Mathematical Statistics

數理統計

王鼎 編著

鼎茂圖書出版股份有限公司
http://www.tingmao.com.tw

Mathematical Statistics

數理統計

王鼎 編著

鼎茂圖書出版股份有限公司
http://www.tingmao.com.tw

TINGMAO

數理統計

作　　者　王　鼎
社　　長　陳銘桐
副 社 長　陳煥昌
專案經理　吳檸爍
企劃編輯　彭湘芸
印　　務　賴銘銓

國家圖書館出版品預行編目資料

數理統計=Mathematical Statistics／王鼎編著.— 初版—臺北市：鼎茂圖書，民97
面；公分
ISBN 978-986-122-939-3（平裝）
986-122-939-6（平裝）
1. 數理統計

319.1　　97006466

Tingmao Team

打字排版：恆新打字排版工作室
校　　稿：林佩慧　林天馨　陳弘治　張智威
發 行 人：邱昌其
發 行 所：鼎茂圖書出版股份有限公司
地　　址：台北市開封街一段32號11樓
電　　話：(02)23814314
傳　　真：(02)23825963
郵政劃撥：18242879鼎茂圖書出版股份有限公司
登 記 證：局版台業字第5881號
法律顧問：第一國際法律事務所　余淑杏　律師
地　　址：台北市中山區民生東路一段43號3樓
電　　話：(02)25215900
ISBN：978－986－122－939－3《平裝》
986－122－939－6《平裝》
本書編號：AB2006
出版日期：中華民國九十七年四月一版
定　　價：**新台幣伍佰玖拾元整**

本書導讀

本書共計七章。

適合研習本書的對象包含統計、數學、應數、經濟、財金等科、系、所學生。第一章學習重點為點估計方法。第二章重點為估計式衡量準與估計式具備之性質。第三章則介紹估計中之區間估計方法與常態母體及二項母體區間估計結果。統計的假設檢定方法則詳述於第四章，同時亦建構常見的常態與二項母體檢定問題之結果。前四章可謂為數理統計之精髓，一般數理統計（或稱統計學）考試重點集中於此。數學、應數系所之學生在學習上可以好好著重於前四章。本書後半段為將統計理論應用至不同問題之應用統計方法介紹。第五章、第六章分別介紹線性模型中之變異數分析與迴歸分析。第七章則探討小樣本或母體分配未知的無母數統計方法。後三章之應用統計則建議統計系所之學生能多下功夫熟讀。經濟與財金系所學生則可多留意迴歸分析章節，以增強計量經濟能力。

研讀本書所具之基礎為微積分與機率論。讀者只要依照筆者安排之章節，由易而難（定義、定理、考例），由淺而深（小節、全章、全書），並多深思勤學，定能征服數理統計。也希望讀者能以喜樂的心研讀本書，相信妳（你）也會漸漸的喜歡這門看似艱深但卻蘊含許多哲學的科學。

作者簡介

王　鼎　博士

學　歷

清華大學　統計博士

經　歷

大碩文化事業　統計學講師

大碩文化事業　機率論講師

大碩文化事業　數理統計講師

北部私立大學　財金系助理教授

中部私立大學　財金系助理教授

序言

統計學界的畢卡索—杜棋(John Jukey, 1915-2000)曾説：「對正確的問題有個近似的答案，勝過對錯的問題有精確的解答」。

統計之基本觀念認為科學的真正主體是資料分配，這些分配可用參數描述之。1925 年費雪(R.A. Fisher, 1890-1962)提出概似函數觀念，成為參數估計之主要方法。1928 年尼曼(Jerzy Neyman,1894-1981)與艾根．皮爾生(Egon Pearson, 1895-1980)發表假設檢定的第一篇論文。兩者奠定了統計估計與檢定理論基礎。此等大膽假設，小心求證的科學精神，加上許多統計研究者的努力，使得統計革命由數理統計應用到生物醫學、產業管理、財務計量、量子物理等不同學科上。

數理統計的確須繁雜的數學推論為基礎，以提供精確的解答。然而、深思統計的內涵，也許將會有個實用的近似答案。

本書之完成，首先感謝大碩文化事業邱董事長與鼎茂圖書出版股份有限公司陳社長之提攜與鼓勵。其次感謝台北大碩、碩士經理與 stella 等行政人員的資訊提供協助。最後將此書獻給 Jubilee 與摯女昱淇。也願將此書獻給喜愛統計的讀者。

王鼎　台中

目錄

第 1 章

點估計

點估計(point estimation)的原則是透過由母體 $\dot{f}(x\mid\theta)$ 內所抽樣之樣本來對母體參數進行了解。因此適當的推估方法與有意義的推估結果將有助於具體描述 θ 或 $\tau(\theta)$。常見之估計法有：**動差法**、**最大概似法**、**貝氏法**、**最小平方法**等。

1.1 動差估計法

定義 1.1：統計式(statistics)、估計式(estimator)

設 $X_1,\ldots,X_n$ 為一隨機樣本，可測函數 T

$T: R^n \to R^m$，$n \geq m$

則稱 $T(\underset{\sim}{X}) = T(X_1\ldots,X_n)$ 為一**統計式**或**估計式**。

而 $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}$ 時，$T(\underset{\sim}{x})$ 稱為**統計量**或**估計量**。

定義 1.2：樣本動差(sample moments)

設 $X_1,\ldots,X_n$ 為一隨機樣本、樣本平均數為 $\overline{X}$，則

(1) $m_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 稱為 k **階樣本（原點）動差**。

(2) $m_k' = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^k$ 稱為 k **階樣本中心動差**。

定義 1.3：動差估計式(MME, method of moments estimators)

設 $X_i \overset{iid}{\sim} f(x\mid\theta_1,\ldots,\theta_k)$，$i = 1 \sim n$

$$令\begin{cases}\mu_1 = E(X) = \mu_1(\underset{\sim}{\theta}) = m_1 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ \mu_2 = E(X^2) = \mu_2(\underset{\sim}{\theta}) = m_2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \\ \vdots \\ \mu_k = E(X^k) = \mu_k(\underset{\sim}{\theta}) = m_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\end{cases}$$

$$解得\begin{cases}\hat{\theta}_1 = g_1(m_1,\ldots,m_k) \\ \hat{\theta}_2 = g_2(m_1,\ldots,m_k) \\ \vdots \\ \hat{\theta}_k = g_k(m_1,\ldots,m_k)\end{cases}$$

則稱 $\underset{\sim}{\hat{\theta}} = (\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_k)$ 為 $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1,\ldots,\theta_k)$ 之聯合動差估計式

說明

(1) 動差法為 Keal Pearson 所提出的。

(2) 動差法即是以"**樣本動差＝母體動差**"之觀念來對未知參數進行估計，可謂為大數法則之應用。

(3) 當母體動差不存在時，動差法則不適用。

(4) 有時 MME 結果在解釋上並不一定合理。

例題 1.1

試求下列分配參數之 MME

(1) $X_i \overset{iid}{\sim} Poi(\lambda)$

(2) $X_i \overset{iid}{\sim} U(0,\theta)$

(3) $X_i \overset{iid}{\sim} N(\mu,\sigma^2)$

(4) $X_i \overset{iid}{\sim} Gamma(\alpha,\lambda)$ 【政大應數】

解 (1) 令 $E(X) = \lambda = \overline{X}$

則 $\hat{\lambda}=\overline{X}$ 為 MME

(2) 令 $E(X)=\dfrac{\theta}{2}=\overline{X}$

則 $\hat{\theta}=2\overline{X}$ 為 MME

(3) 令 $\begin{cases} E(X)=\mu=\overline{X} \\ E(X^2)=\sigma^2+\mu^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$

得 $\begin{cases} \hat{\mu}=\overline{X} \\ \hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\dfrac{n-1}{n}S^2 \end{cases}$ 為聯合 MME

註：(μ,σ) 之聯合 MME 為 $\left(\overline{X},\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}S\right)$

(4) 令 $\begin{cases} E(X)=\dfrac{\alpha}{\lambda}=\overline{X} \\ E(X^2)=\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$

得 $\begin{cases} \hat{\alpha}=\dfrac{\overline{X}^2}{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}=\dfrac{\overline{X}^2}{\dfrac{n-1}{n}S^2} \\ \hat{\lambda}=\dfrac{\overline{X}}{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}=\dfrac{\overline{X}}{\dfrac{n-1}{n}S^2} \end{cases}$ 為聯合 MME

例題 1.2

(1) $X_i \overset{iid}{\sim} U(\theta,2\theta)$，求 θ 之 MME。

(2) $X_i \overset{iid}{\sim} U(a,b)$，試 (a,b) 之 MME。 【政大統計】

解 (1) 令 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i=E(X)=\dfrac{3\theta}{2}$

得 $\hat{\theta} = \frac{2}{3}\overline{X}$ 爲 θ 之 MME

(2) 令 $\begin{cases} \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E(X) = \frac{a+b}{2} \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = E(X^2) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} \end{cases}$

得 $\begin{cases} \hat{a} = \overline{X} - \sqrt{\frac{3(n-1)S^2}{n}} \\ \hat{b} = \overline{X} + \sqrt{\frac{3(n-1)S^2}{n}} \end{cases}$ 爲 (a, b) 之聯合 MME

例題 1.3

(1) $X_i \overset{iid}{\sim} Exp(1, \eta)$，即 $f(x \mid \eta) = e^{-(x-\eta)}$, $\eta < x$，求 η 之 MME。

(2) $X_i \overset{iid}{\sim} Exp(\theta, \eta)$，即 $f(x \mid \theta, \eta) = \theta e^{-\theta(x-\eta)}$, $0 < \theta$, $\eta < x$，求 (θ, η) 之 MME。

【交大統計、中正統計】

解 (1) 令 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E(X) = 1 + \eta$

得 $\hat{\eta} = \overline{X} - 1$ 爲 η 之 MME

(2) 令 $\begin{cases} \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E(X) = \frac{1}{\theta} + \eta \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = E(X^2) = V(X) + [E(X)]^2 = \frac{1}{\theta^2} + \left(\frac{1}{\theta} + \eta\right)^2 \end{cases}$

得 $\begin{cases} \hat{\theta} = \sqrt{\frac{n}{(n-1)S^2}} \\ \hat{\eta} = \overline{X} - \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{n}} \end{cases}$ 爲 (θ, η) 之聯合 MME

例題 1.4

(1) 設 $X_i \overset{iid}{\sim} f(x \mid \theta) = \theta x^{-2}$, $0 < \theta \le x$，求 θ 之 MME。

(2) 設 $X_i \overset{iid}{\sim} B(k, p)$, $P(X_i = x \mid p) = \binom{k}{x} p^x (1-p)^{k-x}$, $x = 0, 1, \cdots, k$，求 (k, p) 之 MME。【交大統計】

解

(1) 因 $E(|X|) = \int_\theta^\infty \frac{x\theta}{x^2} dx = \theta \ln x \Big|_\theta^\infty = \infty$

故 $E(X)$ 不存在

故動差法不適用，θ 之 MME 不存在

(2) 令 $\begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X} = E(X) = kp \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = E(X^2) = kp(1-p) + k^2 p^2 \end{cases}$

得 $\begin{cases} \hat{p} = 1 - \frac{(n-1)S^2}{\overline{X}n} \\ \hat{k} = \frac{\overline{X}^2}{\overline{X} - \frac{(n-1)S^2}{n}} \end{cases}$

① k 應該為正整數且 $0 < p < 1$

②當 $0 < \hat{p} < 1$ 時，則可考慮 $\hat{\hat{k}} = \left[\frac{\overline{X}^2}{\overline{X} - \frac{(n-1)S^2}{n}} \right]$ 為 MME

③反之，若 $\hat{p} < 0$ 或 $1 < \hat{p}$，則動差法不適宜

例題 1.5

設 $X_i \overset{iid}{\sim} f(x \mid \theta) = \frac{1 + \theta x}{2}$, $-1 < x < 1$, $-1 < \theta < 1$，求 θ 之 MME。【交大統計】

解 令 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=E(X)=\int_{-1}^{1}\frac{x+\theta x^2}{2}dx=\frac{\theta}{3}$

得 $\theta_0=3\overline{X}$

因 $-1<\theta<1$，$-1<x<1$

故 $\hat{\theta}=\begin{cases}-1 & ,3\overline{X}<-1\\ 3\overline{X} & ,-1\le 3\overline{X}\le 1\\ 1 & ,1<3\overline{X}\end{cases}$ 爲 θ 之 MME

例題 1.6

(Satterthwaite 近似法)

設 $X_i\overset{iid}{\sim}\chi^2_{r_i}$，$a_i$ 爲已知常數，$i=1,\cdots,n$，則 $\sum_{i=1}^{n}X_i\sim\chi^2_{\sum_{i=1}^{n}r_i}$。但 $\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$ 之分配不易得知，設存在適當常數 k，使得 $\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\sim\frac{\chi^2_k}{k}$，請求 k 之估計值？

解 (1) MME

①因 $E(\chi^2_k/k)=1$

令 $\sum_{i=1}^{n}a_iX_i=E\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_ir_i=1$

故只得到 a_i 之限制式，並無提供 k 之估計訊息

②因 $E\left(\frac{\chi^2_k}{k}\right)^2=\frac{2}{k}+1$

令 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right)^2=E\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right)^2=\frac{2}{k}+1$

得 $\hat{k}=\dfrac{2}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right)^2-1}$ 爲 k 之 MME

③然 $\hat{k}<0$ 是可能的，故此 MME 估計不合理

(2) Satterthwaite 法

①因 $E\left(\sum_{i=1}^{n} a_x X_i\right)^2 = V\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) + \left[E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)\right]^2$

$$= \left[E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)\right]^2 \left[\frac{V\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)}{\left[E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)\right]^2} + 1\right]$$

$$= \frac{V\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)}{\left[E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)\right]^2} + 1 = \frac{2}{k} + 1$$

故 $k = \dfrac{2\left[E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)\right]^2}{V\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)}$

②且 $V\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i) = 2\sum_{i=1}^{n} \dfrac{a_i [E(X_i)]^2}{r_i}$

③故由①, ②得動差比對解

$\hat{k} = \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{a_i X_i^2}{r_i}}$ 爲 k 之動差估計式，此爲 Satterthwaite 近似法。