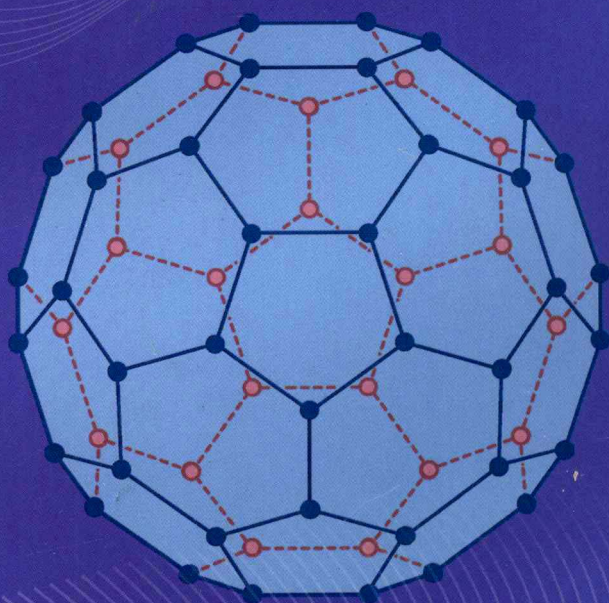


经全国中小学教材审定委员会 2005 年初审通过

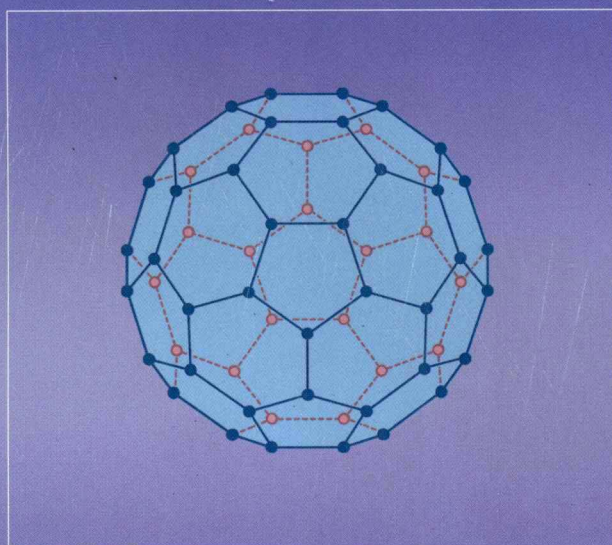
普通高中课程标准
实验教科书

选修系列 3-4

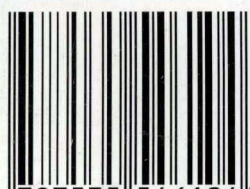
对称与群



湖南教育出版社



ISBN 7-5355-4610-2



9 787535 546104 >

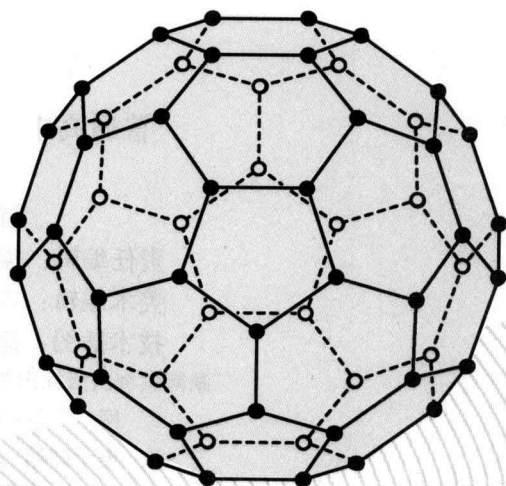
G·4605 定价:6.10 元

普通高中课程标准

实验教科书

选修系列 3—4

对称与群



主 编 张景中 陈民众
执行主编 李尚志
本册主编 徐明曜
编 委 郑志明 查建国 孟实华

普通高中课程标准实验教科书

选修 3—4

对 称 与 群

责任编辑：孟实华 邹伟华 甘 哲

美术编辑：肖 毅

技术插图：徐 航

湖南教育出版社出版发行（长沙市韶山北路 443 号）

网 址：<http://www.hneph.com>

电子邮箱：postmaster@hneph.com

湖南省新华书店经销

湖南新华印刷集团有限责任公司（邵阳）印刷

890×1240 16 开 印张：4 字数：100000 插页：1

2005 年 6 月第 1 版 2006 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 7—5355—4610—2/G·4605

定 价：6.10 元

本书若有印刷、装订错误，可向承印厂调换。

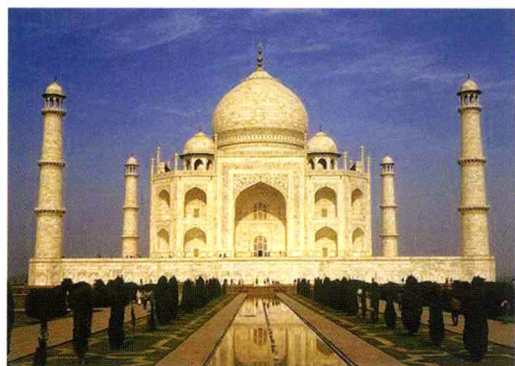


图 1-4



图 1-2

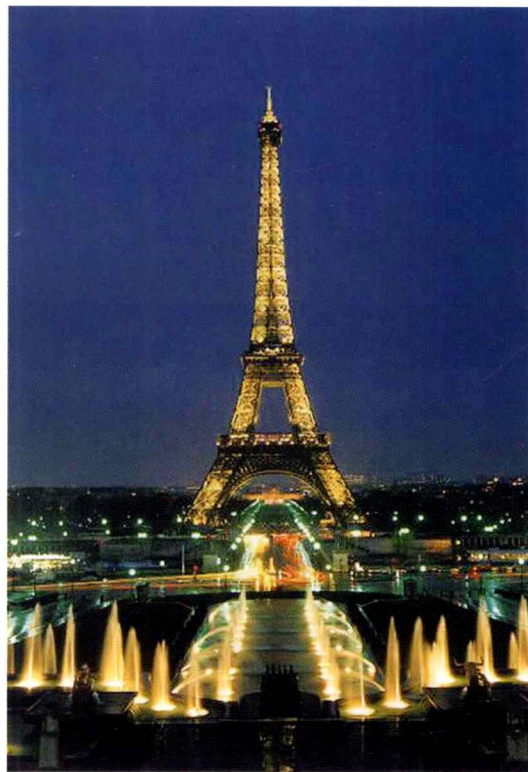


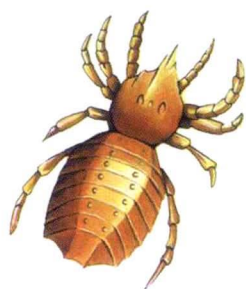
图 1-5



图 1-3



图 1-1



(a)



(b)

图 1-7

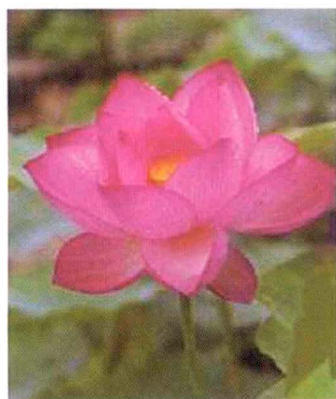


图 1-8

代数学发展的里程碑

——群的发现

1832年，年仅20岁的法国天才数学家伽罗瓦不幸英年早逝，他留给这个世界的宝贵遗产是他发现的群的概念。他的数学思想如此之深刻，以至于几十年后他的思想才被数学界所接受。被接受之后，群的理论立即得到了迅速的发展。到19世纪末，群论已经成为数学中一个重要的、不可缺少的分支。到了20世纪，群论更得到了长足的进步，并且有了越来越多的重要应用。这些应用不只局限于数学，在其他科学领域，譬如理论物理、结晶学、化学等很多学科中也都有应用的光辉范例。譬如在结晶学方面，人们应用群的办法找到了结晶体所有可能的对称，证明了结晶体只可能有230种空间对称群，从而完成了结晶体的对称性分类。这方面的较为详细的介绍可见第4章。到了21世纪，群论的发展更为迅速，而且应用也更为广泛。特别是它在信息安全、计算机网络理论、生命科学等新的科学领域中都有很多应用，对这些学科的发展起了不可或缺的作用。可以毫不夸张地说，群的发现是代数学发展的一个重要的里程碑。

为什么群的理论如此重要？最根本的原因之一在于群是描述和研究对称现象最主要的工具之一，而自然界和人们的日常生活中到处都存在着大量的对称现象。

这个简短的课程旨在介绍对称和群的最基本的概念，使同学们能对群的概念有初步的了解，以便将来需要时能更容易地深入学习群论的知识，并将群论应用到实际工作中去。另外，对称现象富有美感，希望同学们能从本课程的学习中体会自然界和数学的美。

作者

2004年12月

第1章 对称性无处不在	1
第2章 图形的对称变换及性质	9
2.1 图形的对称性	10
2.2 对称变换的合成	16
2.3 对称变换乘法的性质	20
习题 1	23
数学文化 对称和美	25
第3章 群的概念	27
3.1 群的概念	28
3.2 群的乘法表	32
3.3 正四面体的对称群	34
习题 2	36
第4章 由晶体结构的对称性得到的群	39
4.1 什么是晶体	40
4.2 晶体的内部结构	41
4.3 晶体的对称性群	42
4.4 分子结构的对称性	43
习题 3	45
第5章 用根式解方程	46
5.1 二次方程求根公式的进一步分析	47
5.2 三次方程的解法	48
5.3 用根式解方程	50
习题 4	51
数学文化 伽罗瓦的故事	52

[多知道一点]	图的对称变换	37
课程总结报告参考题		54
附录	数学词汇中英文对照表	55

第 1 章

对称性无处不在



公元前 1 世纪古罗马建筑师维特鲁维 (Vitruvius) 说：“对称性起因于匀称，匀称是各组成部分与整体之间的协调。”

对称 (symmetry) 这个词, 在现代汉语中是匀称、协调以及和谐的意思, 它在自然界和人们的日常生活中大量存在. 大至宇宙、太阳系, 小至微观粒子, 对称无处不在. 因为对称的物体蕴涵着美感, 在美术、雕塑、建筑、音乐等艺术作品中也得到广泛应用. 下面我们举一些日常生活中的实例.

首先来看建筑. 中国是个历史悠久的文明古国, 当我们假日到全国各地旅游时, 到处可以看到很多保存完好的古代建筑, 它们体现了古代劳动人民的智慧. 在这些建筑中, 几乎所有的都有着各种优美的对称性. 例如, 大家熟悉的北京故宫、颐和园中的建筑到处可见中轴线两侧的对称性, 而天坛祈年殿的建筑 (图 1-1) 则有着更丰富的对称性. 这使我们在感受到古代建筑雄伟壮丽的同时, 也受到一种美的陶冶. 即使是普通的民居也都体现出一定的对称性, 见图 1-2 中

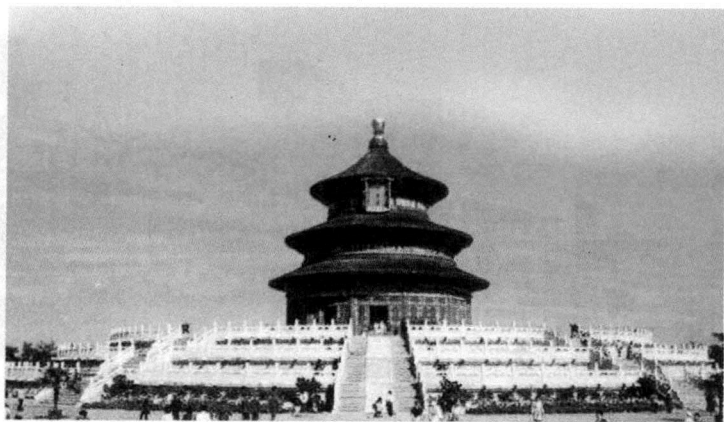


图 1-1 北京天坛祈年殿



图 1-2 山西乔家大院

山西乔家大院的建筑。

在其他国家也是一样。著名的古埃及的金字塔（图 1-3）、印度古都阿格的泰姬陵（图 1-4）、法国巴黎的艾菲尔铁塔（图 1-5）等都是国际上有名的建筑，它们都表现出令人心旷神怡的对称美，从古到今为世人所称颂。



图 1-3 埃及金字塔

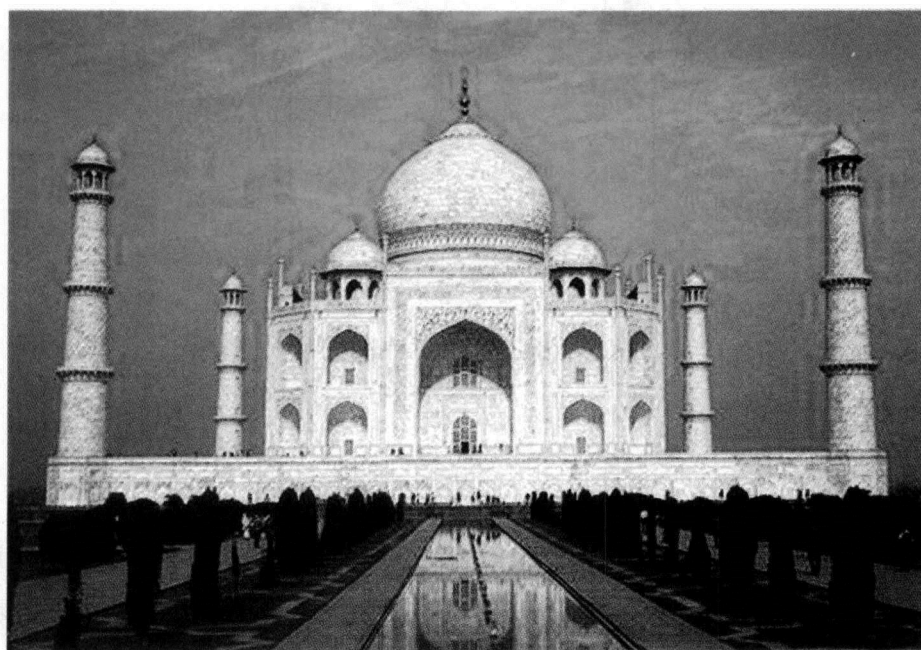


图 1-4 印度古都阿格的泰姬陵



图 1-5 法国巴黎的艾菲尔铁塔

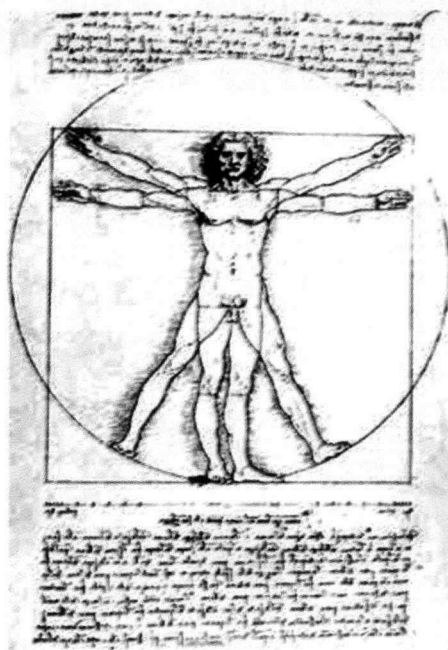


图 1-6 达·芬奇的人体比例图

另外，人的身体的各部分是非常对称而成比例的，这种对称的美成为无数艺术创作、特别是美术创作的灵感的源泉。著名画家达·芬奇的人体比例图（图 1-6）就充分体现了人体各部分的对称性。

自然界中，动物的躯体，植物的叶片、特别是花朵大都有着典型的对称性。图 1-7 中是古无翅虫、巨蜻蜓等古代生物的化石的照片，图 1-8 是若干植物的花和叶。

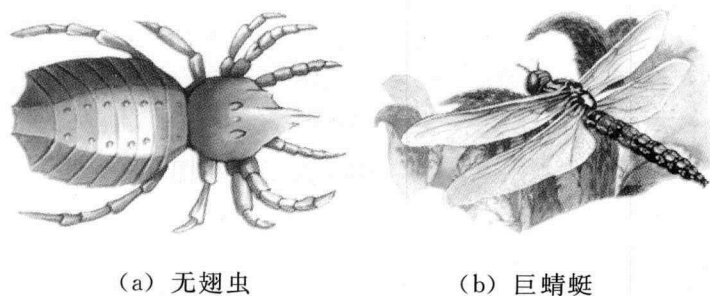


图 1-7 古生物



图 1-8 花和叶

另外，冬天飘落的雪花，如果你仔细看，它有着令人惊异的对称的美。无怪乎，赫尔曼·外尔（Weyl Hermann）在他著名的科普读物《对称》中就是以一粒放大的雪花作为该书扉页的插图（图1-9）。更多的雪花图案见图 1-10。

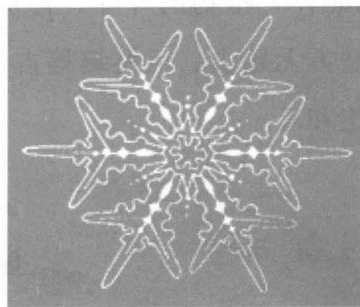


图 1-9 《对称》扉页的插图

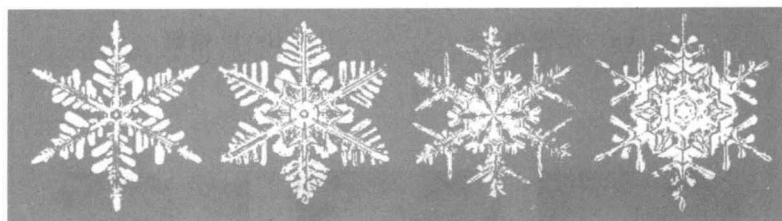


图 1-10 雪花图案

日常生活中常见的花布、花纸等广泛应用的各種材料上，装饰图案也都被设计成十分对称的美丽图形，这些图形往往有一个矩形或多边形的基本单元，然后向四面八方伸展扩张以至无穷。下面列出装饰图案的基本单元，请大家欣赏（图 1-11）。更有甚者，有的装饰图

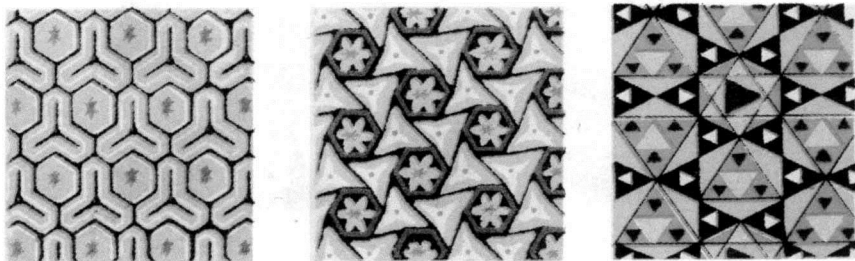


图 1-11 装饰图案



图 1-12 平面填充图案

案的基本单元不是矩形，而是很不规则的图形，如可爱的企鹅、小鸟、小鱼等。但把它们规则地放置，却也能天衣无缝地充满整个平面（图 1-12）。研究究竟什么图形能够适当放置并充满平面是所谓平面填充问题，这个问题的解决也要用群论的方法。但由于它超出了本书范围，就不作进一步的介绍了。

再有，我们知道，晶体从微观到宏观都有着奇妙的对称性。例如食盐、明矾、石英等结晶体，以及名贵的钻石，它们外表晶莹剔透，结构对称，给人一种美感（图 1-13）。从微观来看，其分子或原子排成晶格点阵，也都呈现出优美的对称性。对于晶体的对称性质，我们将要用专门一章来讲述。

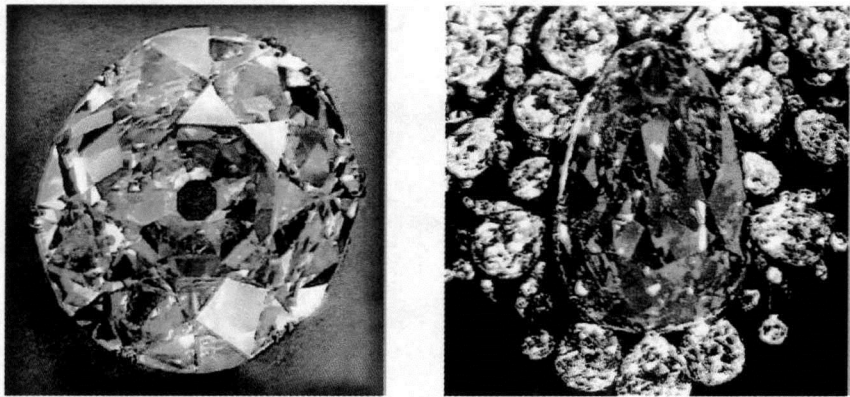


图 1-13 钻石

总之，自然界天造地设的各种对称性以及人类模仿自然在艺术作品中创造出的对称简直无处不在，精彩纷呈。为了深入地理解各种物体的对称性质，我们要对它进行数学上的分析和研究。而研究对称性的主要数学工具就是群论。

本章中我们欣赏了自然界和人造的大量对称图形和物体，下一章我们就要从数学上对它们进行研究，首先我们将研究平面图形的对称性质。事实上，数学上的对称也是宇宙间对称现象的数学抽象。

下面，让我们再欣赏一下具有各种对称性的图形。

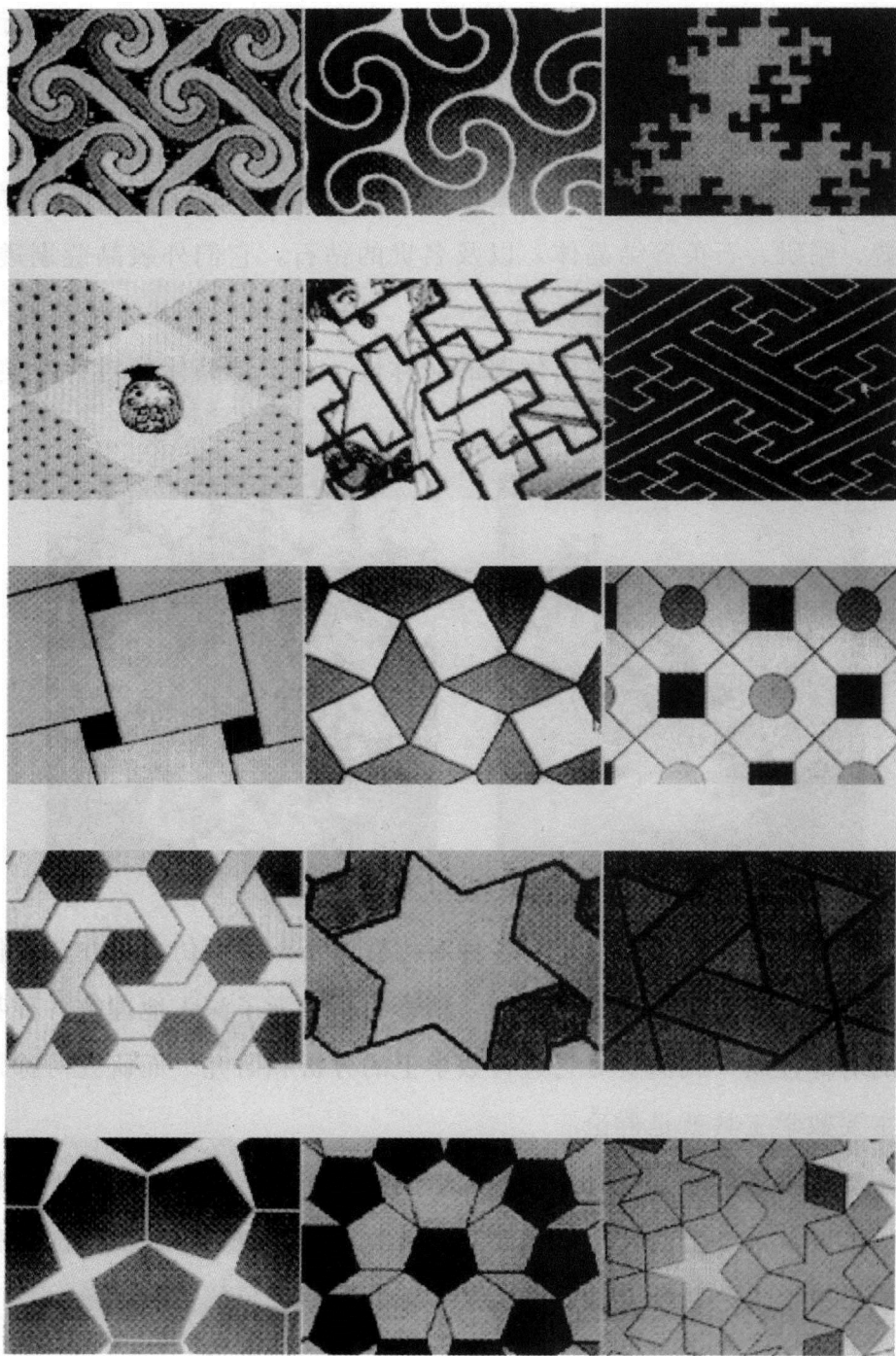


图 1-14