GDZYXXJC

高等职业学校教材

数学

（上册）

文科类

湖南省职业教育教材编审委员会编审

湖南科学技术出版社

湖南省职业教育教材编审委员会

内 容 提 要

本教材共分上、下两册，上册内容为极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数及其微分法；下册内容为行列式、矩阵、线性方程组、线性经济模型简介、概率、数理统计初步、数学建模、数学实验.

本教材供高等职业院校文科类各专业使用，也可作为文科类普通专科学校的选用教材或参考书.

前 言

本教材是在湖南省教育厅领导下，由湖南省职业教育教材编审委员会组织编审的．本教材分上、下两册，是高等职业院校文科类各专业的通用教材．

本教材内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数及其微分法、行列式、矩阵、线性方程组、线性经济模型简介、概率、数理统计初步、数学建模、数学实验．考虑到高等职业院校教学的特点，本套教材在内容的选取和编排上注意了实用性、先进性和灵活性。结合经济管理方面的实例阐述基本概念，力求深入浅出，通俗易懂；增加了数学建模和数学实验等新内容，以培养学生数学应用能力；部分较难的内容，如极限的“$\varepsilon - N$”定义、中值定理的证明等，采用了小号字排印，教学时可结合学生的实际需要选取，也可越过这些知识，而不会影响教材的逻辑性和系统性；部分加了“*”号的内容，可供不同专业选用。每节后都配备了习题，供课内、外作业用；每章后有小结，并配有复习题，分 A、B 两组，A 组题是属于基本要求范围的，供复习全章使用，B 组题难度上略有提高，供不同专业选用；另外，在习题和复习题中，有部分加了“*”号的题，仅供学有余力的学生选用．

本教材由湖南省经济贸易学校曾庆柏高级讲师任主编，湖南师范大学张垚教授任主审，湘潭大学刘建州教授任副主审．湖南省教科院职业教育与成人教育研究所成力争同志为组编，陈拥贤同志为责任编审．参编人员是：曾庆柏同志（第一章，第二章，

第三章)、长沙市商业学校陈晓霞同志(第四章,第五章)、湖南省化工学校唐轮章同志(第六章)、湖南省财经高等专科学校黄珍玉同志(第七章,第八章,第九章,第十章)、湖南省财会学校邓凌霄同志(第十一章,第十二章)、长沙大学许向阳同志(第十三章,第十四章).在本书的编审过程中,得到了湖南省教育厅职成处、湖南省职业教育与成人教育研究所和各编审人员所在单位的领导的大力支持,并为本书的编写提出了许多有益的建议,谨在此表示衷心感谢.

由于成书仓促,编审人员水平有限,不足之处,请有关专家、学者及使用本书的教师指正.

湖南省职业教育教材编审委员会

2001年4月

目　录

第一章　极限与连续

微积分是研究变量及变量间函数关系的一门学科.极限概念是微积分的重要基本概念之一,微积分的其他重要概念如导数、微分、积分等都是用极限表述的,并且它们的主要性质和法则也是通过极限方法推导出来的.本章将在我们已学习过的函数的基础上进行系统复习和必要补充,再介绍极限和函数的连续性等基本概念,以及它们的一些性质,为以后各章的学习做准备.

第一节　函数

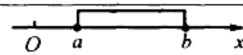
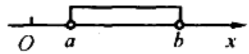
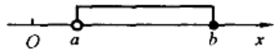
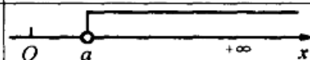
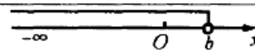
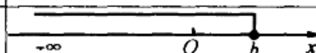
一、常量与变量

在研究实际问题时,我们会遇到各种各样的量.如长度、面积、体积、时间、距离、速度等等.在某个过程中,保持不变的量叫做常量,可以取不同的值的量叫做变量.例如,在货物的调运过程中,火车运行的时间、速度、距离等是变量,而运载的货物的重量是常量.

通常用字母 a,b,c 等表示常量,用字母 x,y,z 等表示变量.

对于某个问题来说,一个变量只能在一定的范围内取值.为了简单起见,变量的取值范围常用区间表示.常见的区间有以下几种(见表 1—1).

表 1—1

名称	记号	集合表示法	图示
闭区间	$[a,b]$	$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	
开区间	(a,b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
半开半闭区间	$(a,b]$	$\{x \mid a < x \leqslant b\}$	
	$[a,b)$	$\{x \mid a \leqslant x < b\}$	
无穷区间	$(a,+\infty)$	$\{x \mid a < x < +\infty\}$	
	$[a,+\infty)$	$\{x \mid a \leqslant x < +\infty\}$	
	$(-\infty,b)$	$\{x \mid -\infty < x < b\}$	
	$(-\infty,b]$	$\{x \mid -\infty < x \leqslant b\}$	
	$(-\infty,+\infty)$	$\{x \mid -\infty < x < +\infty\}$	

以后，当不需要指明是哪一类区间时，我们就简单地称它为“区间”，且常用字母 I 表示.

特别，我们把开区间 $(a-\delta,a+\delta)(\delta>0)$ 叫做点 a 的 δ 邻域，a 叫做邻域的中心，δ 叫做邻域的半径(图 1 - 1).

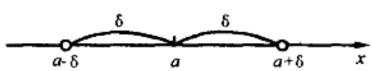


图 1 - 1

点 a 的 δ 邻域也可用不等式表示为 $a-\delta<x<a+\delta$. 对该不等式中各式同时加上 $-a$，得 $-\delta<x-a<\delta$，它等价于绝对值不等式 $|x-a|<\delta$.

二、函数的概念

一般来说，在一个问题中往往同时有几个变量在变化着，这几个变量并不是孤立地在变，而是直接或间接地相互联系又相互制约的．它们之间这种相互依赖的关系刻画了客观世界中事物变化的内在规律，这种规律用数学进行描述，就是函数关系．

看下面两个实际例子：

【例 1】 对圆的面积 A 与它的半径 r 进行考察，我们得到这两个变量间的相依关系由公式

$$A = \pi r^2$$

确定．当半径 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时，根据上述公式，变量 A 都有惟一确定的值和它对应．

【例 2】 在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，落下的距离为 s，并假定开始下落的时刻为 $t = 0$，则变量 s 与 t 之间的相依关系由公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

确定，其中 g 为重力加速度．如果物体着地的时刻为 $t = T$，则当时间 t 在闭区间 $[0, T]$ 上任意取定一个数值时，根据上述公式，变量 s 都有惟一确定的值和它对应．

由以上两例，我们抽象出函数的概念．

定义 1　设 x、y 是两个变量，D 是一个数集．如果对于 D 内的每一个数 x，按照某个对应法则 f，变量 y 都有惟一确定的值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y = f(x)$．x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**，数集 D 叫做这个函数的**定义域**．

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 相对应的 y 值叫做函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$．函数 $y = f(x)$ 所有函数值的集合 $M = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 叫做函数的**值域**．

函数 $y=f(x)$ 中表示对应法则的记号 f 也可以改用别的字母,如"g","φ","F"等,这时函数就记作 $y=g(x)$,$y=\varphi(x)$,$y=F(x)$ 等.当同时考察几个不同的函数时,就需要用不同的函数记号以示区别.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.如,例 1 中,定义域 $D=(0,+\infty)$;例 2 中,定义域 $D=[0,T]$.

但在数学上作一般性研究时,对于只给出表达式而没有说明实际背景的函数,我们规定:函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的取值范围.

【例 3】 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$.

(2) $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$.

(3) $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+x)$.

解 (1) $1-x^2\geqslant 0\Leftrightarrow x^2\leqslant 1\Leftrightarrow |x|\leqslant 1\Leftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 1\Leftrightarrow D=[-1,1]$.

(2) $\begin{cases}4-x^2\neq 0,\\ x+2\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pm 2,\\ x\geqslant -2\end{cases}\Leftrightarrow D=(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(3) $\begin{cases}x\neq 0,\\ 1+x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0,\\ x>-1\end{cases}\Leftrightarrow D=(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D.对于任意取定的 $x\in D$,对应的函数数值为 $y=f(x)$,则以 x 为横坐标,y 为纵坐标就确定了平面上的一点(x,y).当 x 遍取 D 上的数值时,就得到点(x,y)的一个集合

$$G=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}.$$

这个点的集合 G 叫做函数 $y=f(x)$ 的**图像**(图 1-2).

【例 4】 求下列函数的定义域、值域,并作出其图像:

(1) $y=f(x)=C$(C 为常数).

(2) $y=f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

解 (1) 因为当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时，变量 y 都有惟一确定的值 C 和它相对应，即函数都有定义，所以这个函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $M=\{C\}$. 它的图像是一条平行于 x 轴的直线(图 1－3).

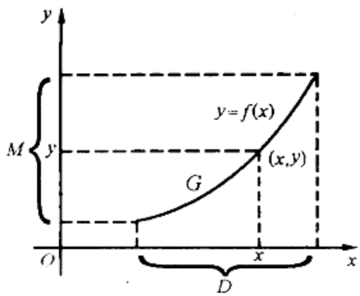


图 1－2

(2) 函数的定义域 $D=(-\infty,0)\cup[0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$，值域 $M=[0,+\infty)$. 它的图像如图 1－4 所示.

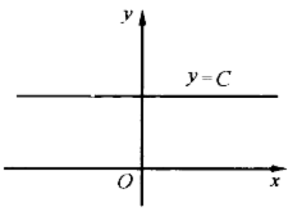


图 1－3

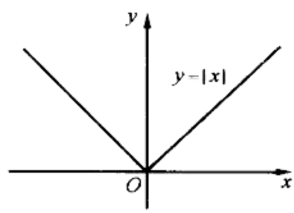


图 1－4

【**例 5**】乘火车由长沙去北京出差，按铁路部门的规定，成年人每人携带的行李在 20kg 以内免费；超过免费重量在 5kg 以内时，收行李费 12 元；超过免费重量在 5kg 至 50kg 时，收行李费 20.3 元. 如果用 R(单位：元)表示行李费，q(单位：kg)表示成年人一人携带的行李重量，则它们的函数关系是

$$R=\begin{cases}0, & 0\leqslant q\leqslant 20,\\ 12, & 20<q\leqslant 25,\\ 20.3, & 25<q\leqslant 70.\end{cases}$$

它的定义域 $D=[0,70]$，值域 $M=\{0,12,20.3\}$，它的图像如图 1－5 所示.

我们看到，有时一个函数要用几个式子表示. 这种在自变量的

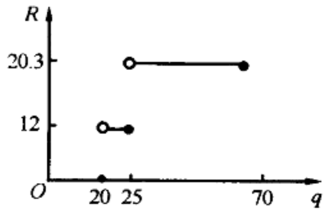


图 1－5

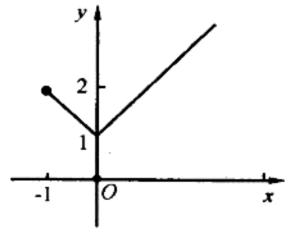


图 1－6

不同变化范围内,对应法则用不同式子来表示的函数,通常称为**分段函数**.

例如,函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1+x, 0\leqslant x,\\ 1-x, -1\leqslant x<0\end{cases}$$

是一个分段函数.它的定义域 $D=[-1,0)\cup[0,+\infty)=[-1,+\infty)$.当 $x\in[-1,0)$ 时,对应的函数值表达式为 $f(x)=1-x$;当 $x\in[0,+\infty)$ 时,对应的函数值表达式为 $f(x)=1+x$.例如,因为 $-\frac{1}{2}\in[-1,0)$,所以 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=1-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$;因为 $0\in[0,+\infty)$,所以 $f(0)=1+0=1$;因为 $1\in[0,+\infty)$,所以 $f(1)=1+1=2$.函数的图像如图 1－6 所示.

分段函数在经济活动中有着重要的应用.

三、函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

定义 2 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.如果对于任一 $x\in D$,都有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立,则称 $f(x)$ 为**奇函数**.如果对于任一 $x\in D$,都有