Vague集的相似度量及其应用

张福金　王鸿绪 编著

云南出版集团公司
云南科技出版社

Vague集的相似度量及其应用

张福金　王鸿绪　编著

云南出版集团公司
云南科技出版社
·昆　明·

图书在版编目(CIP)数据

Vague集的相似度量及其应用／张福金,王鸿绪编著.
—昆明:云南科技出版社,2010.6
ISBN 978-7-5416-3999-9

Ⅰ.①V… Ⅱ.①张… ②王… Ⅲ.①决策程序—高等学校—教材 Ⅳ.①C934

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第117878号

云南出版集团公司
云南科技出版社出版发行
(昆明市环城西路609号云南新闻出版大楼　邮政编码:650034)
昆明理工大学印务包装有限公司印刷　全国新华书店经销
开本:787mm×1092mm　1/16　印张:8.5　字数:190千字
2010年6月第1版　2010年6月第1次印刷
印数:1～1000册　定价:25.00元

内容简介

本书是“Vague 集应用系列书”中的第二本书，是该系列书中的第一本书《Fuzzy 集和 Vague 集》的内容的继续，本书介绍了 Vague 值化成 Fuzzy 值的方法、Vague 集的相似度量和 Vague 集的模式识别规则、Vague 集的综合决策规则、区间值模糊控制器等三种应用方法，并选编了在各专业领域中的若干应用实例.

本书可作为高等学校数学专业、应用数学专业、计算机信息处理专业、人工智能专业等专业的本科生、硕士研究生的教材或选修课教材或教学参考书，由于 Vague 集的应用广泛，本书也可作为更多专业的科技工作者的参考书.

前　　言

于1993年Cau和Bueehrer提出Vague集理论,它是Fuzzy集理论的一种推广.英语单词"Fuzzy"和"Vague"都可翻译为"模糊的".这两个都以"模糊"冠名的集合理论是Cantor集合论的补充和发展.在Vague集理论中,把人们对事物常从正、反两个方面考虑的特点,把一个Vague值$A(x) = [t_A(x), 1 - f_A(x)]$中的$t_A(x) \in 0.1$叫做赞成度(元素$x$对Vague集$A$的赞成票),叫做反对度(元素$x$对Vague集$A$的反对票),并把$\pi_A(x) = 1 - t_A(x) - f_A(x)$叫做踌躇度(元素$x$对Vague集$A$的弃权票),因此Vague集的优点是可把模糊信息描述得更详细、丰富、全面、直观.这两个都以模糊冠名的集合理论在研究和处理模糊信息时,各有所长,都有用武之地,并被广泛应用到许多领域中.这两个模糊集理论不管在理论研究方面,还是在应用研究方面,相互影响、相互借鉴、相互渗透、相互补充是不可避免的.由于Vague集理论的应用刚刚起步,但其有很大的研究和应用空间.因此才编写此书以飨读者.

编写"Vague集应用系列书"的目的是推动Vague集的理论和应用研究.其中的第1本书《Fuzzy集和Vague集》,将介绍Fuzzy(记之为模糊)集理论的基本概念及模糊模式识别、模糊综合评判、模糊聚类分析等三种应用方法、应用实例和相关理论,也介绍了Vague集的基本概念、Vague值的扩展、Fuzzy值向Vague值的转化方法,这些数据转换方法的研究,对营造Fuzzy环境和Vague环境是至关重要的,从某种意义来说,它们是Fuzzy集和Vague集的应用的前提,其中的第2本书《Vague集的相似度量及其应用》,即本书,是该系列书中的第一本书,内容将继续介绍Vague值化成Fuzzy值的方法、Vague集之间的相似度量和Vague集的模式识别规则、Vague集的综合策规则、区间值模糊控制器等三种应用方法和选编了应用于各专业领域中的实例.

本书力求语言通俗,论证严谨,深入浅出,方法介绍详尽,特别是选编了应用于各专业领域中的实例,本书中也包含了编著者的部分研究成果.

张福金撰写全书,王鸿绪统筹策划、修改全书并最后定稿,在编著本书的过程中,得到琼州学院领导和电子信息工程学院、理工学院、科研处领导的关怀和支持;也得到许多同行老师的热情帮助,在此表示衷心的感谢,向本书中引用的所有著作的作者们、向本书中引用的所有论文的作者们表示衷心的感谢,因为没有他们的出色的论著就没有本书的诞生,限于编著者的水平,加之时间仓促,对错误和不当之处,恭请斧正并不吝赐教.

编著者

2009.2.1

目　录

第 1 章　Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法

在研究实际应用问题时，有时需要把 Vague 值化成 Fuzzy 值，例如文献[1,2,3,4,5,6]就用到把 Vague 值化成 Fuzzy 值的问题或者 Vague 值化成 Fuzzy 值的思想. 本章就来研究这种 Vague 值化成 Fuzzy 值的方法或公式.

§1.1　Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法的定义

一、例题分析

如何评价 Vague 值向 Fuzzy 值（即 Fuzzy 隶属度）的转化方法是否合理，应该有客观标准. 我们来研究一些例子.

设 X 是论域，A 是 X 上的 Vague 集，$\forall x \in X, A(x) = [t_A(x), 1 - f_A(x)]$ 或简记为 $x = [t_x, 1 - f_x]$，且满足约束条件 $t_x + f_x \leqslant 1$. Vague 集 A 对应的 Fuzzy 集为 A^F，Vague 值 $A(x) = [t_A(x), 1 - f_A(x)]$（或 $x = [t_x, 1 - f_x]$）对应的 Fuzzy 值为 $\mu_{A^F}(x)$.

例 1.1.1　对 Vague 值 $x = [t_x, 1 - f_x]$，某文献提出的转化公式为

$$\mu_{A^F}(x) = \begin{cases} t_x + (1 - t_x - f_x) \times \dfrac{1 - f_x}{t_x + f_x}, & t_x = 0, \\ t_x + (1 - t_x - f_x) \times \dfrac{t_x}{t_x + f_x}, & 0 \leqslant t_x \leqslant 0.5, \\ t_x + (1 - t_x - f_x) \times \left(0.5 + \dfrac{t_x - 0.5}{t_x + f_x}\right), & 0.5 \leqslant t_x \leqslant 1. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

则当 Vague 值 $x = [0, 0.8]$ 时，有 $t_x = 0, f_x = 0.2$. 代入表达式(1.1.1)，得

$$\mu_{A^F}(x) = 0 + (1 - 0 - 0.2) \times \frac{0.8}{0 + 0.2} = 3.2.$$

因为对 Fuzzy 隶属度而言，最起码应该保证 $\mu_{A^F}(x) \in [0,1]$. 并应该 $t_x \leqslant \mu_{A^F}(x) \leqslant 1 - f_x$. 但在这里，非但没有 $\mu_{A^F}(x) \in [0,1]$，而且还竟然得到 $\mu_{A^F}(x) = 3.2 > 1$. 所以表达式(1.1.1)不能作为从 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法. 这就有必要首先建立起 Vague 值向 Fuzzy 值的转化定义. 它是对 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法的必要的约束，否则就有

可能出现如例 1.1.1 这种错误.

例 1.1.2 对 Vague 值 $x = [t_x, 1 - f_x]$，某文献提出的转化公式为

$$\mu_{A^F}(x) = t_x + p(1 - t_x - qf_x), (p, q \in [0,1]); \tag{1.1.2}$$

设 Vague 值 $x = [0.3, 0.7]$，取 $p = 1, q = 0$，则由公式(1.1.2)，得

$$\mu_{A^F}(x) = 0.3 + (1 - 0.3 - 0) = 1 \notin [0.3, 0.7]. \tag{1.1.3}$$

再设 Vague 值 $x = [0.4, 0.4]$，取 $p = 1, q = 0$，则由公式(1.1.2)，得

$$\mu_{A^F}(x) = 0.4 + (1 - 0.4 - 0) = 1 \neq 0.4. \tag{1.1.4}$$

从直观上看，(1.1.3)式表示：虽然 Vague 值 $x = [0.3, 0.7]$ 的赞成度和反对度都不大，但是由它转化成的 Fuzzy 值却达到最大值 1. 而由(1.1.4)式可见，公式(1.1.2)把 Vague 值(其实它是 Fuzzy 值) $x = [0.4, 0.4]$ 转化成的 Fuzzy 值也是 1. 所以，就是从直观上看公式(1.1.2)，它给出的结果和人们的直觉是不同的. 因此把它作为 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法也是不适合的.

例 1.1.3 对 Vague 值 $x = [t_x, 1 - f_x]$，某文献提出的转化公式为

$$\mu_{A^F}(x) = 1 - f_x - q(1 - pt_x - f_x), (p, q \in [0,1]). \tag{1.1.5}$$

设 Vague 值 $x = [0.3, 0.7]$，取 $p = 0, q = 1$，则由公式(3.3.5)，得

$$\mu_{A^F}(x) = 0.7 - (1 - 0 - 0.3) = 0 \notin [0.3, 0.7]. \tag{1.1.6}$$

再设 Vague 值 $x = [0.4, 0.4]$，取 $p = 0, q = 1$，则由公式(3.3.5)，得

$$\mu_{A^F}(x) = 0.4 - (1 - 0 - 0.6) = 0 \neq 0.4. \tag{1.1.7}$$

从直观上看，(1.1.6)式表示：虽然 Vague 值 $x = [0.3, 0.7]$ 的赞成度和反对度都不小，但是由它转化成的 Fuzzy 值却等于最小值 0. 可见，就是从直观上看公式(1.1.5)也不适合当作 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法. 而由(1.1.7)式可见，公式(1.1.5)把 Vague 值(它也是 Fuzzy 值) $x = [0.4, 0.4]$ 转化成的 Fuzzy 值也是 0. 所以，就是从直观上看公式(1.1.5)，它给出的结果和人们的直觉是不同的. 因此把它作为 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法也是不适合的.

由例 1.1.1、例 1.1.2 和例 1.1.3 可见，公式(1.1.1)、公式(1.1.2)和公式(1.1.5)都出现了和人们的认识相悖的结论.

因此，尽管已经提出许多 Vague 值向 Fuzzy 值的转化公式，仍然有必要建立起 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法的公理化定义. 它是对 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法的必要的约束和规范，否则就可能会出现如例 1.1.1、例 1.1.2 和例 1.1.3 那样的与人们的直观认识不相符合的情况发生.

二、Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法的定义

把文献[7]提出的 Vague 值向 Fuzzy 隶属度的转化准则作为公理，便得到下面给出的 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法的公理化定义.

定义 1.1.1　设 X 是论域，$A \in V(X)$，$\forall x \in X$，如果 Vague 值 $x = [t_x, 1 - f_x]$ 转化为 Fuzzy 值 $\mu_{AF}(x)$ 的方法(或公式)满足如下准则：

(1) 区间准则　$t_x \leqslant \mu_{AF}(x) \leqslant 1 - f_x$；

(2) 模糊准则　当 $t_x = 1 - f_x$ 时，应有 $\mu_{AF}(x) = t_x = 1 - f_x$.

则称这个转化方法(或公式) $\mu_{AF}(x)$ 为 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法(或公式)，称这两个准则为 Vague 值向 Fuzzy 值的转化准则.

注：①这里的公理化定义使得 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法的概念更为明确.

②区间准则是说 $\mu_{AF}(x)$ 应介于 t_x 和 $1 - f_x$ 之间，用投票模型来解释，Vague 值 $A(x)$ 转化成的 Fuzzy 值 $\mu_{AF}(x)$ 的保守决策的取值应为 t_x，即取赞成票的值；而冒险决策的取值应为 $1 - f_x$，即取非反对票(赞成票加弃权票)的值，所以 $\mu_{AF}(x)$ 应该介于这两个数之间，这个规定是符合人们的直观认识的.

③模糊准则是说，当 Vague 值 $A(x)$ 退化成 Fuzzy 值 $x = [a, a]$，$a \in [0,1]$ 时，当然应有 $\mu_{AF}(x) = a = t_x = 1 - f_x$. 特别当 Vague 值 $A(x)$ 退化成普通集合 $x = [0,0]$ 或 $x = [1,1]$ 时，应有 $\mu_{AF}(x) = 0$ 或 $\mu_{AF}(x) = 1$. 这个规定也是符合人们的直观认识的.

§1.2　Vague 值转化为 Fuzzy 值的方法

一、Vague 值转化为 Fuzzy 值的方法(一)

定理 1.2.1[5]　设 X 是论域，$A \in V(X)$，$\forall x \in X$，Vague 值 $x = [t_x, 1 - f_x]$. 则公式

$$\mu_{AF}(x) = \frac{t_x + 1 - f_x}{2} \tag{1.2.1}$$

是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法，称之为均值法.

证明(1)因为 $t_x \leqslant 1 - f_x$，那么由公式(1.2.1)，得

$$\mu_{AF}(x) = \frac{t_x + 1 - f_x}{2} = \frac{1}{2}t_x + \frac{1}{2}(1 - f_x).$$

于是

$$t_x \leqslant \mu_{AF}(x) \leqslant \frac{1}{2}(1 - f_x) + \frac{1}{2}(1 - f_x) = 1 - f_x.$$

即知公式(1.2.1)满足区间准则.

(2)当 Vague 值$x=[a,a],a\in[0,1]$时,有$t_x=1-f_x=a$. 于是由公式(1.2.1)得

$$\mu_{A^F}(x)=\frac{1}{2}(a+a)=a=t_x=1-f_x.$$

即知公式(1.2.1)满足模糊准则.

所以公式(1.2.1)是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法.

定理 1.2.2[8] 设X是论域,$A\in V(X),\forall x\in X$, Vague 值$x=[t_x,1-f_x]$. 则公式

$$\mu_{A^F}(x)=t_x+p(1-t_x-f_x),(0\leqslant p\leqslant 1)\qquad(1.2.2)$$

是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法,称之为偏值法.

证明(1)因为$t_x\leqslant 1-f_x,1-t_x-f_x\geqslant 0$. 那么由公式(1.2.2)得

$$t_x\leqslant\mu_{A^F}(x)=t_x+p(1-t_x-f_x)\leqslant t_x+(1-t_x-f_x)=1-f_x.$$

即知公式(1.2.2)满足区间准则.

(2)当 Vague 值$x=[a,a],a\in[0,1]$时,有$t_x=1-f_x=a$. 于是由公式(1.2.2),

$$\mu_{A^F}(x)=t_x+p(1-t_x-f_x)=a+p(a-a)=a=t_x=1-f_x.$$

即知公式(1.2.2)满足模糊准则.

所以公式(1.2.2)是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法.

注:当取参数$p=\frac{1}{2}$时,偏值法是均值法,所以均值法是偏值法的特例.

定理 1.2.3[8] 设X是论域,$A\in V(X),\forall x\in X$, Vague 值$x=[t_x,1-f_x]$. 则公式

$$\mu_{A^F}(x)=1-f_x-p(1-t_x-f_x),(0\leqslant p\leqslant 1),$$

是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法,称之为第二偏值法或参数转化方法 1.

定理 1.2.4[9] 设X是论域,$A\in V(X),\forall x\in X$, Vague 值$x=[t_x,1-f_x]$. 则下列公式是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法,称之为加权均值修正法:

$$\mu_{A^F}(x)=t_x+p\pi_x+q(t_x-f_x)\pi_x,\qquad(1.2.3)$$

其中权重p和q分别满足条件:

①$0\leqslant p\leqslant 0.5$;②$0\leqslant q\leqslant 0.5$;③$p\pi_x+q(t_x-f_x)\pi_x\geqslant 0$.

证明(1) 因为$0\leqslant t_x\leqslant 1,0\leqslant f_x\leqslant 1,0\leqslant p\leqslant 0.5,0\leqslant q\leqslant 0.5,p\pi_x+q(t_x-f_x)\pi_x\geqslant 0$. 则由公式(1.2.3),有

$$t_x\leqslant\mu_{A^F}(x)=t_x+p\pi_x+q(t_x-f_x)\pi_x\leqslant t_x+0.5\pi_x+0.5(1-0)\pi_x=t_x+\pi_x=1-f_x.$$

即知公式(1.2.3)满足区间准则.

(2)当 Vague 值$x=[a,a],a\in[0,1]$时,$t_x=a,1-f_x=a.\ \pi_x=0$,则由公式(1.2.3),有

$$\mu_{A^F}(x)=t_x+p\pi_x+q(t_x-f_x)\pi_x=a=t_x=1-f_x.$$

即知公式(1.2.3)满足模糊准则.

所以公式(1.2.3)是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法.

定理 1.2.5　设 X 是论域,$A \in V(X)$, $\forall x \in X$, Vague 值 $x = [t_x, 1-f_x]$. 则下列公式是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法,称之为加权均值第二修正法:

$$\mu_{AF}(x) = 1 - f_x - p\pi_x - q(t_x - f_x)\pi_x,$$

其中权重 p 和 q 分别满足条件:

① $0 \leqslant p \leqslant 0.5$;② $0 \leqslant q \leqslant 0.5$;③ $p\pi_x + q(t_x - f_x)\pi_x \geqslant 0$.

例 1.2.1　设有 Vague 值 $x_1 = [0.5, 0.7]$, $x_2 = [0.6, 0.8]$. 则把它们按不同转化方法转化为 Fuzzy 值 $\mu_{AF}(x)$,结果见表 1.2.1.

表 1.2.1　按不同方法把 Vague 值转化为 Fuzzy 值

x	[0.5,0.7]	[0.6,0.8]
均值法	0.6	0.7
偏值法(取 $p = 0.6$)	0.62	0.72
加权均值修正法(取 $p = 0.3, q = 0.2$)	0.568	0.676

定理 1.2.6[9]　设 X 是论域,$A \in V(X)$, $\forall x \in X$, Vague 值 $x = [t_x, 1-f_x]$. 则公式:

$$\mu_{AF}(x) = t_x + \frac{\pi_x(1 + t_x - f_x)}{2} \tag{1.2.4}$$

是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法,称之为均值修正法.

证明(1)因为 $0 \leqslant t_x \leqslant 1, 0 \leqslant f_x \leqslant 1$ 则 $0 \leqslant 1 + t_x - f_x \leqslant 1 + 1 - 0 = 2$. 又因为 $\pi_x \geqslant 0$,故由公式(1.2.4),得

$$t_x \leqslant t_x + \frac{\pi_x(1 + t_x - f_x)}{2} \leqslant t_x + \pi_x = 1 - f_x.$$

因此公式(1.2.4)满足区间准则.

(2)当 Vague 值 $x = [a, a]$, $a \in [0,1]$ 时,则 $\pi_x = 0, t_x = 1 - f_x = a$. 则由公式(1.2.4),有

$$\mu_{AF}(x) = t_x + \frac{\pi_x(1 + t_x - f_x)}{2} = a = t_x = 1 - f_x.$$

因此公式(1.2.4)满足模糊准则.

所以公式(1.2.4)是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法.

定理 1.2.7　设 X 是论域,$A \in V(X)$, $\forall x \in X$, Vague 值 $x = [t_x, 1-f_x]$. 则①公式:

$$\mu_{AF}(x) = 1 - f_x - \frac{\pi_x(1 + t_x - f_x)}{2}$$

是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法,称之为第二均值修正法.

定理 1.2.8[6,10] 设 X 是论域,$A \in V(X)$, $\forall x \in X$, Vague 值 $x = [t_x, 1-f_x]$. 则

(1) 公式:

$$\mu_{A^F}(x) = t_x + p(1 - t_x - qf_x), (p,q) \in [0,1]; p(1 - t_x - qf_x) \leqslant 1 - t_x - f_x), \quad (1.2.5)$$

是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法,称它为参数转化方法 2.

(2) 公式:

$$\mu_{A^F}(x) = 1 - f_x - q(1 - pt_x - f_x), (p,q) \in [0,1]; q(1 - pt_x - f_x) \leqslant 1 - t_x - f_x), \quad (1.2.6)$$

是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法,称它为参数转化方法 3.

首先有

命题 1.2.1 设 X 是论域,$A \in V(X)$, $\forall x \in X$, 当 Vague 值 $x = [a,a]$, $a \in [0,1]$. 则

(1) 公式(1.2.5)的参数应满足:当 $q = 1$ 时,$p \in [0,1]$;或者当 $p = 0$ 时,$q \in [0,1]$;

(2) 公式(1.2.6)的参数应满足:当 $p = 1$ 时,$q \in [0,1]$;或者当 $q = 0$ 时,$p \in [0,1]$.

定理 1.2.8 的证明 仅证明公式(1.2.5)是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法.

①对于 Vague 值 $x = [t_x, 1-f_x]$,由公式(1.2.5)有

$$\mu_{A^F}(x) = t_x + p(1 - t_x - qf_x) \geqslant t_x,$$

$$\mu_{A^F}(x) = t_x + p(1 - t_x - qf_x) \leqslant t_x + (1 - t_x - f_x) = 1 - f_x.$$

所以,公式(1.2.5)满足区间准则.

②当 Vague 值 $x = [a,a]$, $a \in [0,1]$ 时,则 $\pi_x = 0$, $t_x = 1 - f_x = a$. 则命题 1.2.1.(1) 得

$$\mu_{A^F}(x) = t_x + p(1 - t_x - qf_x) = t_x + 0 = t_x = 1 - f_x = a.$$

故,公式(1.2.5)满足模糊准则.

所以公式(1.2.5)是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法.

定理 1.2.9[10] 设 X 是论域,$A \in V(X)$, $\forall x \in X$, Vague 值 $x = [t_x, 1-f_x]$. 则

(1) 公式:

$$\mu_{A^F}(x) = t_x + p(1 - qt_x - rf_x), \quad (1.2.7)$$

(其中参数 p,q,r 满足下列条件:①$p,q,r \in [0,1]$;②$p(1 - qt_x - rf_x) \leqslant 1 - t_x - f_x$.)

是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法,称它为三参数法 1.

(2) 公式:

$$\mu_{A^F}(x) = 1 - f_x - u(1 - vt_x - wf_x), \quad (1.2.8)$$

(其中参数 u,v,w 满足下列条件:①$u,v,w \in [0,1]$;②$u(1-vt_x-wf_x) \leqslant 1-t_x-f_x$.)是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法,称它为三参数法 2.

命题 1.2.2　设 X 是论域,$A \in V(X)$,$\forall x \in X$,当 Vague 值 $x=[a,a]$,$a \in [0,1]$.则

(1) 公式(1.2.7)的参数应满足:当 $q=1,r=1$ 时,$p \in [0,1]$;或者当 $p=0$ 时,$q \in [0,1]$,$r \in [0,1]$;

(2) 公式(1.2.8)的参数应满足:当 $v=1,w=1$ 时,$u=[0,1]$;或者当 $u=0$ 时,$v \in [0,1]$,$w \in [0,1]$.

例 1.2.2　设有 Vague 值 $x_1=[0.6,0.8]$,$x_2=[0.8,0.9]$.则把它们按不同转化方法转化为 Fuzzy 值,结果如表 1.2.2 所示.

表 1.2.2　按不同方法把 Vague 值转化为 Fuzzy 值

x	$[0.6,0.8]$	$[0.8,0.9]$
均值修正法	0.62	0.805
参数转化方法 1(定理 1.2.3,$p=0.6$)	0.68	0.84
三参数法 1($p=0.1,q=0.3,r=0.2$)	0.678	0.874
三参数法 2($u=0.1,v=0.3,w=0.2$)	0.722	0.826

二、Vague 值转化为 Fuzzy 值的方法(二)

在下述公式中用到了 Vague 值 $x=[t_x,1-f_x]$ 的 (t_x,f_x) 扩展或 Vague 值 $x=[t_x,1-f_x]$ 的 (α,β) 扩展.对 $m=1,2,\cdots$,$x^{(m)}=[t_x{}^{(m)},1-f_x{}^{(m)}]$ 为 Vague 值 x 的 (t_x,f_x) 扩展的 m 次 Vague 值;$x^{<m>}=[t_x{}^{<m>},1-f_x{}^{<m>}]$ 为 Vague 值 x 的 (α,β) 扩展的 m 次 Vague 值.

定理 1.2.10[11]　设 X 是论域,$A \in V(X)$,$\forall x \in X$,Vague 值 $x=[t_x,1-f_x]$.则公式

$$\mu_{A^F}(x)=\frac{t_x{}^{(m)}+1-f_x{}^{(m)}}{2},(m=0,1,2,\cdots),\qquad(1.2.9)$$

是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法,称它为 Vague 值 $x=[t_x,1-f_x]$ 转化为 Fuzzy 值 $\mu_{A^F}(x)$ 的第 (m) 次均值法.

证明(1)因为 $x^{(m)}=[t_x{}^{(m)},1-f_x{}^{(m)}]$ 是 Vague 值,则 $t_x{}^{(m)} \leqslant 1-f_x{}^{(m)}$,故由第 (m) 次均值法公式(1.2.9),得

$$\mu_{A^F}(x)=\frac{t_x{}^{(m)}+1-f_x{}^{(m)}}{2}=\frac{t_x{}^{(m)}}{2}+\frac{1-f_x{}^{(m)}}{2},$$

于是

$$t_x \leqslant t_x^{(m)} \leqslant \mu_{A^F}(x) \leqslant 1 - f_x^{(m)} \leqslant 1 - f_x.$$

即知公式(1.2.9)满足区间准则.

(2)当 Vague 值 $x = [a,a], a \in [0,1]$ 时,$x^{(m)} \in [a,a]$,则 $t_x^{(m)} = 1 - f_x^{(m)} = a$,于是由公式(1.2.9),得

$$\mu_{A^F}(x) = \frac{a + a}{2} = a = t_x = 1 - f_x.$$

即知公式(1.2.9)满足模糊准则.

所以公式(1.2.9)是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法.

定理 1.2.11[11] 设 X 是论域,$A \in V(X)$, $\forall x \in X$, Vague 值 $x = [t_x, 1 - f_x]$. 则公式

$$\mu_{A^F}(x) = t_x^{(m)} + p[1 - t_x^{(m)} - f_x^{(m)}], (p \in [0,1]; m = 0,1,2,\cdots) \qquad (1.2.10)$$

是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法,称它为 Vague 值 $x = [t_x, 1 - f_x]$ 向 Fuzzy 值的转化方法的第 (m) 次偏值法.

定理 1.2.12[11] 设 X 是论域,$A \in V(X)$, $\forall x \in X$, Vague 值 $x = [t_x, 1 - f_x]$. 则公式

$$\mu_{A^F}(x) = \frac{t_x^{<m>} + 1 - f_x^{<m>}}{2}, (m = 0,1,2,\cdots), \qquad (1.2.11)$$

是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法,称它为 Vague 值 $x = [t_x, 1 - f_x]$ 向 Fuzzy 值的转化方法的第 (m) 次均值法.

定理 1.2.13[11] 设 X 是论域,$A \in V(X)$, $\forall x \in X$, Vague 值 $x = [t_x, 1 - f_x]$. 则公式:

$$\mu_{A^F}(x) = t_x^{(m)} + p[1 - t_x^{(m)} - f_x^{(m)}], (p \in [0,1]; m = 0,1,2,\cdots), \qquad (1.2.12)$$

是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法,称它为 Vague 值 $x = [t_x, 1 - f_x]$ 向 Fuzzy 值的转化方法的第 (m) 次偏值法.

例 1.2.3 设有 Vague 值 $x_1 = [0.5, 0.7]$, $x_2 = [0.6, 0.8]$. 则把它们按不同转化方法转化为 Fuzzy 值 $\mu_{A^F}(x)$,结果见表 1.2.3.

表 1.2.3 按不同方法把 Vague 值转化为 Fuzzy 值

x	$[0.5, 0.7]$	$[0.6, 0.8]$
第 (m) 次均值法 $(m = 2)$	0.624	0.698
第 (m) 次均值法 $(\alpha = 0.4, \beta = 0.2, m = 2)$	0.628	0.728
第 (m) 次偏值法 $(p = 0.6, m = 2)$	0.625	0.749
第 (m) 次偏值法 $(\alpha = 0.4, \beta = 0.2, m = 2, p = 0.6)$	0.631	0.731

定理1.2.14[12]　设X是论域,$A\in V(X)$,$\forall x\in X$, Vague值$x=[t_x,1-f_x]$.当Vague值$x\neq[0,1]$时,则

(1) 公式
$$\mu_{A^F}(x)=\begin{cases}\dfrac{t_x}{t_x+f_x}, & x\neq[0,1]\\ \text{任意}, & x=[0,1]\end{cases}\tag{1.2.13}$$
是Vague值向Fuzzy值的转化方法,称它为Vague值$x=[t_x,1-f_x]$转化为Fuzzy值$\mu_{A^F}(x)$的x的(t_x,f_x)扩展的极限法;

(2) 公式
$$\mu_{A^F}(x)=t_x+\frac{\alpha\pi_x}{\alpha+\beta},\text{当}\ \alpha+\beta\neq 0\ \text{时},\tag{1.2.14}$$
是Vague值向Fuzzy值的转化方法,称它为Vague值$x=[t_x,1-f_x]$转化为Fuzzy值$\mu_{A^F}(x)$的x的(α,β)扩展的极限法.

注:因为Vague值x的(t_x,f_x)扩展的极限情况为Fuzzy值$x^{(\infty)}=\left[\dfrac{t_x}{t_x+f_x},\dfrac{t_x}{t_x+f_x}\right]$;$x$的$(\alpha,\beta)$扩展的极限情况是Fuzzy值$x^{(\infty)}=\left[t_x+\dfrac{\alpha\pi_x}{\alpha+\beta},t_x+\dfrac{\alpha\pi_x}{\alpha+\beta}\right]$.所以可把这种极限情况作为转化方法的公式.而在公式(1.2.14)中,当Vague值为$x=[0,1]$时,表明人们对模糊信息是完全不了解、一无所知的.它转化为Fuzzy隶属度时可能取闭区间[0,1]上的任何值.因为当Vague值$x=[0,1]$时,其(α,β)扩展的极限情况$x^{(\infty)}=\left[\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta},\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right]$,此时的结果与公式(1.2.14)是相同的,所以公式(1.2.14)不必再用分段函数来定义了.

定理1.2.14的证明　(1)当Vague值$x=[t_x,1-f_x]\neq[0,1]$时,有$t_x+f_x\neq 0$,且
$$x^{(\infty)}=1-f_x^{(\infty)}=\frac{t_x}{t_x+f_x}.$$

一方面,由$0<t_x+f_x\leqslant 1$,$t_x\geqslant 0$,则$t_x(t_x+f_x)\leqslant t_x$.于是
$$\frac{t_x}{t_x+f_x}\geqslant\frac{t_x(t_x+f_x)}{t_x+f_x}=t_x.$$

另一方面,因$0<1-t_x-f_x\leqslant 1$,$0\leqslant t_x\leqslant 1$,$0\leqslant f_x\leqslant 1$.则
$$t_x\leqslant t_x+f_x(1-t_x-f_x)=(t_x+f_x)(1-f_x).$$
于是
$$\frac{t_x}{t_x+f_x}\leqslant\frac{(t_x+f_x)(1-f_x)}{t_x+f_x}=1-f_x.$$
所以公式(1.2.13)满足区间准则.

当 Vague 值 $x = [a,a], a \in [0,1]$ 时, $t_x = a, f_x = 1 - a$. 则

$$\frac{t_x}{t_x + f_x} = \frac{a}{a + 1 - a} = a = t_x = 1 - f_x$$

所以公式(1.2.13)满足模糊准则.

故公式(1.2.13)是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法.

(2) 当 $\alpha + \beta \neq 0$ 时,有 $t^{(\infty)} = 1 - f_x^{(\infty)} = t_x + \frac{\alpha\pi_x}{\alpha + \beta}$. 并注意附加条件: $0 \leqslant t_x \leqslant 1 - f_x$. 则

$$t_x \leqslant t_x + \frac{\alpha\pi_x}{\alpha + \beta} = \frac{\beta t_x + \alpha(1 - f_x)}{\alpha + \beta} \leqslant \frac{\beta(1 - f_x) + \alpha(1 - f_x)}{\alpha + \beta} = 1 - f_x.$$

所以公式(1.2.14)满足区间准则.

当 Vague 值 $x = [a,a], a \in [0,1]$ 时, $t_x = a, f_x = 1 - a, \pi_x = 0$. 于是

$$t_x + \frac{\alpha\pi_x}{\alpha + \beta} = a = t_x = 1 - f_x.$$

所以公式(1.2.14)满足模糊准则.

故公式(1.2.14)是 Vague 值向 Fuzzy 值的转化方法.

例 1.2.4 设有 Vague 值 $x_1 = [0.6, 0.8], x_2 = [0.8, 0.9]$. 则把它们按不同方法转化为 Fuzzy 值 $\mu_{A^F}(x)$, 结果如表 1.2.4 所示.

表 1.2.4 按不同方法把 Vague 值转化为 Fuzzy 值

x	$[0.6, 0.8]$	$[0.8, 0.9]$
x 的 (t_x, f_x) 扩展的极限法	0.75	0.89
x 的 (α,β) 扩展的极限法 $(\alpha = 0.4, \beta = 0.2)$	0.73	0.87

例 1.2.5 设有 Vague 值 $x = [0.5, 0.8]$. 则把它按不同方法转化为 Fuzzy 值 $\mu_{A^F}(x)$, 结果如表 1.2.5 所示.

表 1.2.5 按不同方法把 Vague 值转化为 Fuzzy 值

x	$[0.5, 0.8]$
x 的 (t_x, f_x) 扩展的极限法	0.8
x 的 (α,β) 扩展的极限法 $(\alpha = 0.4, \beta = 0.2)$	0.63
比例法	0.8
第 (m) 次比例法 $(m = 3)$	0.7143
第 $< m >$ 次比例法 $(m = 3, \alpha = 0.3, \beta = 0.4)$	0.63