高等代数教程

穆大禄　裴惠生　编

山东大学出版社

高等学校试用教材

高等代数教程

穆大禄　裴惠生　编

山东大学出版社

内 容 提 要

本书根据作者多年教学实践，按照全国高等师范院校《高等代数 教学大纲》的要求，为适合基础数学的教学改革而编写的。全书共分八 章，后附有两个附录以及全书习题的参考解答或提示。该书主要介绍线性代 数的基本内容，多项式理论以及群、环、域的基本概念。

本书可作为高等师范院校，高师函授院校数学专业的高等代数 教材，也可作为理科成人大学的线性代数教材或教学参考书。

高等学校试用教材

高 等 代 数 教 程

穆大禄 裴惠生 编

*

山东大学出版社出版发行

信阳师范学院印刷厂印刷

*

850×1168毫米 1/32 13.25印张 343千字

1990年8月第1版 1990年8月第1次印刷

印数：1～3000册

ISBN 7－5607－0373－9/G·54

定价：6.10元

前　言

为适应教学改革的形势，我们根据高等师范院校《高等代数教学大纲》结合编者多年的教学实践，编写了这本《高等代数教程》。主要介绍线性代数和多项式的部分基本理论和简介群环域的基本概念。在编写中我们把属于全书基础部分的行列式、矩阵等内容安排在前两章，将线性方程组的内容安排在多项式理论之前。在多项式一章，我们利用对称多项式的性质给出代数基本定理的一个证明。第五、六、七章介绍线性空间、线性变换和欧氏空间理论，第八章介绍二次型的基本理论。全书力求简明精炼，由浅入深，重视以矩阵为工具处理线性代数中的理论和实际问题。

书后的附录1介绍若当标准形的理论推导，附录2介绍近世代数中群环域的基本概念。这两个附录可由讲授者根据具体情况决定取舍。

每章之后配有适量的习题，这些题目注重基本概念和基本技能技巧的训练，反映了该章的基本要求。除习题外，每章还配有少量的补充习题作为进一步的训练和教材内容的补充。为便于学习，书后附有全书习题的参考解答或提示。但我们建议独立思考完成习题，万不得已时再查看解答或提示。书中给出的解法未必是唯一的，仅供读者参考，希望读者能找到更好的解法，不要受其束缚。

由于水平所限，书中不妥之处在所难免，衷心希望读者和同行们批评指正。

编者

1988年12月

目　录

第一章 行列式

解方程是代数中一个基本的问题，寻求方程解的公式，在实际和理论中都具有很重要的地位。行列式是我们讨论线性方程组的一个基本的工具。近代它又被广泛地运用到物理、工程等各个领域。本章由二、三阶行列式出发，引入一般的n阶行列式的概念。为了简化行列式的计算，讨论了行列式的基本性质并介绍处理高阶行列式的一些初步技巧与方法。

§1 数 域

我们知道，有理数集Q、实数集R、复数集C，还有一些数集，在这些数集中可以进行加、减、乘、除（除数不为零）四则运算。如果数集F中任意两个数作某一运算，其运算结果仍在F中，我们就说F对这个运算是闭合的。所以数集Q，R和C对于四则运算是闭合的。整数集Z只对加、减、乘这三种运算闭合，而任意两个整数的商不一定为一整数，故Z中关于除法运算不闭合。

为了反映能进行四则运算的数集，我们引入数域这个更一般的概念。

定义1 设F是复数集C的一个子集，如果

1° F至少含有两个数；

2° 对于任意两数 $a, b, \in F$，当b作除数时 $b \neq 0$，总有 $a+b$，$a-b$，ab，$\frac{a}{b}$ 全在F中，即F对四则运算是闭合的，则称F为一数域。

只对加、减、乘闭合的非空数集称为数环。

显然，C，R，Q都是数域和数环，但Z不是数域，而Z是数

环（常称整数环）。

例1　令 $F=Q(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a, b\in Q\}$，则F为一数域。

因为 $0=0+0\cdot\sqrt{2}$，$1=1+0\cdot\sqrt{2}$，所以 $0, 1\in F$。即定义1的条件1°成立。

任取两数 $a_1+b_1\sqrt{2}$，$a_2+b_2\sqrt{2}\in F$，则

$$(a_1+b_1\sqrt{2})\pm(a_2+b_2\sqrt{2})$$
$$=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\sqrt{2}\in F;$$
$$(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})$$
$$=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}\in F;$$

设 $a_2+b_2\sqrt{2}\neq 0$，则 $a_2-b_2\sqrt{2}\neq 0$。否则，若 $a_2-b_2\sqrt{2}=0$，则当 $b_2\neq 0$ 时，$\sqrt{2}=\frac{a_2}{b_2}$，矛盾于 $\sqrt{2}$ 不是有理数；当 $b_2=0$ 时，推出 $a_2=0$，这样 $a_2+b_2\sqrt{2}=0$ 也引出矛盾。因此，$a_2+b_2\sqrt{2}\neq 0$ 时，

$$(a_2+b_2\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})=a_2^2-2b_2^2\neq 0$$

$$\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}{(a_2+b_2\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}$$
$$=\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}\sqrt{2}\in F.$$

这时，定义1的条件2°成立，故F为一数域。

由于 $Q\subseteq Q(\sqrt{2})\subseteq R$，所以 $Q(\sqrt{2})$ 是Q与R的一个中间数域。其中Q称为 $Q(\sqrt{2})$ 的子域；R称为 $Q(\sqrt{2})$ 的扩域。

例1中的数域F，可以一般化为，令

$$F=\{a+b\sqrt{2}\mid a, b\in \mathbf{P}\}.$$

其中**P**也是一个数域，可以证明F是一个数域。

定理1　任何数域均含有理数域。

证　设F为任一数域，F至少含有两个数，令 $a\in F$，且 $a\neq 0$，

于是 $a-a=0$，$\frac{a}{a}=1$ 均属于F。$1+1=2$，$2+1=3$，…，所有正整数$n\in F$，再有 $0-n=-n\in F$，故$Z\subset F$。由F对除法闭合，便得$Q\subset F$。∎

§2 排列的反序数

一个n阶排列，是由n个数字：1，2，…，n组成的 任一个有序数组，并记为

$$j_1j_2\cdots j_n.$$

定义 1 在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称一个反序。一个排列中反序的总数就称为这个排列的反序数。

例如2431是1，2，3，4这四个数字的一个四阶排列，在这个排列中，21，43，41，31是反序，2431的反序数就是4。而排列45321的反序数是9。

排列$j_1j_1\cdots j_n$的反序数记为

$$\tau(j_1j_1\cdots j_n).$$

上面例中应记：$\tau(2431)=4$，$\tau(45321)=9$。

给了任意一个排列，我们可以按照以下方法来计算它的反序数：先看有多少数字排在1的前面，设为m_1个，那么就有m_1个数字与1构成反序；然后把1划去，再看有多少数字排在2的前面，设为m_2个，那么就有m_2个数字与2构成反序；再把2划去。计算有多少数字排在3前面，如此继续下去。最后设在n前面有m_n个数字（显然$m_n=0$）。那么这个排列的反序数等于$m_1+m_2+\cdots+m_n$。

例如，在排列45321中，$m_1=4$，$m_2=3$，$m_3=2$，$m_4=0$，$m_5=0$，所以$\tau(45321)=4+3+2+0+0=9$。

定义 2 反序数为偶数的排列称为偶排列；反序数为奇数的排列称为奇排列。

例如，$\tau(2431)=4$，2431是偶排列；$\tau(45321)=9$，故45321是奇排列，$1\,2\cdots n$的反序数是零，因此是偶排列。

定义3 把一个排列中某两个数字i与j交换一下，而其余的数字不动，就得到另一个同阶的新排列，对排列施行的这样一个变换称为一个对换。并且用符号$(i,\ j)$来表示。

对排列3 1 5 4 2陆续施行一系列对换，可以得出排列1 2 3 4 5。先把5换到第五位置，即施行对换$(5,\ 2)$得3 1 2 4 5；4已在第四位置，不必动它；施行对换$(3,\ 2)$得2 1 3 4 5；最后再施行对换$(2,\ 1)$，就得1 2 3 4 5。

上面由排列3 1 5 4 2得出排列1 2 3 4 5的方法显然具有一般性。由此看出，通过一系列对换可由任一n阶排列$j_1j_2\cdots j_n$得出排列$1\,2\cdots n$。进而有

定理1 任意两个n阶排列总可以通过一系列对换互变。

证 设n个数字的两个排列$i_1i_2\cdots i_n$和$j_1j_2\cdots j_n$，我们已经知道，通过一系列对换可以由$i_1i_2\cdots i_n$得出$1\,2\cdots n$。我们只需证明，通过一系列对换可由$1\,2\cdots n$得出$j_1j_2\cdots j_n$。这一点容易得出，因为已经知道，通过一系列对换可由$j_1j_2\cdots j_n$得出$1\,2\cdots n$；按照相反的次序施行这些对换，就可以由$1\,2\cdots n$得出$j_1j_2\cdots j_n$。■

定理2 对换改变排列的奇偶性。

证 先看一个特殊的情形，即对换的两个数在排列中是相邻的情形。排列

$$\cdots\ j\ k\ \cdots \qquad (1)$$

经过$(j,\ k)$变成

$$\cdots\ k\ j\ \cdots \qquad (2)$$

这里“…”表示那些不动的数。显然，在排列（1）中如j，k与其它的数构成反序，则在排列（2）中仍然构成反序；如不构成反序则在（2）中也不构成反序；不同的只是j，k的次序。如果原来j，k组成反序，那么经过对换，反序数就减少一个；如果原来j，k不组成反序，那么经过对换，反序数就增加一个。不论

增加1还是减少1，排列的反序数的奇偶性总是变了。因之，在这个特殊的情形，定理是对的。再看一般的情形。设排列为

$$\cdots j\ i_1\ i_2\cdots i_s\ k\cdots \qquad (3)$$

经过(j, k)，排列(3)变成

$$\cdots k\ i_1\ i_2\cdots i_s\ j\cdots \qquad (4)$$

不难看出，这样一个对换可以通过一系列的相邻数的对换来实现。从(3)出发把k与i_s对换，再与i_{s-1}对换，…，把k一位一位地向左移动。经过$s+1$次相邻位置的对换，排列(3)就变成

$$\cdots k\ j\ i_1\ i_2\cdots i_s\cdots \qquad (5)$$

从(5)出发，再把j一位一位地向右移动，经过s次相邻位置的对换，排列(5)就变成了排列(4)。因之，j、k对换可以通过$2s+1$次相邻位置的对换来实现。$2s+1$是奇数，相邻位置的对换改变排列的奇偶性。显然，奇数次这样的对换最终结果还是改变了奇偶性。▮

由定理2，我们又得出以下事实。

定理3 $n\geq 2$时，n个数字的奇排列与偶排列的个数相等，各为$\frac{1}{2}n!$个。

证 设n个数字的奇排列共有p个，而偶排列共有q个，对这p个奇排列施行同一个对换(i, j)，那么由定理2，我们得到p个偶排列。由于对这p个偶排列，施行对换(i, j)又可以得到原来的p个奇排列，所以这p个偶排列各不相等·但我们一共只有q个偶排列，所以$p\leqslant q$。同样可得$q\leqslant p$。因此 $p=q$。▮

§3 n阶行列式

本节给出n阶行列式的定义。先来看一下二阶和三阶行列式的展开式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (2)$$

易见，二阶和三阶行列式的展开式是一些乘积的代数和，而每一项乘积都是由行列式中位于不同行和不同列的元素构成的，并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成。在（1）中，它的一般项可记为：

$$a_{1j_1}\ a_{2j_2},$$

其中j_1j_2是1，2的任一个二阶排列；在（2）中，它的一般项可记为：

$$a_{1j_1}\ a_{2j_2}\ a_{3j_3},$$

其中$j_1j_2j_3$是1，2，3的任一个三阶排列。不难验证，每一项乘积的符号分别由$(-1)^{\tau(j_1j_2)}$，$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$来决定。由此我们来给出一般的行列式的定义。

定义1　n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad a_{ij} \in F \quad (3)$$

等于所有取自不同行不同列的n个元素的乘积

$$a_{1j_1}\,a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \quad (4)$$

的代数和。这里$j_1j_2\cdots j_n$是1，2，…，n的一个排列，每一项（4）的符号由$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$来决定。这一定义可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

（5）

这里 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有n阶排列求和.

定义表明，为了计算n阶行列式，首先作不同行不同列元素的乘积，把构成这些乘积的元素按行（或列）指标排成自然顺序，然后由列（或行）指标所成排列的奇偶性来决定这一项的符号. n阶行列式（3）的通项（4）也可以写为更一般的形式：

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}.$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 都是1，2，…，n的排列，符号由

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$$

来决定.

由定义1立即看出，n阶行列式是由 n! 项组成的.

当n = 1时，一阶行列式 $|a_{11}|$ 就是数 a_{11}.

有时我们也将（5）式左边的行列式简记为 $|a_{ij}|$.

下面来看两个例子.

例1 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$$

D的一般项可以写为

$$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}.$$

对于 j_1 只能取1或4. 因为第1行的元素除1、4列的元素外，其余元素均为零. 于是，

当 $j_1 = 1$ 时，$\begin{cases} j_2 = 2, & j_3 = 3, & j_4 = 4, \\ j_2 = 3, & j_3 = 2, & j_4 = 4, \end{cases}$

当 $j_1 = 4$ 时，$\begin{cases} j_2 = 2, & j_3 = 3, & j_4 = 1, \\ j_2 = 3, & j_3 = 2, & j_4 = 1. \end{cases}$

所以这个四阶行列式的 4! = 24 项的乘积代数和，只有以下四项

不为零，即

$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}, a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}, a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}, a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$.
这四项的符号，由

$(-1)^{\tau(1234)}$，$(-1)^{\tau(1324)}$，$(-1)^{\tau(4231)}$，$(-1)^{\tau(4321)}$
来决定。故 $D = acfh - adeh - bcfg + bdeg$.

例 2 计算上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

这种行列式主对角线以下的元素全为零。可表示为 $a_{ij} = 0$，$i > j$. 与这种行列式对称的是下三角形行列式，即主对角线以上的元素全为零。可表示为 $a_{ij} = 0$，$i < j$. 这两种行列式统称三角形行列式。它们计算的结果都等于主对角线上n个元素 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn} 的积。

这是因为，（6）的每一项可以写为

$$a_{1j_1}\ a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

在行列式中第n行元素除去 a_{nn} 以外全为零，因之，只要考虑 $j_n = n$ 的那些项。在第 $n-1$ 行中，除去 $a_{n-1,n-1}$，$a_{n-1,n}$ 外，其余的项全为零，因之，j_{n-1} 只有 $n-1$，n 这两个可能。由于 $j_n = n$，所以，j_{n-1} 就不能等于n了，从而 $j_{n-1} = n-1$. 这样逐步推上去，不难看出，在展开式中，除去

$$a_{11}\ a_{22}\ \cdots\ a_{nn}$$

这一项外，其余的项全是0. 而这一项的符号由 $(-1)^{\tau(12\cdots n)} = 1$ 给出。于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \qquad (7)$$

作为（7）的特殊情形，有

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n .$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

主对角线以外的元素全为零的行列式称为对角形行列式。

§4 行列式的性质

行列式的计算，是一个很麻烦的问题。因为n阶行列式一共有n！项，当n较大时，计算n！项n个元素乘积的代数和是一件很困难的事。我们有必要讨论它的一些性质，来简化它的计算。

性质1 行列互换，行列式的值不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} . \quad (1)$$

证 （1）式的左边行列式位于第i行第j列元素 a_{ij}，在（1）的右边行列式中，是位于第j行第i列，这就是说，i是它的列指标，j是它的行指标。由行列式的定义可知，（1）式的左右两边都等于：

$$\sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_n \\ j_1 j_2 \cdots j_n}} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} .$$

故（1）式成立。∎

（1）式两边的两个行列式，称为互为转置行列式。n阶行

列式D的转置行列式记为D′。于是性质1又可叙述为：行列式和它的转置行列式相等。

性质1表明，在行列式中行与列的地位是对称的，因之凡是有关行的性质，对列也同样成立。下面所讨论的行列式性质我们仅对行来说，当然对列也有相同的性质，就不重复了。

性质2 行列式的一行乘以数k，等于用k乘以这个行列式。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 由行列式的定义，得

$$\text{左} = \sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$= k\cdot \sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$= \text{右}.$$

故性质2成立。▌

当k＝0时，即行列式中一行为零，那么行列式为零。

性质3 设行列式D的第i行的所有元素都可以表成两项的和：$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$，$i,j=1,2,\cdots,n$。那么D等于两个行列式D_1与D_2的和，其中

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$