领略数学的真谛　进入名牌大学的敲门砖

ShuXue AoLinPiKe

格致出版社　上海人民出版社

数学奥林匹克丛书

高中数学思想方法与模拟试题

杨德胜　编著

理科实验班
创新实验班
参加高中数学竞赛
及自主招生
辅导题典

ShuXue AoLinPiKe

格致出版社 上海人民出版社

数学奥林匹克丛书

高中数学思想方法与模拟试题

杨德胜　编著

图书在版编目(CIP)数据

高中数学思想方法与模拟试题/杨德胜编著. —上海:格致出版社:上海人民出版社,2010
(数学奥林匹克丛书)
ISBN 978-7-5432-1776-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 097520 号

责任编辑 王亚丽
美术编辑 路 静

数学奥林匹克丛书
高中数学思想方法与模拟试题
杨德胜 编著

出　版 世纪出版集团 www.ewen.cc　格致出版社 www.hibooks.cn　上海人民出版社
(200001 上海福建中路193号24层)

编辑部热线 021-63914988
市场部热线 021-63914081

发　行 世纪出版集团发行中心
印　刷 上海书刊印刷有限公司
开　本 787×1092 毫米 1/16
印　张 13.75
插　页 1
字　数 327,000
版　次 2010 年 8 月第 1 版
印　次 2010 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5432-1776-8/G・658
定　价 26.00 元

内容提要

本书将高中数学奥林匹克的主要数学思想方法分为 12 个专题，另附 20 套全国高中数学联赛模拟试题，通过训练的方式，激发学生的学习兴趣，启迪学生的思维，培养学生的创新能力，提高学生参加数学竞赛的实战能力。该书适合参加高中数学竞赛、大学自主招生的高中学生使用。

作者简介

杨德胜，男，生于 1957 年 8 月。中共党员。湖北大学数学系毕业。理学学士。1975 年 8 月参加教育工作，1996 年 12 月被评为中学数学高级教师，1998 年 9 月被广东省人民政府评为中学数学特级教师。2002 年 9 月被上海市人民政府复评为上海市特级教师、杨浦区名教师。曾在湖北省利川市二中、湖北省利川市一中、广东茂名市一中、广东中山纪念中学、上海市二中、上海交通大学附属中学任教。现就职于上海市向明中学。

1995 年至 2000 年被广东省数学竞赛委员会评为全国高中数学竞赛优秀辅导员，2007 年被中国数学学会评为全国高中数学竞联赛优秀教练员。1997 年 9 月被评为广东省南粤教书育人优秀教师（特等奖）。1997 年至 1999 年被广东省教育厅聘为广东省普教系统中学高级教师评审委员会成员。2007 年至今任上海市中学高级教师评审委员会成员，2008 年 9 月被评为上海交通大学优秀教师。

长期从事高中理科班的数学教学和数学竞赛辅导工作。辅导学生参加全国高中数学联赛，有数百人次获全国高中数学联赛一、二、三等奖，其中数十人被免试保送到清华大学、北京大学、上海交通大学、浙江大学、中山大学等名牌大学学习。在《数学通报》、《中学数学》(湖北)、《数学通讯》、《中等数学》、《中学数学研究》等 17 种省级以上刊物发表论文 60 余篇，主编《高中数学教学与能力训练》、《奥赛金牌之路》（高中数学卷）、《用数学的眼光看世界》、《数学奥林匹克——代数篇》、《数学奥林匹克——几何篇》、《数学奥林匹克——数学思想篇》、《数学奥林匹克命题人讲座——三角函数与复数》、《高中同步追踪丛书》、《高中数学复习方略与能力提升》等 40 多种教学参考书出版。湖北《中学数学》2002 年第 8 期封面人物。多次应邀到外地讲学，深受教师和学生的欢迎。

部分获奖学生寄语广大数学竞赛爱好者

杨斌　1996 年获全国高中数学联赛一等奖，以广东省第三名进入冬令营集训队。1997 年以广东省茂名市高考理科状元考入清华大学经济学院学习。曾任清华大学学生会外联部部长。2001 年保送该校读研究生，曾任研究生会主席。现在已事业有成。

“王元教授讲的‘数学竞赛需要平常心’一句话，至今让我难忘。以我的理解，‘平常心’包括三方面：第一，不畏难。正确看待学习中遇到的困难，不要被困难吓倒，保持良好的学习状态。第二，乐在其中。学习过程中接触、了解了很多美妙的数学思想、方法、技巧，享受运用巧妙技巧解决难题的乐趣。第三，正确看待。数学竞赛实际上是锻炼对思维逻辑能力和自学能力的一种培养，这些中学时代培养起来的能力让我受益匪浅。以此寄语正在数学奥林匹克海洋中遨游的广大中学生。”

金睿璋　2005 年高二时获全国高中数学联赛一等奖，以上海赛区第一名进入冬令营。2006 年获全国高中信息学联赛一等奖，进入冬令营，同年获全国高中数学联赛一等奖。2007 年保送到北京大学元培计划实验班数学方向学习。

“数学竞赛是一个活力体，数学是一个实践性很强的学科，做题往往是有效的。高效的学习并不是没有题海，而是‘高效的题海’。古人曰：读书破万卷，下笔如有神！在学习这套书时，别忘了：推广，猜想，……提出高质量的问题与老师同学分享。”

李务兵　2001 年获全国高中数学联赛一等奖，广东赛区第十一名。2001 年保送到中山大学信息科学学院计算机技术科学系学习。大二时参加大学生数学建模比赛名列前茅，破格被中国科学院计算机研究所录取为研究生。现在国外做博士后研究工作。

“学习数学终身受用，我的生活离不开数学。”

林远杰　2001 年获全国高中数学联赛一等奖，广东赛区第二十七名。2001 年保送到浙江大学信息科学学院计算机技术科学系学习。现在已事业有成。

“我从小就迷恋数学，这种迷恋直到现在。也许是为数学的美所吸引，也许是因为解决数学问题带给我的快乐感。我很迷恋一些难题的精妙解法，然后把它抄到我精美的笔记本里深深收藏，这是我一生的财富。”

杨永团　2001 年获全国高中数学联赛一等奖，广东赛区第九名。2001 年保送到中山大学信息科学学院计算机技术科学系学习。现在已事业有成。

“学习数学不难，解决数学问题就是公式和技巧的结合，即‘解题＝公式＋技巧’，公式是基础，技巧是方法和能力。只有通过实际训练，在解题中善于思考，解题后不断总结，才能提高解题的能力——这一点非常重要。还有一点，学习数学要多与同学讨论，多与老师辩论，因为老师为我导航，同学给我灵感。”

李致　2002 年全国高中数学联赛一等奖，2003 年保送到北京大学数学科学学院学习。

“例题是最具有代表性的题目，所以对书中的例题最好不要急于先读答案，至少应先思考一下自己的解法。若要看答案，不能只看一遍，要反复看，反复思考，力求把问题真正想通，求得思维上的突破，这样才能获得解题的灵感。”

陈睿源　2007 年高二时获全国高中数学联赛一等奖，2009 年保送到上海交通大学学习。

“学习奥数是十分花时间和精力的，联赛的考试很紧张，考查的内容却很多，所以需要熟练地掌握很多技巧，这方面需要多听老师讲解和自己多做题巩固，并且自己多做总结，这样才能更好地提高。”

马哲翱　2008 年获全国高中数学联赛一等奖，2009 年保送到清华大学计算机科学学院学习。

“数学竞赛其实是对数学本质的一种探索，数学方法固然重要，扎实的根基也必不可少。”

前　　言

我于20世纪80年代中期开始从事高中数学竞赛辅导工作，目的有两个，一是为我国参加国际学科奥林匹克竞赛输送一批苗子；二是为高素质创新人才的培养打下良好的基础。经过30年的艰苦努力，虽然没有什么惊天动地的事迹，但我的劳动终于结出了硕果：有数百人次获全国高中数学联赛一、二、三等奖，其中数十人被免试保送到清华大学、北京大学、上海交通大学、浙江大学、中山大学等名牌大学学习，有近50人在美国学习和工作。在这个过程中，我编写了教材、讲义和训练习题，探索培养数学竞赛选手和创新型高素质人才的规律，逐渐形成了自己的特色。这次由格致出版社和上海人民出版社出版的“数学奥林匹克丛书”就是30年来我在数学奥林匹克教学实践中所取得的丰硕成果之一。

我国在20世纪80年代中期陆续派队参加国际中学生学科奥林匹克竞赛，无论是数学、物理、化学，还是生物、信息学，我国选手都取得了让人刮目相看的好成绩，这从一个侧面说明，虽然我国人口多、地区差异大、发展不平衡、总体水平不高，但在培养学科拔尖人才和创新型人才方面，是有一套好办法的，是值得肯定的。

社会上对学生参加学科奥林匹克竞赛的看法各异，褒贬不一。其实，就我们的经验看，参加学科奥林匹克竞赛活动有利于学生创新思维的培养，有利于学生对知识的深刻理解和灵活运用，有利于提高学生分析问题和解决问题的能力。如果说，培养学生的创新精神和实践能力是素质教育的重点，那么，开展学科奥林匹克竞赛活动，则是实施素质教育的一项具体实践。

科学事业的发展，在很大程度上依赖于教育事业为其培养和输送一大批有创新能力的拔尖人才。因此，我们一方面要为普及九年义务教育而努力，为提高全民族科学素质而努力；另一方面也要培养一批又一批有创新精神和实践能力，能攻克科学技术难关的拔尖人才。提高广大群众的科学文化水平和培养少数拔尖人才，是并行不悖的，都关乎国家和民族的生存与发展的大计。

从高一新生到全国高中数学联赛大约为111周的学习时间，为此，我们以111周为单位，将全国高中教学联赛竞赛大纲规定的内容和中学生应掌握的数学思想方法以及高中数学奥林匹克竞赛的知识点、考点和热点科学、合理、循序渐进地融会在111练中。其中《高中代数》、《高中几何》、《高中数学思想方法与模拟试题》所有训练题在书后都附有详细解答，供学生反馈查阅之用。全书充分体现了对学生从“扶”到“放”、求真务实、起点低、入门快、循序渐进的理念。

实践证明，参加数学竞赛的选手，除系统掌握全国高中数学竞赛大纲规定的教学内容外，做一定数量的训练题是必不可少的。为此，本丛书给有志于数学竞赛的选手们提供了完整、系统、有效的训练素材；同时也为选手提供了创新的空间和舞台。本丛书的《高中代数》、《高中几何》知识点覆盖面广，训练量适宜，知识、方法到位，堪称经典，让学生对基础知识训

练有素;《高中数学思想方法与模拟试题》提炼方法、指点迷津,使学生如虎添翼,跨上成功的红地毯。

本丛书具有一定的创新性,其中有部分题目是作者自编的。本丛书中的题目与全国高中数学联赛题难度相当,部分题目与当前名牌大学自主招生试题难度也相当,还有部分题目难度还略高于名牌大学自主招生试题,参加大学自主招生考试的同学也可以选用。因此,笔者向广大的数学爱好者推荐本丛书,它一定能将你引入数学大门,在数学的海洋里搏击风浪。

本丛书在出版过程中,侯磊、牟金巧、杨典、杨妮参加了部分编写和整理工作。在编辑过程中,得到了格致出版社社长何元龙先生和责任编辑王亚丽的大力支持和指导,在此一并致谢。

由于笔者的水平有限,书中难免有一些错漏之外,欢迎使用本书的读者不吝赐教,如发现错误,请发 E-mail: yangdesheng1957@sina.com 或 yangdesheng138@126.com。

杨德胜

2010 年 7 月于向明中学创新楼

目　　录

第 1 章 数学思想方法

1.1 分类讨论

时间：120 分钟　满分：120 分　姓名________　分数________

一、填空题(本大题共 12 小题,每小题 6 分,共 72 分)

1. $f(x)$是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数,在$(0, +\infty)$上是增函数,且 $f(-3)=0$,则不等式 $xf(x)<0$ 的解集为____________.

2. 设集合 $M=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. 选择 M 的两个非空子集 A 和 B,要使 B 中最小的数大于 A 中最大的数,则不同的选择方法共有________种.

3. 设 $f(x)$是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数,在$[0, +\infty)$上是增函数,且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$,则不等式 $f(\log_a x)>0(a>0, a\neq 1)$ 的解集为____________________.

4. 对有 $n(n\geqslant 4)$ 个元素的总体$\{1, 2, \cdots, n\}$进行抽样,先将总体分成两个子总体$\{1, 2, \cdots, m\}$和$\{m+1, m+2, \cdots, n\}$(m 是给定的正整数,且 $2\leqslant m\leqslant n-2$),再从每个子总体中各随机抽取 2 个元素组成样本. 用 P_{ij} 表示元素 i 和 j 同时出现在样本中的概率,则 $P_{1n}=$________; $P_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant n)$ 的和等于________________.

5. 设 a 为实数,函数 $f(x)=x^2+|x-a|+1$, $x\in\mathbf{R}$. 则函数 $f(x)$的最小值是________.

6. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=a^x(a>0, a\neq 1)$ 的图象关于 $y=x$ 对称,记 $g(x)=f(x)[f(x)+2f(2)-1]$. 若 $y=g(x)$ 在区间$\left[\frac{1}{2}, 2\right]$上是增函数,则实数 a 的取值范围是____________________.

7. 在四面体 $ABCD$ 中,棱长为 1, P, Q 分别为棱 AB, CD 上的点,且 $AP=CQ=\lambda$,则四面体的表面从点 P 到点 Q 的最短距离为____________.

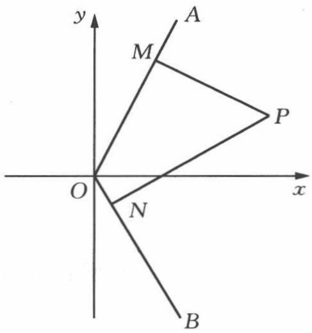
8. 设关于 x 的方程 $\log_{a^2}(9x^2-9x+6)+\frac{1}{2}=\log_{a^2}(6x-2)+\log_{a^2}(a+2)$ 有实数解,则实数 a 的范围为____________________.

9. 已知数列$\{a_n\}$满足: $a_1=m$(m 为正整数), $a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2}, & \text{当 } a_n \text{ 为偶数时;}\\ 3a_n+1, & \text{当 } a_n \text{ 为奇数时.}\end{cases}$ 若 $a_6=1$,则 m 所有可能的取值为____________.

10. 若函数 $f(x)=a+b\cos x+c\sin x$ 的图象经过点 $(0,1)$ 和 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$，且 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$|f(x)|\leqslant 2$ 恒成立，则实数 a 的范围为__________.

11. 设函数 $f(x)=-3x^2-3x+4b^2+\frac{9}{4}(b>0)$ 在区间 $[-b,1-b]$ 的最大值为 25，则 b 的值为________.

12. 如图，射线 OA 为 $y=kx(k>0,x>0)$，射线 OB 为 $y=-kx(x>0)$，动点 $P(x,y)$ 在 $\angle AOx$ 的内部，$PM\perp OA$ 于点 M，$PN\perp OB$ 于点 N，四边形 $ONPM$ 的面积恰为 k. 根据 k 的取值范围，确定动点 P 的纵坐标 y 是其横坐标 x 的函数 $y=f(x)$ 的解析式及定义域. 则 $y=f(x)$ 的解析式是____________；定义域是__________.



(第 12 题)

二、(15 分)已知函数 $f(x)=a^x|a^x-2|$，$(a>0,a\neq 1)$.

(1) 解方程 $f(x)=3$；

(2) 当 $x\in(0,1]$ 时，关于 x 的不等式 $f(x)<3$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

三、(16 分)已知函数 $f(x)=\ln(ax+1)+\frac{1-x}{1+x}$，$x\geqslant 0$，其中 $a>0$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，求 a 的值；

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(3) 若 $f(x)$ 的最小值为 1，求 a 的取值范围.

四、(17 分)设函数 $f(x)=x^2-(3k+2^k)x+3k\cdot 2^k$，$(x\in\mathbf{R})$.

(1) 若 $f(1)\leqslant 0$，求实数 k 的取值范围；

(2) 若 k 为正整数，设 $f(x)\leqslant 0$ 的解集为 $[a_{2k-1},a_{2k}]$，求 $a_1+a_2+a_3+a_4$ 及数列 $\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n}；

(3) 对于(2)中的数列 $\{a_n\}$，设 $b_n=\frac{(-1)^n}{a_{2n-1}a_{2n}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 的最大值.

1.2 数形结合

时间:120分钟 满分:120分 姓名________ 分数________

一、填空题(本大题共12小题,每小题6分,共72分)

1. 某班有50名学生报名参加A、B两项比赛,参加A项的有30人,参加B项的有33人,且A、B都不参加的同学比A、B都参加的同学的三分之一多一人. 则只参加A不参加B的同学有________人.

2. 若集合$M=\left\{(x,\ y)\middle|\begin{cases}x=3\cos\theta,\\ y=3\sin\theta.\end{cases}(0\leqslant\theta<\pi)\right\}$, $N=\{(x,\ y)\mid y=x+b\}$,且$M\cap N\neq\varnothing$,则实数b的范围是__________.

3. 已知实数x, y同时满足下列条件: $2x+y-2\geqslant0$, $x-2y+4\geqslant0$, $3x-y-3\leqslant0$,则x^2+y^2的最大值与最小值的和是______________.

4. 设$z=\cos\theta+\left(\frac{5}{4}-\sin^2\theta\right)\mathrm{i}(0\leqslant\theta<2\pi)$,则$|z|$, $\arg z$的范围分别为__________.

5. 曲线$y=\sqrt{2x-x^2}(0\leqslant x\leqslant2)$与直线$y=k(x-2)+2$有两个交点,则实数$k$的取值范围为________.

6. 当$0\leqslant x\leqslant1$时,不等式$\sin\frac{\pi x}{2}\geqslant kx$恒成立,则实数$k$的取值范围是__________.

7. 设α, β, $\gamma\in\mathbf{R}$,且满足$\sin\alpha\cos\beta+|\cos\alpha\sin\beta|=\sin\alpha|\cos\alpha|+|\sin\beta|\cos\beta$,则$(\tan\gamma-\sin\alpha)^2+(\cot\gamma-\cos\beta)^2$的最小值是__________.

8. 在平面直角坐标系xOy中,函数$f(x)=a\sin ax+\cos ax\ (a>0)$在一个最小正周期长的区间上的图象与函数$g(x)=\sqrt{a^2+1}$的图象所围成的封闭图形的面积是________.

9. 设x, y满足$\log_2x+\log_2y=1$. 则函数$\mu=x^2+y^2-2x-2y$的最小值为________.

10. 已知定义在$\mathbf{R}$上的奇函数$f(x)$,满足$f(x-4)=-f(x)$,且在区间$[0,\ 2]$上是增函数,若方程$f(x)=m\ (m>0)$在区间$[-8,\ 8]$上有四个不同的根x_1, x_2, x_3, x_4,则$x_1+x_2+x_3+x_4=$ ________.

11. 已知平面直角坐标系中有两动点$P(\sec^2\alpha,\ \tan\alpha)$, $Q(\sin\beta,\ \cos\beta+5)$,其中$\alpha$, β为任意实数,则P, Q之间最短距离为________.

12. 已知函数$f(x)=\dfrac{\sin(\pi x)-\cos(\pi x)+2}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{5}{4}\right)$,则$f(x)$的最小值为________.

二、(15分)已知x, y, $z\in\mathbf{R}$, $0<x<y<z<\frac{\pi}{2}$,证明:

$$\frac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z.$$

三、(16 分)求函数 $y=\left|x+2-\sqrt{1-x^2}\right|$ 的值域.

四、(17 分)求实数 a 的取值范围,使得对任意实数 x 和任意 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,恒有

$$(x+3+2\sin\theta\cos\theta)^2+(x+a\sin\theta+a\cos\theta)^2\geqslant\frac{1}{8}.$$

1.3 配方法与待定系数法

时间:120 分钟 满分:120 分 姓名________ 分数________

一、填空题(本大题共 12 小题,每小题 6 分,共 72 分)

1. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+4ax+a^2-1$ 在区间 $[-4,1]$ 上的最大值为 5,则实数 a 的值是________.

2. 设 $0<y\leqslant x<2\pi$, $\cos x+\cos y=\dfrac{3}{2}+\cos(x+y)$,则 $x+y=$ ________.

3. 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a, b, c\in\mathbf{R}, a\neq 0)$,满足条件:
(1) 当 $x\in\mathbf{R}$ 时, $f(x-4)=f(2-x)$,且 $f(x)\geqslant x$;
(2) 当 $x\in(0, 2)$ 时, $f(x)\leqslant\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2$;
(3) $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 0. 则使得存在 $t\in\mathbf{R}$,只要 $x\in[1, m]$,就有 $f(x+t)\leqslant x$ 成立最大的 $m(m>1)=$________.

4. 设 $f(x)$是一次函数,且其定义域内是增函数,由 $f^{-1}[f^{-1}(x)]=4x-12$,则 $f(x)$ 的表达式为______________.

5. 设函数 $f(x)=ax^2+8x+3(a<0)$,对于给定的负数 a 有一个最大的正数 $l(a)$,使得在整个区间$[0, l(a)]$,不等式 $|f(x)|\leqslant 5$ 都成立. 则 $l(a)$的最大值是________.

6. 设函数 $y=\dfrac{mx^2+4\sqrt{3}x+n}{x^2+1}$ 的最大值为 7,最小值为 -1,则函数的解析式为________________.

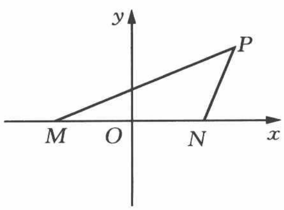
7. 设抛物线的对称轴与 y 轴平行,顶点到原点的距离为 5,若抛物线向上平移 3 个单位,则在 x 轴上截得的线段为原抛物线在 x 轴上截得线段的一半,若抛物线向左平移 1 个单位,则抛物线过原点,则此抛物线为______________.

8. 设函数 $y=5\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x+6\cos^2 x+m$ 能表示成 $y=A\sin(\omega x+\theta)$ 的形式 $(0\leqslant\theta<\pi)$. 则实数 m 的值为________.

9. 设方程 $x^2+2kx+4=0$ 的两个实根为 x_1, x_2,若 $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2\geqslant 3$,则 k 的取值范围为______________.

10. 设函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a<0)$ 对任意实数 x 都有 $f(2-x)=f(2+x)$,则不等式 $f\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+x+\dfrac{1}{2}\right)\right]<f\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(2x^2-x+\dfrac{3}{8}\right)\right]$ 的解集为______________.

11. 在面积为 1 的 $\triangle PMN$ 中, $\tan\angle PMN=\dfrac{1}{2}$, $\tan\angle PNM=-2$,建立如图所示的坐标系,则以 M、N 为焦点且过点 P 的椭圆方程是______________.



(第 11 题)

12. 已知双曲线中心在原点，焦点在 x 轴上，两渐近线互相垂直，设 F 为右焦点，P 为右支上一动点，$A(3\sqrt{2},\ 2)$ 为右支内部一定点，若 $|PA|+|PF|$ 的最小值为 $3\sqrt{6}-4$，则双曲线方程是________________.

二、(15 分)是否存在 $a,\ b,\ c$ 的值，对于：$n\in\mathbf{N}^*$，
$1+2\times3+3\times3^2+4\times3^3+\cdots+n\times3^{n-1}=3^n(an-b)+c$ 都成立.

三、(16 分)求使得不等式组 $\begin{cases}2b\cos 2(x-y)+8b^2\cos(x-y)+8b^2(b+1)+5b<0,\\ x^2+y^2+1>2bx+2y+b-b^2.\end{cases}$ 对任意实数 $x,\ y$ 都成立的一切 b 的值.

四、(17 分)设椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a,\ b>0)$ 过 $M(2,\ \sqrt{2})$，$N(\sqrt{6},\ 1)$两点，O 为坐标原点，

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 是否存在圆心在原点的圆，使得该圆的任意一条切线与椭圆 E 恒有两个交点 $A,\ B$，且 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$？若存在，写出该圆的方程，并求 $|AB|$ 的取值范围，若不存在说明理由.

1.4 构 造 法

时间:120 分钟 满分:120 分 姓名________ 分数________

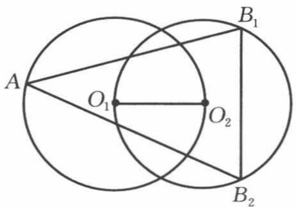
一、填空题(本大题共 12 小题,每小题 6 分,共 72 分)

1. 方程 $5^x+2=17^y$ 有________个正整数解.

2. 设 x_k, $y_k(k=1, 2, 3)$ 均为非负实数,则 $I=\sqrt{(2\,007-y_1-y_2-y_3)^2+x_3^2}+\sqrt{y_3^2+x_2^2}+\sqrt{y_2^2+x_1^2}+\sqrt{y_1^2+(x_1+x_2+x_3)^2}$ 的最小值为________.

3. 若 $a, b, c, x\in\mathbf{R}$, 且 a, b, c 互不相等,则
$\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}-1$ 等于________.

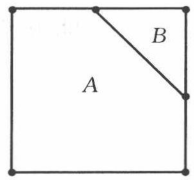
4. 如图,$\odot O_1$、$\odot O_2$ 为两个半径均为 1 的圆,且 $O_1O_2=1$, 点 B_1、B_2 为 $\odot O_2$ 上关于 O_1O_2 对称的两点,点 A 为 $\odot O_1$ 上的动点,则 $AB_1^2+AB_2^2$ 的最小值为________.



(第 4 题)

5. 若 $a\in\mathbf{R}$, 则 $\dfrac{\sqrt{3}a+1}{\sqrt{a^2+1}}$ 的范围是________________.

6. 3 个 $2\,006\times2\,006$ 的正方形都被连接相邻边的中点分成 A、B 两片,如图所示,把这 6 片粘在一个正六边形的外面,然后折成一个多面体,则这个多面体的体积为________.



(第 6 题)

7. 一个 $150\times324\times375$ 的长方体由 $1\times1\times1$ 的单位立方体胶合在一起而成,则这个长方体的一条对角线穿过________个单位立方体的内部.

8. 以实数 x, y 为自变量的函数 $u=x^2+\dfrac{81}{x^2}-2xy+\dfrac{81}{x}\sqrt{2-y^2}$ 的最小值是________.

9. 已知 $s, t\in\mathbf{R}$, 函数 $f(s, t)=(s+5-3\,|\cos t\,|)^2+(s-2\,|\sin t\,|)^2$ 的最小值是________.

10. 已知 $x, y\in\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $a\in\mathbf{R}$, 且 $\begin{cases}x^3+\sin x-2a=0,\\ 4y^3+\dfrac{1}{2}\sin 2y+a=0,\end{cases}$ 则 $\cos(x+2y)=$________.

11. 函数 $y=x^2-x+1+\sqrt{2x^4-18x^2+12x+68}$ 的最小值为________.

12. 方程 $x^2+2^x+2^{-x}=\dfrac{7}{2}$ 的解为________.

二、(15 分)设 $f=\dfrac{x^2+2x\sin\theta+2}{x^2+2x\cos\theta+2}\ (x\neq 0)$，对于任意的实数 x，θ，试求 f 的最大值和最小值.

三、(16 分)求函数 $f(x)=\sqrt{9(x-3)^2+(x^2-12)^2}+\sqrt{9x^2+\left(x^2-\dfrac{9}{4}\right)^2}$ 的最小值.

四、(17 分)现有 10 个互不相同的非零数. 它们之中任意两个数的和或积是有理数. 证明:每个数的平方都是有理数.