=-f(x)$；

(2) $y=f(x+1)$；

(3) $y=f(x)+1$；

(4) $y=|f(x)|$。



2．在同一坐标系作$y=x^3$，$x=\sqrt[3]{y}$和$y=\sqrt[3]{x}$的图形，从中得出什么结论？

3．反函数仍是自己的函数$y=f(x)$，在直角坐标系中其图形具有什么特点？

4．单值函数与单调函数是一回事吗？

5．试证：若曲线$y=f(x)$上任意不相同的两点的割线的斜率大于0，则函数$y=f(x)$是单调增加的；若斜率小于0，则是单调减小的。

6．函数的有界性与哪些因素有关？下列函数有界吗？

(1) $y=x-[x]$（$[x]$表示不大于x的最大整数）；

(2) $f(x)=\frac{1}{x}$

$(a)0<x<+\infty$；$(b)\ 1<x<+\infty$；(c) $(-\infty,\ 0)$；

(3) $\varphi(t)=\sin\frac{1}{t}$ $(0<t<+\infty)$；