面向21世纪全国高职高专数学规划教材

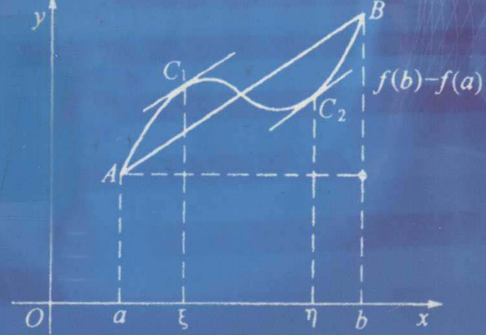
高等数学

GAODENG SHUXUE

于桂萍 主 编
张建奎
张丽娟 副主编
钟召平
鲍 曼 主 审

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\text{或}$$

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

面向21世纪全国高职高专数学规划教材

高 等 数 学

于桂萍　主编

张建奎　张丽娟　钟召平　副主编

邢进喜　常胜利　顾永宏　参编

鲍曼　主审

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是根据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》，结合编者多年的教学经验及高职高专教改成果编写而成的。

本书内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数。

本书有三大特点：一是以应用为目的，重视几何意义及实际应用，有利于培养学生的数学应用意识和能力；二是内容阐述简明扼要，同时注重渗透数学思想方法，便于教师讲授和学生自学；三是章、节体例设计实用，每节有思考题和习题，每章有知识要点、复习题、自我检测题，且书后附有答案，方便教与学。

本教材可作为高职高专各专业的高等数学教材，也可供专升本及相关人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/于桂萍主编．—北京：北京大学出版社，2005.7
（面向21世纪全国高职高专数学规划教材）
ISBN 7-301-09106-0

I．高··· II．于··· III．高等数学—高等学校：技术学校—教材 IV．013

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第069452号

书　　名：高等数学
著作责任者：于桂萍　主编
责 任 编 辑：吕冬明
标 准 书 号：ISBN 7-301-09106-0/O·0648
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
电　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62765126
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn
电 子 信 箱：xxjs@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：河北滦县鑫华书刊印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　21印张　454千字
2005年7月第1版　2005年7月第1次印刷
定　　价：31.00元

前　　言

本书是新世纪高职高专规划教材，是根据教育部最新制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》，在广泛调查研究的基础上，结合高职高专教育改革的新形势，以及编者多年的教学经验及高职高专教改成果编写而成的。

在本书编写过程中，贯彻以学生为本的思想。针对学生基础状况及未来发展需要，注重教材的基础性，着重讲清基本概念、基本思想、基本方法，使学生能够掌握基本概念、形成基本数学思想、会用基本方法，解决基本数学问题。而且能进行知识的迁移，把数学方法和数学思想应用于其他领域，达到解决实际问题的目的。

针对多数学校高等数学课课时较少的现状，在保证知识的先进性、科学性的同时，本书力求做到理论清晰、推理简明扼要、淡化证明、知识要点明确、重视几何意义等，便于教师讲授导学及学生自学的需要。

本书配备的各类题型都是精心设计的，每节后有为弄清概念、培养思维能力而设计的思考题，有掌握基本知识和方法的习题，每章结束还设计了复习题，目的是强化全章知识，综合使用所学知识，达到能力提升的目的。在各类型题中均设计了一定量的贴近生活、贴近实际的应用题，增强学生对数学的趣味性及应用意识。

本书的编写分工（按章序）如下：于桂萍老师编写了第 1、6 章；钟召平老师编写了第 2 章；常胜利老师编写了第 3 章；张丽娟老师编写了第 4、5 章；顾永宏老师编写了第 7 章；邢进喜老师编写了第 8、9 章；张建奎老师编写了第 10 章。

全书由于桂萍老师统稿，由哈尔滨师范大学数学与计算机科学学院的鲍曼教授在百忙中担任主审，进行了认真细致的审阅，并提出了许多宝贵的意见和建议。在本书的编写过程中，得到了黑龙江农业经济职业学院、山东潍坊职业学院、黑龙江生物科技职业学院等院校的大力支持与帮助，在此一并表示衷心的感谢！

由于水平有限，时间比较仓促，本书难免有不当之处，恳请读者斧正。

编　者
2005 年 5 月

目　　录

第 1 章　函数、极限与连续

初等数学中研究的对象多数是不变的量，而在高等数学中，研究的对象是变化的量. 所谓函数关系就是变量之间的依赖关系，极限概念和连续概念是高等数学中两个极其重要的概念，对整个高等数学内容的学习具有奠基性. 极限思想是利用有限描述无限、由近似过渡到精确的一种工具和过程，是高等数学的中心思想. 所以本章的内容在全书中具有基础性地位和作用.

本章主要讲授函数、极限、连续的基本概念，无穷小和无穷大，极限的运算等内容.

通过对本章的学习，学生能够理解和掌握函数、极限、连续、无穷小、无穷大等概念，会判断无穷小、无穷大及函数的连续性与间断点；掌握无穷小与无穷大的关系及无穷小的性质，了解无穷小的比较；掌握求极限的方法，深刻理解高等数学中的极限思想.

1.1　函　　数

1.1.1　函数

1. 邻域

我们在高中已经学习过数集及区间的概念，下面给出高等数学中常用的邻域的概念.

给定实数 a，以点 a 为中心的任何开区间称为**点 a 的邻域**，记作 $U(a)$.

设 δ 是给定的正数，则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径. 如图 1-1 所示.

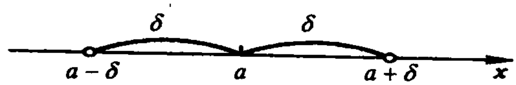


图 1-1

由于 $\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x \mid |x-a|<\delta\}$，所以

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

有时会用到点a的δ邻域中把中心a去掉，此时称为**点a的去心δ邻域**，记作$\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\},$$

其中$0<|x-a|$表示$x\neq a$.

2. 函数概念

定义 1.1 设x,y是两个变量，D是给定的数集，若对于x在D内每取一个数值，变量y按照一定的对应法则f，总有惟一确定的数值与x对应，则称**y是x的函数**，记作$y=f(x)$. 其中数集D为函数$f(x)$的**定义域**，记作D_f，x为**自变量**，y为**因变量**.

当x在D_f内取定某个数值x_0时，对应的y取到的数值y_0称为函数$y=f(x)$在x_0处的函数值，函数值的全体称为**函数的值域**，记作R_f.

如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的函数；如果两个函数的定义域和对应法则中有一项不相同，那么这两个函数就是不同的函数. 所以确定函数的两个要素（定义域和对应法则）是判断两个函数是否相同的依据.

研究任何函数都要先考虑其定义域，那么在求函数的定义域时，要考虑以下情况：

（1）分式的分母不能为零；

（2）偶次开方时，被开方部分非负；

（3）指数函数和对数函数中，底大于零不等于 1，且对数函数的真数大于零；

（4）含反三角函数的$\arcsin x$或$\arccos x$时，要满足$|x|\leq 1$；

（5）若函数同时含有以上几种情况，则要取其交集.

在函数定义中，对于每个$x\in D_f$，按照对应法则f，对应的函数值y总是惟一的，这样定义的函数称为**单值函数**；如果对于每个$x\in D_f$，按照对应法则f，总有确定的函数值y与之对应，但这个y值不是惟一的，这样定义的函数称为**多值函数**. 例如$y^2=x$，当x任取一个正数时，对应的y值有两个，所以这个函数是一个多值函数，对于多值函数加上限定条件就可以转化为单值函数，上述函数加上$y\geq 0$（或$y\leq 0$），就可以转化为单值函数了. 本课程中所讨论的函数除非特别说明，均指的是单值函数.

函数的表示法有 3 种：表格法、图形法、解析法（公式法）.

例 1 求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{4-x^2}$；　　（2）$y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}+\lg\dfrac{x^2+2x}{3}$.

解 （1）由题意得

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ 4 - x^2 \geq 0. \end{cases}$$

所以所求函数的定义域为 $[-2,1)\cup(1,2]$；

（2）由题意得

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x-1}{2}\right| \leq 1, \\ x^2 + 2x > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 3, \\ x > 0 \text{或} x < -2. \end{cases}$$

所以所求函数的定义域为 $(0,3]$.

例 2　求绝对值函数 $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 的定义域、值域，并画出草图.

解　定义域为 $(-\infty,+\infty)$ ，值域为 $[0,+\infty)$ ，如图 1-2 所示.

例 3　求符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 的定义域、值域，并画出草图.

解　定义域为 $(-\infty,+\infty)$ ，值域为 $\{-1,0,1\}$ ，如图 1-3 所示.

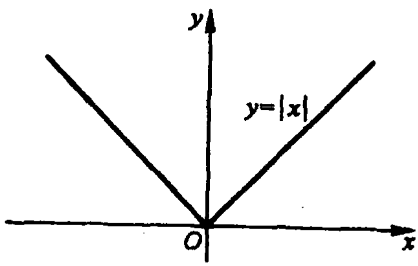


图 1-2

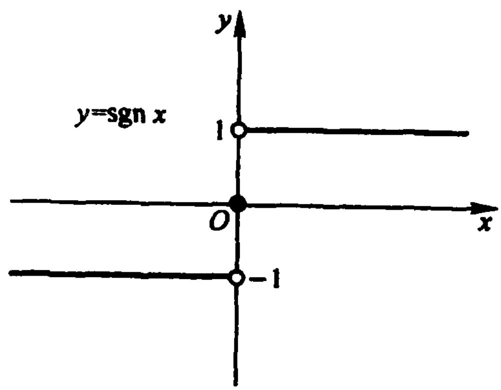


图 1-3

像例 2 和例 3 这两个函数，在定义域的不同范围内，不是用一个式子来表示，而是用两个或两个以上的式子合起来表示，这样的函数称为**分段函数**.

3. **函数的特性**

（1）函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D_f ，区间 $I \subseteq D_f$ ，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 ，当

$x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ 或 } f(x_1) > f(x_2),$$

则称 $f(x)$ **在区间 I 上是单调增加或单调减少的**.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

增函数的图像 x 与 y 同增同减，减函数的图像 x 与 y 增减相反.

（2）函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D_f 关于原点对称，如果对于任意一个 $x \in D_f$，恒有

$$f(-x) = -f(x)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**；如果对于任意一个 $x \in D_f$，恒有

$$f(-x) = f(x)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

（3）函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D_f，区间 $I \subseteq D_f$，如果存在正数 M，使得对于任意一个 $x \in I$，恒有

$$|f(x)| \le M$$

成立，则称**函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界**；如果这样的正数 M 不存在，则称 $f(x)$ **在区间 I 上无界**. 也就是说，对于任何正数 M，总存在 $x_1 \in I$，使 $|f(x_1)| > M$ 成立，那么函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

在所讨论的区间上，**有界函数的图像，一定夹在平行于 y 轴的两条直线之间.**

（4）函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D_f，如果存在一个正数 l，使得对于任意一个 $x \in D_f$，有 $(x \pm l) \in D_f$，且

$$f(x+l) = f(x)$$

恒成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，l **称为函数 $f(x)$ 的周期**，使上式成立的最小正数叫**最小正周期**，通常我们所说的周期指的是最小正周期.

周期函数的图像，每隔周期的整数倍重复出现.

正弦函数、余弦函数是同时具有上述 4 条性质的函数.

4. 反函数

定义 1.2 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 R_f. 如果对于任意的 $y \in R_f$，总有惟一确定的 $x \in D_f$ 通过 $y = f(x)$ 与 y 对应，这时得到以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，称这个函数为 $y = f(x)$ 的**反函数**，记作 $x = f^{-1}(y)$. 并称 $y = f(x)$ 为**直接函数**.

习惯上，$y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$，且其定义域为 R_f，值域为 D_f.
反函数 $y=f^{-1}(x)$ 与直接函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 4　判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=(2^x+2^{-x})\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

（2）$f(x)=x+\cos x$；

（3）$f(x)=x^2\mathrm{e}^{-|\sin x|}$.

解　（1）因为

$$f(-x)=(2^x+2^{-x})\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=(2^x+2^{-x})\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}$$
$$=(2^x+2^{-x})\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=(2^x+2^{-x})\ln(x+\sqrt{1+x^2})^{-1}$$
$$=-(2^x+2^{-x})\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

所以（1）为奇函数；

（2）因为 $f(-x)=-x+\cos x$，所以（2）为非奇非偶函数；

（3）因为 $f(-x)=f(x)$，所以（3）为偶函数.

例 5　求函数 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}$ 的反函数.

解　由原式变形得

$$y\mathrm{e}^x-y=1,\quad \mathrm{e}^x=\frac{y+1}{y},$$

即 $x=\ln\dfrac{y+1}{y}$，互换 x 与 y，得 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}$ 的反函数为 $y=\ln\dfrac{x+1}{x}$.

1.1.2　复合函数

1. 基本初等函数

下列 6 类函数统称为**基本初等函数**（也说成是**简单函数**）：

（1）常数：$y=c$（c 为常数）；

（2）幂函数：$y=x^\alpha$（α 为任何实数）；

（3）指数函数：$y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）；

（4）对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$）；

（5）三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$；

（6）反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$.